- Mednarodna matematična olimpijada 2021

  - Nejc Amon, Lovro Drofenik in Jaka Vrhovnik iz I. gimnazije v Celju,
  - Juš Kocutar z II. gimnazije Maribor,
  - Lana Prijon z Gimnazije Bežigrad
  - Gal Zmazek z Gimnazije Ptuj

Nejc in Lovro osvojila bron, Jaka in Juš pohvalo. **Čestitke!**

ponedeljek, 19. julij 2021

Naloga 1. Naj bo $n \geqslant 100$ celo število. Ivan je napisal vsako od števil $n, n+1, \ldots, 2n$ na svojo karto. Nato je teh $n+1$ kart premešal in jih razdelil na dva kupa. Dokaži, da sta vsaj v enem kupu taki dve karti, da je vsota števil na teh dveh kartah popolni kvadrat.

Naloga 2. Dokaži, da neenakost

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

velja za vsa realna števila $x_1, \ldots, x_n$.

Naloga 3. Naj bo D taka notranja točka ostrokotnega trikotnika ABC, pri katerem je $|AB| > |AC|$, da je $\angle DAB = \angle CAD$. Za točko E na daljici AC velja $\angle ADE = \angle BCD$, za točko F na daljici AB velja $\angle FDA = \angle DBC$, za točko X na premici AC pa velja $|CX| = |BX|$. Naj bo O_1 središče očrtane krožnice trikotnika ADC in O_2 središče očrtane krožnice trikotnika EXD. Dokaži, da se premice BC, EF in O_1O_2 sekajo v eni točki.

IMO 2021, naloga 1:

Naj bo $n \geq 100$ celo število. Ivan je napisal vsako od števil

$$n, n+1, n+2, \dots, 2n$$

na svojo karto. Nato je teh $n+1$ kart premešal in jih razdelil na dva kupa. Dokaži, da sta vsaj v enem kupu taki dve karti, da je vsota njunih števil popoln kvadrat.

Poseben primer:

n=100, na kartah so števila 100, 101, …, 200.
Zmešamo in naredimo 2 kupa (različnih velikosti).

Najmanjša možna vsota dveh števil je 201, največja 399.
Možni kvadrati vmes so 225, 256, 289, 324 in 361.
Kako vemo, da sta na enem kupu zagotovo 2 karti s tako vsoto?

Namig: opazujmo števila 126, 163, 198.

$$126 + 163 = 289 = 17^2,$$
$$126 + 198 = 324 = 18^2,$$
$$163 + 198 = 361 = 19^2.$$

Po principu golobnjaka bosta vsaj 2 od teh 3 števil na enem kupu. Torej en kup gotovo vsebuje par, da je vsota popoln kvadrat.

Ideja: Za dani $n \geq 100$ iščemo števila a, b, c, da velja

$$n \leq a < b < c \leq 2n$$

in

$$\begin{aligned} a + b &= x^2 \\ a + c &= y^2 \\ b + c &= z^2 \end{aligned}$$

(torej je $x^2 < y^2 < z^2$).

Ali so lahko x, y, z celo zaporedna števila?
Ker je $2a + 2b + 2c = x^2 + y^2 + z^2$ sodo, mora biti v tem primeru y sodo, x, z pa lihi.

$$\begin{aligned} a + b &= x^2 = (2k - 1)^2 \\ a + c &= y^2 = (2k)^2 \\ b + c &= z^2 = (2k + 1)^2 \end{aligned}$$

Iz sistema

$$
\begin{aligned}
a + b &= (2k-1)^2 \\
a + c &= (2k)^2 \\
b + c &= (2k+1)^2
\end{aligned}
$$

lahko izrazimo števila a, b, c s parametrom k:

$$
\begin{aligned}
a &= 2k^2 - 4k \\
b &= 2k^2 + 1 \\
c &= 2k^2 + 4k
\end{aligned}
$$

Zgled: $k = 9$ da števila $a = 126, b = 163, c = 198$, ki smo jih srečali že prej.

Za zaključek zadošča dokazati, da za vsak $n \geq 100$ obstaja tak $k \geq 9$, da so števila a, b, c na intervalu med n in $2n$.

- Baza indukcije: Za $n = 100$ je ustrezen $k = 9$.

- Indukcijski korak:
  Naj za neki $n \geq 100$ obstaja ustrezen $k \geq 9$.
  Vemo, da števila

$$a = 2k^2 - 4k$$
$$b = 2k^2 + 1$$
$$c = 2k^2 + 4k$$

  ležijo med n in $2n$.
  - Če je $n + 1 < 2k^2 - 4k$, potem je isti k ustrezen tudi za $n + 1$.
  - Če je $n + 1 = 2k^2 - 4k$, potem namesto k vzamemo $k + 1$ in preverimo veljavnost neenakosti:

$$a' = 2(k+1)^2 - 4(k+1) \geq n + 1$$
$$c' = 2(k+1)^2 + 4(k+1) \leq 2(n+1)$$

QED.

IMO 2021, naloga 5: Glej aktualno številko revije Presek.

lahko zgodili in je vse teklo gladko, sodelovalo še več pomočnikov, ki so opravili različna dobra dela (dve od njih sta v rumenih majicah na sliki 5). Pripraviti so morali učilnico, kjer so naši dijaki tekmovali, primerno so morali namestiti kamere, preko katerih je potekal vrhovni nadzor, preizkušali so internetne povezave, razporedili eksperimentalno opremo po mizah, ko je bil čas za to, kopirali naloge, nadzirali dijake med tekmovanjem, skenirali izdelke, na EFO pa so pomagali tudi pri koordinaciji nadzora in nadzoru vseh tekmovalcev preko kamer, in, zelo pomembno, pri ocenjevanju (anonimiziranih) nalog vseh tekmovalcev. To zadnjo nalogo, ocenjevanje izdelkov na EFO, so izvrstno opravili udeleženci preteklih olimpijad. V ekipi 43-ih ocenjevalcev so bili tudi slovenci Marko Ljubotina, Mitja Zidar, Žiga Krajnik, Simon Čopar in Tevž Lotrič.

SLIKA 5.
Ivana, Jure in Saša potem, ko so pripravili učilnico na Pedagoški fakulteti za tekmovanje.

Bila je zanimiva izkušnja, a v prihodnosti bi bilo za vse udeležence, še posebej dijake, bolje, če bi olimpijade spet lahko potekale v živo. Najpomembnejši del dogajanja je letos na žalost odpadel: to pa je spoznavanje in živo druženje mladih, ki so si zelo različni po barvi kože in las ter potezah obraza, pa zelo podobni po zanimanju in sposobnostih. Tekmovanje in dokazovanje teh sposobnosti je šele na tretjem mestu. (Na drugem je druženje vodij ekip.)

Če bosta leta 2022 Evropska in Mednarodna fizikalna olimpijada potekali v živo, bo 6. EFO v Ljubljani, 52. MFO pa v Belorusiji.

× × ×

62. mednarodna matematična olimpijada

↓↓↓

Jakob Jurij Snoj

→ **Od 14. do 24. julija 2021 je potekala 62. Mednarodna matematična olimpijada (IMO). Slovensko ekipo so sestavljali Nejc Amon, Lovro Drofenik in Jaka Vrhovnik s I. gimnazije v Celju, Juš Kocutar z II. gimnazije Maribor, Lana Prijon z Gimnazije Bežigrad in Gal Zmazek z Gimnazije Ptuj. Ekipo sva spremljala Gregor Dolinar in Jakob Jurij Snoj. Lovro Drofenik in Nejc Amon sta na tekmovanju osvojila bronasti medalji, Jaka Vrhovnik in Juš Kocutar pa pohvali.**

SLIKA 1.
Grafika IMO2021.

Tekmovanje je bilo že drugo leto zapored organizirano na daljavo v organizaciji Rusije – večina ekip je naloge reševala v svoji državi ob prisotnosti mednarodnih nadzornikov, slovenska ekipa pa je obeležila dolgoletno prijateljstvo s švicarsko ekipo in je v času olimpijade gostovala v Wildhausu v Švici (lani →

→

SLIKA 2.
Fotografija slovenske ekipe.

so njihovi tekmovalci gostovali pri nas na Bledu v Plemljevi vili). Kot običajno so imeli tekmovalci v dveh tekmovalnih dneh na voljo vsakič po 4,5 h časa za reševanje treh od skupaj šestih nalog. V netekmovalnih dneh sta si ekipi krajšali čas predvsem z raziskovanjem narave, med drugim sta se odpravili tudi na celodnevni pohod v Liechtenstein.

Naloge na olimpijadi so bile letos nadpovprečno zahtevne – meja za zlato medaljo, ki je bila letos pri 24 točkah, se običajno giblje pri okoli 30 točkah. Za najbolj presenetljivo se je izkazala naloga št. 2 z dokazovanjem neenakosti, ki je bila izbrana kot srednje zahtevna, a jo je v popolnosti rešilo le 16 tekmovalcev, s čimer se je izkazala za skoraj najzahtevnejšo na tekmovanju. Slovenski tekmovalci so večino svojih točk zbrali pri tradicionalno lažjih nalogah št. 1 iz teorije števil z rahlim kombinatoričnim pridihom in št. 4 iz geometrije. V nadaljevanju bomo predstavili nalogo št. 5, ki ima s pravim navdihom kratko elegantno rešitev. Nalogo je od slovenskih tekmovalcev v celoti rešil Nejc Amon. Besedila ostalih nalog bralci najdejo na spletni strani MMO.

Naloga. Veverici Eva in Vera sta nabrali 2021 orehov za zimo. Vera je oštevilčila orehe od 1 do 2021 in nato skopala 2021 majhnih lukenj, ki so oblikovale krožni vzorec okrog njunega najljubšega drevesa. Naslednje jutro je Vera opazila, da je Eva položila po en oreh v vsako luknjo, vendar se pri tem ni ozirala na oštevilčenje orehov. Vera se je zato odločila, da bo prerazporedila orehe v 2021 zaporednih korakih. V k-tem koraku Vera med seboj zamenja sva oreha, ki sta sosednja orehu, oštevilčenim s številom k.

Dokaži, da obstaja število k, tako da Vera v k-tem koraku zamenja oreha s številoma a in b z lastnostjo $a < k < b$.

Rešitev. Napisali bomo dokaz s protislovjem. Predpostavimo, da takšno število k ne obstaja, torej v vsakem koraku zamenjamo oreha s številkama, ki sta obe večji ali obe manjši od k. Predstavljajmo si, da v k-tem koraku oreh številka k tudi pobarvamo – to na razporeditev seveda ne vpliva. Po predpostavki torej v vsakem koraku zamenjamo dva oreha, ki sta že oba pobarvana ali pa oba še nepobarvana. Zato zamenjava ne spremeni položajev lukenj, v katerih so pobarvani orehi. Predstavljamo si lahko, da v posameznem koraku pobarvamo oreh št. k, barva orehov v ostalih luknjah pa se torej ne spremeni.

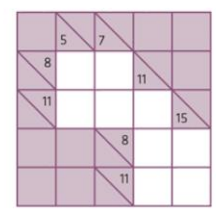
Opazujmo sedaj število parov dveh sosednjih pobarvanih orehov. Na začetku je to število enako 0, na koncu pa 2021. Vsakič, ko pobarvamo en oreh, se to število bodisi ne spremeni (če sta bila oba soseda nepobarvana) bodisi se poveča za 2 (če sta bila oba soseda pobarvana). To število torej ves čas ostaja sodo, kar nas privede do protislovja.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×