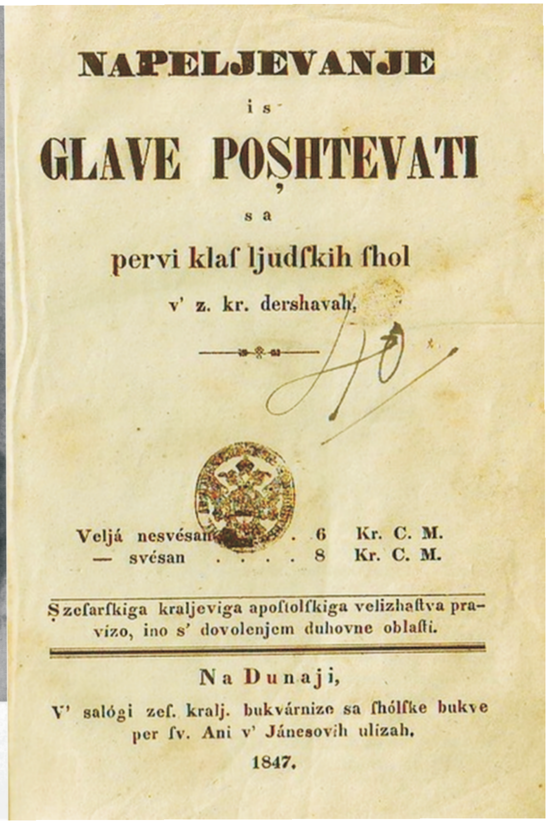
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2014
Letnik 61
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



NAPELJEVANJE

is

GLAVE POSHTEVATI

sa

pervi klaſ ljudſkih ſhol

v' z. kr. dershavah.

Veljá nesvésan	. . . 6	Kr. C. M.
— svésan	 8	Kr. C. M.

Szeſarſkiga kraljeviga apoſtolſkiga velizhaſtva pravizo, ino s' dovolenjem duhovne oblaſti.

Na Dunaji,

V' salógi zeſ. kralj. bukvárnize sa ſhólſke bukve per ſv. Ani v' Jánesovih ulizah.

1847.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2014, letnik 61, številka 6, strani 201–240

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

O NEKI ZVEZI MED RIEMANNOVO FUNKCIJO ZETA IN PRAŠTEVILI

ALEKSANDER SIMONIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 40A30, 11M26

V članku pokažemo, kako lahko vrsto $\sum_p f(p^{-s})$ izrazimo z Riemannovo funkcijo zeta, če je f holomorfna funkcija in vsota teče po vseh praštevilih. V nadaljevanju se ukvarjamo z analitičnimi lastnostmi takih funkcij.

ON SOME RELATION BETWEEN THE RIEMANN ZETA FUNCTION AND PRIMES

In the article we demonstrate how to express the series $\sum_p f(p^{-s})$ in terms of Riemann zeta function, where f is a holomorphic function and summation goes through primes. Next we study analytic properties of such functions.

Uvod

Riemannova funkcija zeta je definirana kot funkcijska vrsta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

kompleksne spremenljivke s. Kot funkcijo realnega parametra jo je obravnaval že **Leonhard Euler** (1707–1783). Njemu tudi pripisujemo odkritje neskončnega produkta za funkcijo $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \tag{2}$$

kjer smo s p označili elemente iz množice praštevil. Kot funkcijo kompleksne spremenljivke pa jo je obravnaval šele **Georg F. B. Riemann** (1826–1866) v članku *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, objavljenem leta 1859. Če označimo $s = \sigma + \mathrm{i}t$, potem je za $\sigma > 1$ vrsta (1) absolutno konvergentna; prav tako velja enakost (2). V članku je Riemann s posebnimi prijemi kompleksne analize in lastnostmi funkcije gama funkcijo (1) analitično razširil na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Kot posledico razširitve je dobil znamenito funkcijsko enačbo

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s). \tag{3}$$

Od takrat so odkrili še precej dokazov enačbe (3). Nekaj od teh jih bo bralec našel v [7, §2].

Z *Eulerjevim produktom* (2) slutimo, da je funkcija ζ povezana s praštevili. In res, na njem sloni *praštevilski izrek*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1,$$

kjer $\pi(x)$ označuje število praštevil, ki ne presegajo x. Ob študiju funkcije zeta in praštevilskega izreka pogosto naletimo na zvezo

$$\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} = \log\zeta(s), \tag{4}$$

ki se pojavlja v dokazu **Jacquesa S. Hadamarda** (1865–1963) in **Charlesa J. G. N. de la Vallée Poussina** (1866–1962), da razširjena funkcija $\zeta(s)$ nima ničel na premici $\sigma = 1$ [7, str. 46] in je eden od ključnih elementov dokaza praštevilskega izreka.

Vprašanje, kje ležijo ničle funkcije $\zeta(s)$, je v tej teoriji zelo pomembno. Naj bo $N(T)$ število ničel funkcije $\zeta(s)$ na območju $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 \le \Re(z) \le 1, 0 < \Im(z) \le T\}$, $N(\sigma_0, T)$ število ničel na območju $\{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) > \sigma_0, 0 < \Im(z) \le T\}$ in $N_0(T)$ število ničel na $\{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) = 1/2, 0 < \Im(z) \le T\}$. Iz enakosti (2) sledi $N(1,T) = 0$ za vsak $T > 0$. Preko funkcijske enačbe (3) opazimo, da so točke $s = -2k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ edine ničle v polravnini $\sigma < 0$. Te ničle imenujemo *trivialne ničle*. Vse preostale *netrivialne ničle* ležijo v pasu $0 < \sigma < 1$. Slovita in še ne rešena *Riemannova domneva* sprašuje, ali vse netrivialne ničle funkcije zeta ležijo na premici $\sigma = 1/2$, kar je z zgornjimi oznakami ekvivalentno trditvi $N(T) = N_0(T)$ za vsak $T > 0$. Takim ničlam pravimo *kritične*. Že Riemann je napovedal naslednjo asimptotično formulo[1] [7, izrek 9.4]

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e} + O(\log T),$$

katere dokaz je leta 1905 podal **Hans C. F. von Mangoldt** (1854–1925). Angleški matematik **Godfrey H. Hardy** (1877–1947) je v prid Riemannovi domnevi leta 1914 dokazal, da je kritičnih ničel neskončno mnogo. Sedem let kasneje je v sodelovanju z **Johnom E. Littlewoodom** (1885–1977) dokazal, da obstajata konstanti $A, T_0 > 0$, tako da velja

$$N_0(T) > AT \tag{5}$$

[1] Oznaka $f(x) = O(g(x))$ za realni funkciji f, g, definirani na neki domeni $D \subseteq \mathbb{R}$, pomeni, da obstaja konstanta $C > 0$, da velja $|f(x)| \le Cg(x)$ za vse $x \in D$.

za vse $T > T_0$ [7, izrek 10.7]. **Harald A. Bohr** (1887–1951) in **Edmund G. H. Landau** (1877–1938) sta leta 1914 dokazala [7, izrek 9.15(A)]

$$N(\sigma, T) = O(T) \tag{6}$$

za vsak fiksen $\sigma > 1/2$. To je izboljšana Riemann-von Mangoldtova formula za primer tistih morebitnih ničel, ki ležijo desno od kritičnih.

Preko (4) se da izpeljati

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \log \zeta(sn), \tag{7}$$

kjer se vrsta na levi imenuje *praštevilska funkcija zeta*, $\mu(n)$ pa je *Möbiusova funkcija*, imenovana po nemškem matematiku **Augustu F. Möbiusu** (1790–1868).

V članku bomo posplošili zvezo (4) oz. (7) na primer sumacije $f(p^{-sn})/n$ oz. $f(p^{-s})$, kjer je $f(z)$ holomorfna funkcija v okolici 0, za katero velja $f(0) = 0$. V nadaljevanju bomo z uporabo podobnih ocen kakor (5) in (6) raziskali analitične lastnosti funkcije $\sum_p f(p^{-s})$.

Prva posplošitev

Naj bo $f(z)$ holomorfna funkcija na domeni $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, ki vsebuje točko 0, in naj velja $f(0) = 0$. Vemo, da se funkcijo lahko zapiše v obliki potenčne vrste

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{8}$$

s konvergenčnim radijem $\mathrm{R}(f)$.

Lema 1. *Naj bo $f(z)$ oblike* (8) *s konvergenčnim radijem* $\mathrm{R}(f)$. *Potem za $|z| < \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$ velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} -a_n \log(1 - z^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z^n)}{n}. \tag{9}$$

Dokaz. Spomnimo se znane potenčne vrste

$$-\log(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \tag{10}$$

ki konvergira za $|z| < 1$. Radi bi pokazali, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} -a_n \log(1 - z^n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n \frac{z^{mn}}{m} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^{mn}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z^n)}{n}$$

za $|z| < \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$. Prvi in tretji enačaj sledita iz definicije dvakratnih vrst in definicije funkcije $f(z)$, torej je treba dokazati veljavnost drugega enačaja. Izberimo poljuben $|z_0| < \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$. *Cauchyjev izrek o dvakratnih vrstah* [6, str. 143] nam zagotavlja, da je dovolj preveriti konvergenco druge vrste v z_0, pri kateri zamenjamo člene z absolutnimi vrednostmi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |a_n| \frac{|z_0|^{mn}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} -|a_n| \log(1 - |z_0|^n). \tag{11}$$

Naj bo $N \in \mathbb{N}$ tak, da je $|z_0|^N < 1/2$. Ker za $|z| < 1/2$ velja ocena

$$|\log(1 + z)| \leq 2|z|, \tag{12}$$

sledi

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| |\log(1 - |z_0|^n)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} 2|a_n||z_0|^n.$$

Majoranta konvergira, saj je $|z_0| < \mathrm{R}(f)$. S tem konvergira tudi dvakratna vrsta (11). Enakost (9) je s tem dokazana. ■

Neposredno iz (1) za $\sigma > 1$ sledi

$$|\zeta(s) - 1| \leq \zeta(\sigma) - 1.$$

To pomeni, da slika polravnine $\sigma > 2$ funkcije $\zeta(s)$ leži v enotskem disku s središčem v 1. To dejstvo zagotavlja obstoj holomorfne funkcije $\log \zeta(s)$ na območju $\sigma > 2$. Iz (2) za $\sigma > 1$ sledi

$$\log \zeta(s) = -\sum_{p} \log(1 - p^{-s}). \tag{13}$$

Fiksirajmo $\sigma_0 > 1$. Z uporabo ocene (12) dobimo

$$\sum_{p} |\log(1 - p^{-s})| \leq \sum_{p} 2p^{-\sigma_0} < \infty$$

za vse $\sigma > \sigma_0$. *Weierstrassov M-kriterij* nam pove, da vrsta v (13) konvergira enakomerno na kompaktih na območju $\sigma > 1$, zato je na tem območju holomorfna funkcija. Torej je funkcija $\log \zeta(s)$, definirana s (13), holomorfna na polravnini $\sigma > 1$.

Opazimo lahko, da nam kombinacija enačb (10) in (13) da enakost (4). Naslednjo trditev imamo lahko za posplošitev te enakosti, saj jo dobimo s postavitvijo $f(z) = z$.

Trditev 2. *Naj bo $f(z)$ oblike* (8) *in $s = \sigma + \mathrm{i}t$. Potem na polravnini $\sigma > \chi(f)$, kjer je*

$$\chi(f) := \begin{cases} 1, & \mathrm{R}(f) \geq 1/2 \\ -\log_2 \mathrm{R}(f), & \mathrm{R}(f) \leq 1/2, \end{cases}$$

velja enakost

$$\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f\left(p^{-sn}\right)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log \zeta(sn). \tag{14}$$

Če obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da je $a_n = 0$ za vsak $n < N$, potem zgornja enakost velja na polravnini $\sigma > N^{-1}\chi(f)$. Funkcija, ki jo določa dvakratna vrsta, je na tem območju holomorfna.

Dokaz. Fiksirajmo $\sigma_0 > \chi(f)$. Potem je $|p^{-s}| \leq 2^{-\chi(f)} \leq \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$ za vse $\sigma > \sigma_0$ in vsa praštevila p. Zato lahko uporabimo lemo 1 za $z = p^{-s}$ in dobimo

$$\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f\left(p^{-sn}\right)}{n} = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log \frac{1}{1 - p^{-sn}}.$$

Iz enakosti (13) dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_p a_n \log \frac{1}{1 - p^{-sn}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log \zeta(sn).$$

Če pokažemo, da zgornja dvakratna vrsta, pri kateri zamenjamo člene z absolutnimi vrednostmi, konvergira za vsak $\sigma > \sigma_0$ in je majoranta odvisna le od σ_0, bo sledila enakost (14) in holomorfnost funkcije, ki jo določa ta dvakratna vrsta. Ker je

$$\sum_p |a_n| |\log(1 - p^{-sn})| \leq 2|a_n| \sum_p p^{-\sigma n} \leq 2|a_n|(\zeta(\sigma_0 n) - 1),$$

dobimo oceno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_p |a_n| |\log(1 - p^{-sn})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 4|a_n| 2^{-\sigma_0 n},$$

kjer smo upoštevali $\zeta(\sigma_0 n) - 1 < 2^{1-\sigma_0 n}$. Majoranta konvergira in je odvisna le od σ_0. Če obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da je $a_n = 0$ za vsak $n < N$, potem seštevamo v (14) šele od $n = N$ naprej. Zgoraj dokazano bo veljalo za tiste s, pri katerih je $N\sigma > \chi(f)$. ∎

Druga posplošitev

Oglejmo si naslednji problem. V dokazu leme 1 smo dokazali absolutno konvergenco dvakratne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n \frac{z^{mn}}{m}. \tag{15}$$

Seštevali smo po vrsticah in stolpcih, vendar lahko zaradi absolutne konvergence v kateremkoli vrstnem redu. Poskusimo sešteti vrsto (15) tako, da ponovno dobimo potenčno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z^n)}{n} = a_1 z + \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2\right) z^2 + \frac{1}{3}\left(a_1 + 3a_3\right) z^3 + \frac{1}{4}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4\right) z^4 + \cdots$$

Opazimo, da lahko vrsto strnemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(z^n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n, \quad \text{kjer je} \quad A_n = \sum_{d|n} \frac{d}{n} a_d.$$

Ta vrsta pomeni novo funkcijo, recimo ji $F(z)$. Po trditvi 2 vemo, da na polravnini $\sigma > \chi(f)$ velja

$$\sum_{p} F(p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \log \zeta(sn)$$

in funkcija, ki jo določa vrsta po praštevilih, je na tem območju holomorfna. V tem primeru imamo koeficiente a_n dane, računamo pa koeficiente A_n nove vrste, ki pomeni funkcijo $F(z)$. Vendar bi se radi problema lotili z druge strani. Denimo, da imamo funkcijo $F(z)$ že zapisano v potenčni vrsti. Bi znali določiti koeficiente a_n? Odgovor se skriva v t. i. *Möbiusovi inverzni formuli*.

Möbiusova funkcija $\mu(n)$ je za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirana z

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n = \text{produkt } k \text{ različnih praštevil} \\ 0, & n \text{ je deljiv s kvadratom kakšnega praštevila.} \end{cases}$$

Möbiusova funkcija je primer *aritmetične funkcije*, to so funkcije, definirane na množici naravnih števil. Osnovna lastnost funkcije $\mu(n)$ je podana v naslednji lemi:

Lema 3. *Za vsako naravno število n velja*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1. \end{cases}$$

Dokaz. Za $n = 1$ je po definiciji $\mu(1) = 1$. Naj bo $n > 1$. Po osnovnem izreku aritmetike lahko pišemo $n = \prod_{p|n} p^{v_p(n)}$. K zgornji vsoti prispevajo samo tisti delitelji števila n, ki imajo v praštevilskem razcepu potence 1. Torej sestavljajo množico deliteljev kombinacije brez ponavljanja množice $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} := \{p \colon p|n\}$. Potem imamo

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 + \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} = (1-1)^k = 0. \qquad \blacksquare$$

Izrek 4 (Möbiusova inverzna formula). *Naj bosta $f(n)$ in $g(n)$ poljubni aritmetični funkciji. Potem velja*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Dokaz. Pišemo lahko

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{q|d} f(q).$$

Za $q = n$ je $d = n$, zato je v vsoti le en člen $\mu(1)f(n) = f(n)$. Naj bo sedaj $q < n$. Imamo $d = lq$, kjer l deli n/q. Potem je koeficient pred $f(q)$ enak

$$\sum_{l|n/q} \mu\left(\frac{n/q}{l}\right),$$

kar je enako 0 po lemi 3.

Nasprotno smer dokažemo podobno, zato dokaz prepuščamo bralcu. $\blacksquare$

Sedaj smo pripravljeni na naslednji izrek, ki posplošuje zvezo (7).

Izrek 5. *Naj bo $f(z)$ oblike* (8), *$s = \sigma + \mathrm{i}t$ in $\chi(f)$ iz trditve 2. Potem na polravnini $\sigma > \chi(f)$ velja enakost*

$$\sum_{p} f(p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \log \zeta(sn), \quad \textit{kjer je} \quad A_n = \sum_{d|n} \frac{d}{n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) a_d.$$

Če obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da je $a_n = 0$ za vsak $n < N$, potem zgornja enakost velja na polravnini $\sigma > N^{-1}\chi(f)$. Funkcija, ki jo določa vrsta po praštevilih, je na tem območju holomorfna.

Dokaz. Naj bo $g(n) := A_n$ in $h(d) := (d/n)a_d$. Iz zveze v izreku 5 med a_n in A_n in Möbiusove inverzne formule dobimo $a_n = \sum_{d|n}(d/n)A_d$. Zato preostane dokazati, da za vrsto $F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$ velja $\chi(F) \leq \chi(f)$.

Ker je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n||z|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n} \frac{d}{n}|a_d||z|^n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |a_n|\frac{|z|^{mn}}{m},$$

vrsta za $F(z)$ konvergira za $|z| < \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$. Torej je $\mathrm{R}(F) \geq \min\{1, \mathrm{R}(f)\}$ in s tem $\chi(F) \leq \chi(f)$. ■

Z uporabo izreka 5 na funkciji $f(z) = z$ dobimo izraz (7). Podobne izraze dobimo tudi z uporabo drugih aritmetičnih funkcij.

Primer 1. Ker je $z(1-z)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$, po izreku 5 sledi

$$\sum_p \frac{1}{p^s - 1} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{d}{n}\log\zeta(sn)$$

za $\sigma > 1$. Izraz na desni strani lahko poenostavimo. Eulerjeva funkcija $\varphi(n)$ pri vsakem naravnem številu n prešteje tista števila $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, za katera sta k in n tuji si števili. Več v [1, str. 28]. Izkoristili bomo dejstvo, da je

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Po izreku 4 sledi

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\frac{d}{n}.$$

◊

Posledica 6. *Naj bo $f(z)$ holomorfna funkcija v okolici točke 0, $s = \sigma + \mathrm{i}t$ in $\chi(f)$ iz trditve 2. Dodatno naj velja še: f nima ničel, $f(0) = 1$ in*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Potem na polravnini $\sigma > \chi(f)$ velja

$$\prod_p f(p^{-s}) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\zeta(sn)\right)^{A_n}, \quad \textit{kjer je} \quad A_n = \sum_{d|n} \frac{b_{d-1}}{n}\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Dokaz. Ker je $f(z)$ holomorfna funkcija brez ničel na enostavno povezani domeni $\Omega \ni 0$, obstaja holomorfna funkcija $g(z)$, za katero velja $g'(z) \equiv f'(z)/f(z)$ na Ω. Ker je

$$\left(\frac{\exp(g(z))}{f(z)}\right)' = \frac{(g'(z)f(z) - f'(z))\exp(g(z))}{f(z)^2} = 0$$

za vsak $z \in \Omega$, sledi $f(z) = C \cdot \exp(g(z))$ za neko konstanto C. Po predpostavki posledice imamo $g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. To pomeni

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} z^n.$$

Ker je $g(0) = 0$, po predpostavki posledice sledi $C = f(0) = 1$. Uporabimo izrek 5 na funkciji $g(z)$ in dobimo

$$\sum_p g(p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \log \zeta(sn) \tag{16}$$

za $s \in \Omega$, kjer je $A_n = \sum_{d|n} (b_{d-1}/n) \mu\,(n/d)$. Na obeh straneh enačbe (16) eksponiramo in upoštevamo $\exp g(p^{-s}) = f(p^{-s})$. ∎

Pogoju $f(0) = 1$ se ne moremo izogniti, saj bi bil v nasprotnem primeru produkt po praštevilih divergenten. Potrebni pogoj za konvergenco neskončnega produkta $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ je $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Z uporabo posledice 6 na funkciji $f(z) = (1 - z)^{-1}$ dobimo

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1, \end{cases}$$

kjer smo si za izračun vsote pomagali z lemo 3. Dobili smo Eulerjev produkt (2).

Primer 2. Posledico 6 bomo uporabili na produktu

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p(p-1)}\right).$$

Število $C_{\text{Artin}} \approx 0{,}3739558$, ki pomeni vrednost zgornjega produkta, imenujemo *Artinovo število*. Izrazili ga bomo s produktom funkcije zeta. Ob upoštevanju oznak iz posledice 6 imamo $f(z) = (1 - z - z^2)(1 - z)^{-1}$ in s tem

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{\alpha_1 - z} - \frac{1}{\alpha_2 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_1^{n+1} + \alpha_2^{n+1}}{(\alpha_1\alpha_2)^{n+1}}\right) z^n,$$

kjer sta α_1 in α_2 rešitvi kvadratne enačbe $z^2 + z - 1 = 0$. Torej $(\alpha_1\alpha_2)^n = (-1)^n$ in

$$\alpha_1^n + \alpha_2^n = (-1)^n \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) = (-1)^n L_n,$$

kjer smo z L_n označili n-to *Lucasovo število*[2] (**François E. A. Lucas** (1842–1891)). Dognali smo $b_n = 1 - L_{n+1}$ in

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} (1 - L_d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Ker je $f(z)$ holomorfna funkcija na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, je $\mathrm{R}(f) = 1$ in s tem $\chi(f) = 1$. Funkcija $f(z)$ je na $\sigma > 1$ brez ničel, velja še $f(0) = 1$ in $a_1 = 0$. Zato lahko uporabimo posledico 6 za $\sigma = 1$ ter tako dobimo

$$C_{\mathrm{Artin}} = \prod_{n=2}^{\infty} \left(\zeta(n)\right)^{\sum_{d|n} \frac{L_d}{n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)}.$$

Za vsako praštevilo $p \notin \{2, 5\}$ je ulomek $1/p$ periodičen in dolžina periode deli število $p-1$. Obstajajo praštevila p, za katera je dolžina periode ulomka $1/p$ enaka $p - 1$. Tak ulomek je npr. $1/7 = 0{,}\overline{142857}$. **Emil Artin** (1898–1962) je postavil domnevo, da je gostota takih praštevil ravno število C_{Artin}. $\diamondsuit$

Problem analitičnega nadaljevanja

Naj bo $f(z)$ oblike (8), $s = \sigma + it$ in $\chi(f)$ iz trditve 2. Po izreku 5 imamo

$$\tilde{f}(s) := \sum_p f(p^{-s}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \log \zeta(ns), \tag{17}$$

[2]Lucasova števila so definirana rekurzivno s predpisom $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$ in začetnima pogojema $L_1 = 1$ ter $L_2 = 3$. Več v [3, str. 426].

kjer so koeficienti A_n določeni s funkcijo f. Vrsta po praštevilih konvergira na polravnini $\sigma > \chi(f)$ in $\tilde{f}$ je tam holomorfna funkcija. Po drugi strani pa desna vrsta konvergira na polravnini $\sigma > 0$, razen na neki podmnožici

$$\mathcal{S} \subseteq \{\sigma > 0\colon \exists n \in \mathbb{N}.\ \zeta(ns) = 0 \vee ns = 1\}.$$

Zato lahko $\tilde{f}$ analitično razširimo na $\sigma > 0$ z izoliranimi singularnostmi v $\mathcal{S}$. Namen tega razdelka je odgovoriti na vprašanje: ali bi lahko $\tilde{f}$ analitično nadaljevali preko premice $\sigma = 0$?

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednja izreka, ki podajata boljše ocene kakor (5) in (6).

Izrek 7 ([4, §2.1.2]). *Naj bo $\varepsilon > 0$ in $H \geq T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Obstajata konstanti $A(\varepsilon), T_0(\varepsilon) > 0$, da je $N_0(T+H) - N_0(T) > A(\varepsilon)H$ za vse $T > T_0(\varepsilon)$.*

Izrek 8 ([5, str. 128]). *Za $\sigma \in [1/2, 1]$ in $T \geq 2$ velja*

$$N(\sigma, T) = O\left(T^{4\sigma(1-\sigma)} \log^{13} T\right).$$

Iz izreka 8 lahko sklepamo, da za poljuben $\sigma \in (1/2, 1]$ velja $N(\sigma, T) = o(T)$, kar pomeni $\lim_{T\to\infty} T^{-1}N(\sigma, T) = 0$. Kombinacija zgornjih izrekov nam da

Lema 9. *Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $T_0(\varepsilon)$, da vsaj ena premica skozi izhodišče vsebuje vsaj eno ničlo funkcije $\zeta(s)$ v pravokotniku*

$$\mathcal{R}(\varepsilon, T) := \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < \Re(z) < 1, (1-\varepsilon)T < \Im(z) < (1+\varepsilon)T\}$$

in nobene ničle zunaj $\mathcal{R}(\varepsilon, T)$ za vse $T > T_0(\varepsilon)$.

Dokaz. Po izreku 7 za $H \geq T^{\frac{3}{4}}$ obstajata konstanti $A, T_0 > 0$, da je $N_0(T + H) - N_0(T) > AH$ za vsak $T > T_0$. Naj bo $T_1(\varepsilon) > 0$ taka konstanta, da bo $2\varepsilon T > ((1-\varepsilon)T)^{\frac{3}{4}}$ za vse $T > T_1(\varepsilon)$. Potem $N_0((1+\varepsilon)T) - N_0((1-\varepsilon)T) > 2A\varepsilon T$ za vse $T > \max\{T_0, T_1(\varepsilon)\}$. Ker pa po izreku 8 za poljuben $\sigma \in (1/2, 1]$ velja $N(\sigma, 2(1+\varepsilon)T) = o(T)$, obstaja premica z zahtevanimi lastnostmi. ∎

Recimo, da je množica $\{n \in \mathbb{N}\colon A_n \neq 0\}$ končna. Potem ima desna vrsta v izrazu (17) končno mnogo členov. Množica singularnosti $\mathcal{S}$ je neskončna, vendar nima stekališč na $\mathbb{C}$. Zato se v tem primeru da $\tilde{f}$ analitično razširiti preko premice $\sigma = 0$ na cel $\mathbb{C}$, razen na neki množici izoliranih singularnosti. Zato se bomo osredotočili na primer, ko je množica $\{n \in \mathbb{N}\colon A_n \neq 0\}$ neskončna.

Švedski matematik **Germund Dahlquist** (1925–2005), znan predvsem po delu na področju numerične analize, je podal odgovor na uvodno vprašanje.

Izrek 10 ([2]). *Če je množica $\{n \in \mathbb{N} \colon A_n \neq 0\}$ neskončna, se funkcije $\tilde{f}(s)$ ne da analitično nadaljevati preko premice $\sigma = 0$.*

Analitično jedro dokaza izreka 10 je lema 9. Preostali del dokaza je elementaren, toda bolj tehnične narave, zato ga bomo izpustili. Vseeno pa bomo nakazali, kje se skriva originalna Dahlquistova ideja v dokazu.

Za trenutek privzemimo veljavnost Riemannove domneve. Naj bosta $\varepsilon, T > 0$ poljubni fiksni števili in $T_0(\varepsilon)$ konstanta iz leme 9. Naj bo N tako naravno število, da je $NT > T_0(\varepsilon)$ in $A_N \neq 0$. Takih števil N je neskončno. Potem obstaja ničla $\rho = \frac{1}{2} + it$ funkcije ζ, za katero velja $(1 - \varepsilon)NT < t < (1 + \varepsilon)NT$. Sledi $\rho/N \in \mathcal{R}(\varepsilon, T)$ in $\rho/N \in \mathcal{S}$. Dobili smo neskončno zaporedje singularnosti s stekališčem na premici $\sigma = 0$. Ker je bil ε poljuben, imamo lahko za stekališče vrednost T, ki pa je prav tako poljubna. Ugotovili smo, da je premica $\sigma = 0$ naravni rob funkcije $\tilde{f}$. To je leta 1900 opazil nizozemski matematik **Jan C. Kluyver** (1860–1932) pri praštevilski funkciji zeta (7).

Brez privzetka o veljavnosti Riemannove domneve se lahko zgodi, da obstajata ničli ρ_1, ρ_2 in naravni števili N_1, N_2, tako da je $\rho_1/N_1 = \rho_2/N_2$. Če dodatno velja še $A_{N_1}\operatorname{st}(\rho_1) + A_{N_2}\operatorname{st}(\rho_2) = 0$ in sta to edini ničli na premici skozi izhodišče, potem ρ_1/N_1 ni singularnost funkcije $\tilde{f}$. Kluyverjeva opazka je Landaua in njegovega učenca **Arnolda Walfisza** (1892–1962) vzpodbudila, da sta leta 1919 brez privzetka o veljavnosti Riemannove domneve dokazala, da ima funkcija (7) naravni rob $\sigma = 0$. Da bi se izognila zgornjemu problemu, sta uporabila posebne lastnosti koeficientov $\mu(n)/n$ (bralec lahko reproduciran dokaz najde v [7, §9.5]). Prav zaradi tega njunega dokaza ne moremo posplošiti na poljubne koeficiente A_n. Dahlquist je ta problem rešil z lemo [2, lema 3.2].

LITERATURA

[1] J. Bračič, *Uvod v analitično teorijo števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2003.

[2] G. Dahlquist, *On the analytic continuation of Eulerian products*, Ark. Mat. **36** (1952), 533–554.

[3] J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.

[4] A. A. Karatsuba, *Complex analysis in number theory*, Boca Raton, CRC Press, 1995.

[5] A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, De Gruyter Expositions in Mathematics 5, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[6] K. Knopp, *Theory and application of infinite series*, Dover publications, New York, 1990.

[7] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

NOBELOVA NAGRADA ZA FIZIKO 2014 IN REVOLUCIJA V OSVETLJEVANJU

MARKO ZGONIK

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
Institut »Jožef Stefan«

PACS: 01.75.+m, 85.60.Jb, 42.72.-g

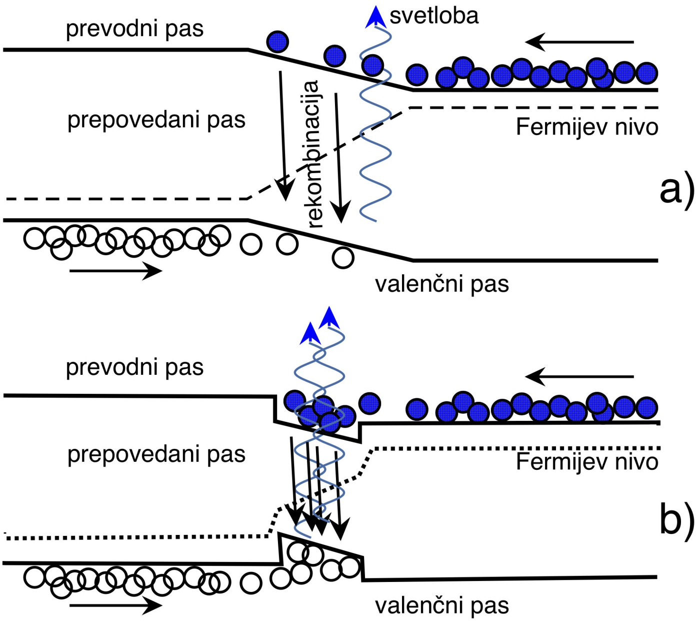
Isamu Akasaki in Hiroshi Amano z Univerze v Nagoji ter Shuji Nakamura, ki je deloval v podjetju Nichia Chemicals na Japonskem, sedaj pa je profesor v ZDA, so letošnji Nobelovi nagrajenci za fiziko. Članek opiše pot do izdelave modre LED na osnovi GaN. Posebej uporabna pa je modra LED v kombinaciji s fluorescenčno pretvorbo v belo svetlobo. Tako smo dobili izvor bele svetlobe, ki je učinkovit, ima dolgo življenjsko dobo in je okolju prijazen.

NOBEL PRIZE IN PHYSICS 2014 AND LIGHTING REVOLUTION

Isamu Akasaki and Hiroshi Amano from Nagoya University and Shuji Nakamura, formerly from a Japanese company Nichia Chemicals, at present a professor in the U.S.A., were awarded the 2014 Nobel Prize in Physics. The article describes the pathway to the invention of blue LED based on GaN. Fluorescent conversion of the blue emission into the white light makes blue LEDs especially versatile. The new white light source is efficient, durable and environmentally friendly.

Letošnja nagrada za fiziko je bila podeljena za široko uporaben izdelek, to je modro svetlečo diodo, ki je omogočila izdelavo novih, energijsko varčnih izvorov bele svetlobe, ki so tudi prijazni do okolja in imajo dolgo življenjsko dobo. Nagrado so si razdelili trije raziskovalci, Isamu Akasaki in Hiroshi Amano z Univerze v Nagoji ter Shuji Nakamura, ki je deloval v podjetju Nichia Chemicals na Japonskem, sedaj pa je professor v ZDA [8].

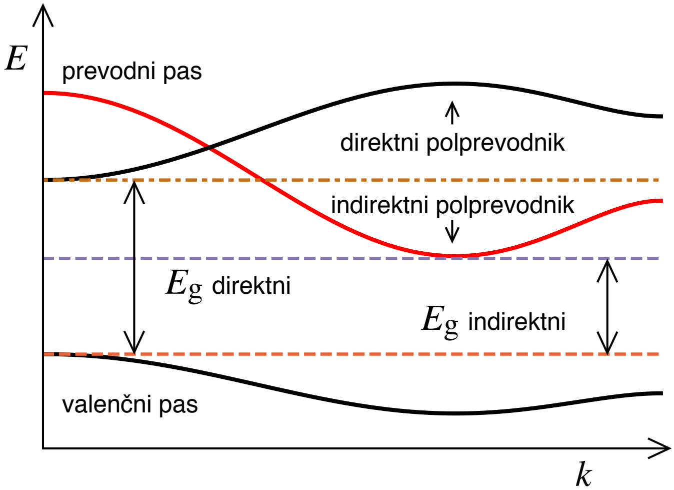
Nagrajeno odkritje je izrazito tehnične narave in še en primer, kako uporabni so polprevodniki in kako daleč je mogoče izpopolnjevati njihovo tehnologijo. Podobno, kot velja za silicij Mooreov zakon – podvojitev gostote tranzistorjev vsaki dve leti – naj bi za svetleče diode veljal Haitzev zakon [9]. Ta predvideva, da se cena enega lumna (lm) svetlobne energije zniža na eno desetino vsakih deset let. V Evropi porabimo za razsvetljavo približno 20 % vse proizvedene električne energije. Razmerje med učinkovitostjo modernih izvorov in klasičnih žarnic je več kot 4, in tako ni presenetljivo, da je Evropska komisija leta 2009 [10] začela uvajati ukrepe, ki postopno prepovedujejo prodajo klasičnih žarnic, ki naj jih delno nadomeščajo halogene žarnice, predvsem pa varčne fluorescenčne in LED sijalke. Neposredna prednost LED pred fluorescentnimi sijalkami je njihov izsev v polprostor in večja svetlost. S tem je povezana možnost usmerjanja in doseganje svetilnosti,



Slika 1. V *pn* spoju, skozi katerega teče tok v prevodni smeri, se rekombinirajo elektroni in vrzeli, pri tem pa lahko dobimo fotone z energijo, približno enako širini energijske reže. a) enojni *pn* spoj, b) dvojni spoj (heterostruktura) z vmesnim polprevodnikom z manjšo energijsko režo, ki deluje kot enodimenzionalna kvantna jama, v kateri se močno poveča koncentracija nosilcev naboja.

kakršno sicer dosegamo s halogenimi reflektorskimi žarnicami z desetkrat večjo porabo električne energije.

Raziskave polprevodniških izvorov svetlobe so se začele že kmalu po odkritju tranzistorja. Rekombinacija elektrona in vrzeli, pri čemer se izseva foton, je idealni mehanizem pretvorbe električne energije v svetlobo. Tako rekombinacijo lahko preprosto dosežemo v polprevodniški diodi, ki jo napajamo v prevodni smeri, kar shematično prikazuje slika 1. V *pn* spoju je treba poskrbeti, da so drugi mehanizmi rekombinacije manj verjetni. Hitro so ugotovili, da so za ta namen potrebni direktni polprevodniki, to so tisti, pri katerih imata elektron z najnižjo energijo v prevodnem pasu in vrzel z najvišjo energijo v valenčnem pasu enaki gibalni količini. Razlog je v zanemarljivi gibalni količini fotona, pri procesu rekombinacije pa se ohranjata tako energija kot gibalna količina. Odvisnost energije elektronov od valovnega vektorja je shematično prikazana na sliki 2. Tehnologija silicija je izredno razvita, vendar je Si indirektni polprevodnik in torej ne ustreza temu pogoju. Kljub temu raziskovalci še danes poskušajo vse mogoče, da bi izdelali svetlobni izvor na tej osnovi.



Slika 2. Shema energije elektronov v odvisnosti od velikosti valovnega vektorja v določeni smeri. Za prevodni pas sta prikazani dve odvisnosti, ki ponazarjata direktne in indirektne polprevodnike. V *pn* spoju se srečajo elektroni z minimalno in vrzeli z maksimalno energijo. V direktnih polprevodnikih je možna rekombinacija z izsevanjem fotona, v indirektnih pa je potrebna še ena ekscitacija, npr. fonon, da je v procesu zadoščeno ohranitvi gibalne količine.

Med direktne polprevodnike sodijo mešani kristali iz 3. in 5. skupine elementov, ki jim pravimo III–V polprevodniki. GaAs z energijsko režo 1,4 eV je bil prvi med njimi, katerega tehnologija se je začela hitro razvijati v šestdesetih letih predvsem zaradi obljub o hitrejši elektroniki. Leta 1962 so prvič izmerili emisijo infrardeče svetlobe iz *pn* spoja v GaAs [5]. III–V kristali, v katerih sta V elementa As in P, so postali osnova LED diod vse od infrardečega do zelenega dela spektra. Z mešanjem As in P ter kovin Al, Ga in In je namreč mogoče poljubno izbrati energijsko režo in s tem valovno dolžino LED. V letu 1962 so izdelali tudi prvi laser na tej osnovi, ki je najprej deloval le pri temperaturi tekočega dušika (77 K). Razvoj polprevodniških heterostruktur, za katere sta leta 2000 Z. I. Alferov in H. Kroemer dobila Nobelovo nagrado, je omogočil boljšo kontrolo prostora, v katerem se rekombinirajo elektroni in vrzeli. S tem so zmanjšali izgube in prag laserskega delovanja. Laserske diode na osnovi mešanih kristalov GaAsP, ki delujejo pri sobni temperaturi, pa so postale široko uporabne.

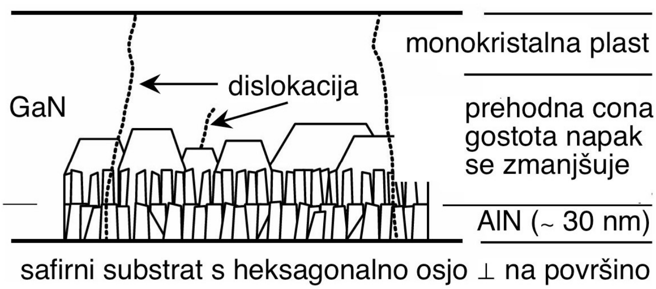
Iskanje materialov s širšo energijsko režo, ki jih je mogoče dopirati, se je nadaljevalo. Izkazalo se je, da je ta naloga precej zapletena. Možnost *p* in *n* dopiranja je postala osnova za razlikovanje med polprevodniki in izolatorji. Kandidata za izdelavo modre LED sta bila v začetku kristala ZnSe in SiC, oba indirektna polprevodnika in zato z nizkimi izkoristki. Dušikovi spojini

GaN in AlN sta direktna polprevodnika z energijskima režama 3,4 in 6,5 eV in so zato njune zlitine primerne za LED z valovnimi dolžinami od 400 do 200 nm. Material tudi ni strupen, kar ga loči od mnogih drugih III–V in II–VI polprevodnikov.

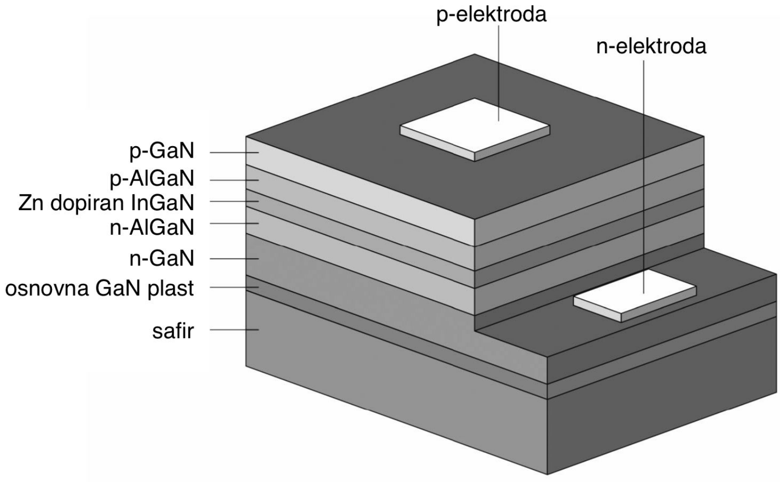
Gojenje tankih kvalitetnih kristalnih plasti GaN na substratu iz safirja je prvič uspelo Akasakiju in sodelavcem leta 1986 [1]. Tehnologija rasti je bila tako imenovana MOVPE (metalorganic vapour phase epitaxy). Safir je relativno poceni v primerjavi s SiC, ki je sicer boljši substrat, saj se njegova mrežna konstanta bolj sklada z mrežno konstanto GaN. Uspešno rast na safirju so dosegli v več korakih, prikazanih na sliki 3. Najprej so nanesli tanko (30 nm) polikristalno plast AlN pri temperaturi 500 °C in jo potem segreli na 1000 °C. Pri tem se je plast prekristalizirala tako, da so se kristalčkom uredile heksagonalne osi. Na tej plasti je uspešno rastel GaN, sprva sicer z mnogimi dislokacijami, po nekaj μm rasti pa se je gostota napak zelo zmanjšala in dobili so kvalitetno kristalno površino, na katero so lahko naprej nanašali večplastne strukture ustrezno dopiranega GaN, kakršne so potrebne za izdelavo LED.

Tudi probleme z dopiranjem so rešili po mnogih poskusih. Izdelava *p*-tipa polprevodnika s široko režo je vedno težavna naloga, saj se poleg namernega dopiranja v prepovedanem pasu pojavi še vrsta drugih elektronskih nivojev, ki so posledica napak v strukturi in nenamernega onesnaženja kristalov. Prve plasti *p*-GaN so uspešno naredili Amano, Akasaki in sodelavci z Mg dopiranjem, plast pa so dodatno obsevali z nizkoenergijskimi elektroni [2]. Nakamura je kasneje razložil mehanizem aktivacije donorjev Mg in Zn, ki pri nizkih temperaturah tvorijo nevtralne komplekse z vodikom. Elektroni, UV osvetljevanje in v primeru GaN tudi popuščanje pri visoki temperaturi pa te komplekse disociirajo in aktivirajo akceptorje [3].

Tehnologijo heterostruktur *p*-dopiranih zlitin AlGaN in InGaN, kakršne so potrebne za izdelavo učinkovitih svetlobnih izvorov, sta obe skupini



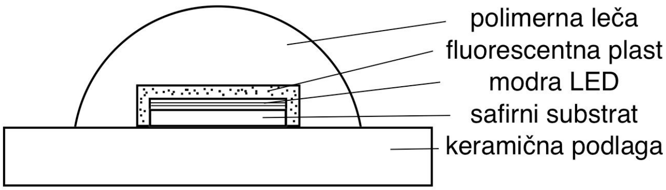
Slika 3. Priprava podlage za izdelavo GaN LED.



Slika 4. Struktura modre LED z dvojno heterostrukturo na osnovi InGaN-AlGaN.

potem hitro izboljševali. Pri tem so se Nakamura in sodelavci osredotočili na kombinaciji InGaN/GaN in InGaN/AlN, s katerima so izdelovali heterostrukture in kvantne jame. S strukturo, prikazano na sliki 4, so v letu 1994 dosegli kvantni izkoristek 2,7 % [2]. Ta dosežek je nakazal nadaljnjo pot in v naslednjih dveh letih sta obe skupini izdelali prototipe modrih laserskih diod. LED in laserske diode z valovnimi dolžinami v modro vijoličnem delu spektra so postopoma postajale vse dostopnejše. Naslednji korak v razvoju pa bodo polprevodniški izvori v UV področju, kjer se je z AlN mogoče približati valovni dolžini 200 nm [7].

LED diode so tehnološko manj zahtevne od laserjev, saj nimajo praga delovanja in so koristni že spontano izsevani fotoni. Težava z izkoristkom LED pa je v tem, da je spontano sevanje izotropno porazdeljeno in je v zrak izsevan le majhen delež, preostala svetloba pa se odbije na meji polprevodnik/zrak. Ta omejitev je posebej huda zaradi velikega lomnega količnika polprevodniških materialov, npr. 3,5 v GaAs pri valovni dolžini 1 μm oziroma 2,5 v GaN pri 450 nm. Iz kvadra GaN tako lahko pobegne v zrak le svetloba znotraj stožcev, ki jih omejuje kot totalnega odboja 22 stopinj, pa še ta svetloba se delno odbije na meji. Skozi eno ravno golo ploskev tako preide le 3 % svetlobe. Ker je geometrija *pn* spoja vedno planarna, je treba stranske dimenzije LED zmanjšati in omogočiti izsev v ravnini spoja, vse skupaj prekriti s polimerom z visokim lomnim količnikom in ga oblikovati v ustrezno lečo. Še večji izkoristek pa doseže modra LED dioda v kombinaciji s fluorescenčno pretvorbo v belo svetlobo. Na sliki 5 je prikazana shema bele LED diode z visokim izkoristkom. Kot totalnega odboja na meji med polprevodnikom in polimerom z razpršenim fluorescentnim prahom je pove-



Slika 5. Shema bele LED s povečanim izkoristkom in tehnologijo COB (Chip On Board). Tipično je na podlago nameščenih več takih elementov

čan zaradi velikega lomnega količnika polimera, zmanjša se odbojnost meje in tudi totalni odboj ni več »totalen«, ampak zmanjšan zaradi absorpcije evanescentnega vala v fluorescentnem prahu. Dodatna polimerna leča nato še poveča prehodnost svetlobe na mejah s fluorescentno plastjo in zrakom ter usmeri svetlobo.

Ker je bila nagrada podeljena s poudarkom na široki uporabnosti modrih LED za osvetljevanje, ponovimo nekaj podatkov o tem. Za osvetljevanje je pomemben fiziološki odziv oči. Zvezni spekter bele svetlobe lahko za osvetljevanje dovolj dobro nadomestimo z ustrezno mešanico ožjih spektralnih pasov. Dobro znano je aditivno mešanje rdeče, zelene in modre barve, s katerim lahko dosežemo zelo širok nabor barvnih odtenkov. Zamik maksimuma spektra od rdeče proti modri barvi merimo z barvno temperaturo (CCT, Correlated Color Temperatute), ki enači zaznavo barve svetila z barvo črnega telesa pri ustrezni temperaturi [11]. Kvaliteto bele mešanice pa meri indeks barvne reprodukcije (CRI, Color Rendering Index) [12]. Ta primerja pravilnost vidne zaznave za različne barvne ploskve, osvetljene s testnim svetilom in z referenčnim izvorom, ki je standardno halogena žarnica s temperaturo nitke 3200 K in z vrednostjo CRI = 100. Dobre fluorescentne in LED sijalke dosegajo vrednosti CRI do 90.

Poleg barvne zaznave je zelo pomembna tudi svetlost in s tem izkoristek svetila. Oko je najbolj občutljivo za rumenozeleno svetlobo pri valovni dolžini 555 nm, kjer je relativna občutljivost največja in je iz zgodovinskih razlogov dogovorjeno razmerje 683 lm/W [6]. Običajna žarnica, ki dobro ustreza črnemu telesu pri temperaturi 2800 K, oddaja približno 15 lm/W, pri soncu pa je razmerje 94 lm/W. Učinkovitost fluorescenčnih sijalk je okoli 60 lm/W, medtem ko so tipične vrednosti LED sijalk še višje, to je okoli 90 lm/W. Za obe vrsti velja, da je učinkovitost višja pri barvni temperaturi okoli 6000 K.

Učinkovitost LED sijalk se je v zadnjem času hitro povečevala in v laboratoriju so že dosegli vrednosti 300 lm/W. Ta vrednost je blizu teoretičnega maksimuma 348 lm/W za osvetljevanje z idealnim svetlobnim izvorom. Tak izvor bi seval spekter črnega telesa pri temperaturi 5800 K v omejenem območju od 450 nm do 660 nm, kjer občutljivost očesa ne pade pod 5 % najvišje vrednosti [13].

Z nadaljnjim razvojem tehnologije se bo uporabnost belih svetlobnih izvorov, osnovanih na GaN, širila na nova področja. Za osvetljevanje tekočekristalnih prikazovanikov v televizorjih in računalniških monitorjih so se LED diode že izkazale, osvetljevanje prostorov osvaja ta tehnologija z velikimi koraki, avtomobilska industrija pa bo kmalu zamenjala vse izvore svetlobe s polprevodniškimi. Vse to upravičuje odločitev za podelitev letošnje Nobelove nagrade za fiziko.

LITERATURA

[1] H. Amano, N. Sawaki, I. Akasaki in Y. Toyoda, *Metalorganic vapor phase epitaxial growth of a high quality GaN film using an AlN buffer layer*, Appl. Phys. Lett. **48** (1986), 353.

[2] H. Amano, M. Kito, K. Hiramatsu in I. Akasaki, *p-type conduction in Mg-doped GaN treated with low-energy electron beam Irradiation (LEEBI)*, Jpn. J. Appl. Phys. **28** (1989), L2112.

[3] S. Nakamura, N. Iwasa, M. Senoh in T. Mukai, *Hole compensation mechanism of p-type GaN films*, Jpn. J. Appl. Phys. **31** (1992), 1258.

[4] S. Nakamura, T. Mukai in M. Senoh, *Candela – class high – brightness InGaN/AlGaN double – heterostructure blue – light – emitting diodes*, Appl. Phys. Lett. **64** (1994), 1687.

[5] J. I. Pankove, *Tunneling-assisted photon emission in gallium arsenide pn junctions*, Phys. Rev. Lett. **9** (1962), 283–285.

[6] J. Strnad, *Uvod v fiziko, II. del*, Univerza v Ljubljani, Ljubljana, 1971.

[7] J. Xie, S. Mita, Z. Bryan, W. Guo, L. Hussey, B. Moody, R. Schlesser, R. Kirste, M. Gerhold, R. Collazo in Z. Sitar, *Lasing and longitudinal cavity modes in photo-pumped deep ultraviolet AlGaN heterostructures*, Appl. Phys. Lett. **102** (2013), 171102.

[8] The Nobel prize in physics, `http://www.nobelprize.org/nobel\_prizes/physics/`, ogled 24. 10. 2014.

[9] Tha Haitz's Law, `http://www.nature.com/nphoton/journal/v1/n1/full/nphoton.2006.78.html`, ogled 24. 10. 2014.

[10] Več svetlobe z manj energije, `http://ec.europa.eu/energy/lumen/index\_sl.htm`, ogled 10. 12. 2014.

[11] What is correlated color temperature, `http://www.lrc.rpi.edu/programs/nlpip/lightinganswers/lightsources/whatisCCT.asp`, ogled 12. 12. 2014.

[12] Color rendering index, `http://en.wikipedia.org/wiki/Color\_rendering\_index`, ogled 28. 10. 2014.

[13] Luminous efficacy, `http://en.wikipedia.org/wiki/Luminous\_efficacy`, ogled 10. 12. 2014.

FRANC VITEZ MOČNIK: OB 200-LETNICI NJEGOVEGA ROJSTVA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A55, 97A30

Predstavljeno je življenje in delo Franca Močnika v spomin njegove 200-letnice rojstva. Dodanih je nekaj manj znanih podrobnosti o njegovih potomcih.

FRANC VON MOČNIK: ON THE 200TH ANNIVERSARY OF HIS BIRTH

The life and work of Franc Močnik in memory of the 200th anniversary of his birth are presented. Some less well-known details about his descendants are added.

V zavetju cerkljanskih in idrijskih hribov

O dr. Francu vitezu Močniku je pravzaprav težko napisati kaj bistveno novega. Ob njegovih okroglih obletnicah so se različni avtorji že na veliko razpisali, nekateri poljudno, drugi strokovno in strogo znanstveno. Z veseljem ugotavljamo, da so se ob Močnikovi 200-letnici rojstva tudi zunaj Slovenije začeli znova zanimati za njegovo življenje in delo. To je dandanes, ko imamo na voljo svetovni splet in ogromno digitaliziranega materiala v knjižnicah po svetu, veliko laže kot pred sto leti. Kljub vsemu pa Močnika dobro pozna predvsem le matematična strokovna javnost, marsikdo, čeprav dela v šolstvu, pa še ni slišal zanj. Prav zato najbrž ne bo odveč, če o njem ponovno nekaj povemo. Beseda pa bo za spremembo tekla nekoliko drugače, kot smo navajeni. Predvsem bomo opustili suhoparno navajanje podrobnosti o Močnikovih učbenikih.

Franc Močnik se je rodil 1. oktobra 1814 v Cerknem. Marsikomu žal še vedno ni popolnoma jasno, kje je to. Pogosto ljudje med seboj zamenjujejo krajevna imena *Cerkno*, *Cerknica* in *Cerklje*, ki se podobno pišejo in izgovarjajo. Prav tako prebivalce *Cerkljane* in *Cerkničane*, pa tudi pridevnika *cerkljanski* in *cerkniški*. Zadnje čase je morda Cerkno bolj prepoznavno, saj obstaja *občina Cerkno*, članica številne družine slovenskih občin, znan pa je tudi *Smučarski center Cerkno*. Lahko bi o Cerknem, Cerkljanskem in Cerkljanih zapisali še marsikaj, na kar bi bil Močnik zagotovo ponosen. Cerkljanska občina je bila takrat, ko se je rodil Močnik, med največjimi na Goriškem: štela je okoli 4 000 prebivalcev, brez Šebrelj, ki so spadale v drugo občino (glej [8]). Danes živi v cerkljanski občini okoli 5 000 prebivalcev.

Sam kraj Cerkno leži v kotlini, obdani s hribi in gorami, visokimi tudi več kot 1000 m. Prek nekaj sedel vodijo poti v sosednje doline in kotline. Edina odprta dolina vodi ob potoku Cerknica v dolino reke Idrijce, ki se izliva v Sočo. Za človeka, ki živi samo v Cerknem, je svet majhen, sega namreč samo do slemen in vrhov okoliških hribov. Obzorje se bistveno razširi že prebivalcem okoliških vasi, ki ležijo nekaj sto metrov više. Toda ljudje so se od nekdaj zaradi take ali drugačne nuje, kmečkih opravil ali gole radovednosti vzpenjali na svoje vrhove, od koder so videli veliko dlje kot s cerkljanskega trga. S Porezna (1632 m), najvišjega vrha na Cerkljanskem, se ob izjemno lepem vremenu vidi vse do Jadranskega morja.

Kot je znano, je bilo očetu Franca Močnika ime Andrej, materi pa Marjana. Priimek *Močnik* je na Cerkljanskem zelo pogost, najdemo pa ga po vsej Sloveniji, pa tudi drugje, celo v Ameriki, kjer ga pišejo kot *Mocnik*. Etimologi se nagibajo k razlagi, da ima priimek Močnik korenine v besedi *moča*, kar pomeni stanje zaradi dolgotrajnega deževja, mokrota, močvirnat svet, močvirje. Kmet, ki je imel veliko močvirnatega sveta, je postal Močnik, tako kot je na primer postal Zadnik ali Zadnikar oni, ki je imel zemljo na koncu doline ali najviše na pobočju hriba. So še druge, za lase privlečene razlage, o katerih pa na tem mestu ne bomo razpravljali. Ob Močnikovem rojstvu so Slovenci uporabljali bohoričico, pisavo, ki je nastala v 16. stoletju in je bila v rabi do sredine 19. stoletja, ko jo je izpodrinila današnja gajica. Zato je bil Močnik v dokumente vpisan kot *Franz Mozhnik*. To obliko je Franc tudi sam uporabljal, po uvedbi gajice pa se je strogo držal današnje oblike. Imel je tudi drugo ime, ki ga tu in tam srečamo: *Serafin*, po nemško *Seraphin*. V številnih prevodih Močnikovih del so prevajali tudi njegovo ime, na primer: *Franc, Fran, Frančišek, Francesco, František, Ferenc*.

Oče Andrej je imel doma krčmo, bil pa je tudi kmet in ugleden Cerkljan. Sam Franc ga v nekem pismu cerkljanskemu župniku, ko je po doktoratu iskal boljšo službo, imenuje *zemljiški posestnik* in *oberrihtar* glavne občine Cerkno. *Rihtarje* so v nekaterih avstrijskih deželah vpeljali v času vladanja Marije Terezije in Jožefa II. Ob koncu 18. stoletja je rihtar v bistvu opravljal dela in naloge župana, nikakor pa ni bil sodnik, kar bi lahko napačno razumeli, če bi razlago besede naslanjali na nemško besedo *Richter*. Navsezadnje še dandanes v cerkljanskem narečju uporabljajo besedo *rihtati*, kar pomeni nekomu nekaj ukazovati, pa tudi nekaj urejati. Cerkljansko je bilo krajši čas (1809–1813) del Napoleonovih Ilirskih provinc. Francozi so takrat vpeljali svoje *mêre* (francosko maire, župan), ki so bili večinoma kar prejšnji župani, le priseči so morali samemu Napoleonu. Andrej Močnik je bil kandidat za mêra (glej [8]).

Franc Močnik se je torej rodil kakšno leto po odhodu Francozov iz Cerknega. Morda se je kot deček, preden je šel v šole, povzpel na kakšnega od cerkljanskih vrhov in od tam pokukal v širni svet. Nihče ne ve, kako so ga klicali domači in vrstniki. Morda *Franci, Anci, Frenčk, Ence, Ene, Eni*, imena, ki se danes uporabljajo na Cerkljanskem. S čim so se tam ljudje preživljali v tistih časih? V glavnem s kmetijstvom, živinorejo, gozdarstvom, furmanstvom in domačo obrtjo. Pogosto so hodili delat na tuje, včasih se je ponudila priložnost dobiti delo pri gradnji cest. Nekaj je bilo trgovin in gostiln. Vsekakor je bilo treba plačevati vedno previsoke davke v denarju ali naturalijah, fantje so morali k vojakom za več let. Po pokrajini so se klatili ljudje vseh vrst: berači, potepuhi, dezerterji, razbojniki.

Kakšnih prireditev v današnjem smislu na Cerkljanskem v Močnikovem otroštvu ni bilo. Še največ se je dogajalo po cerkvah in okoli njih, na sejmih in svatbah. Ljudska šola je v neki obliki bila, kot razberemo iz virov. Po navadi je pouk potekal v kakšni večji hiši ali pa kar v župnišču. Cerkljanski učitelj je bil Ivan Sfiligoj, ki je mladega Franca naučil osnovnih znanj. Tako kot se je z dečki pogosto dogajalo v tistih časih, sta najbrž učitelj in župnik spoznala Frančevo nadarjenost in zlahka prepričala njegove starše, da so ga dali v nadaljnje šolanje. Njihov gmotni položaj ni bil ovira in želja, da bi sin postal duhovnik, je tudi bila živa, kar je bilo takrat običajno v družinah z več sinovi, kajti posestvo in obrt je po gospodarjevi smrti ali po tistem, ko ni mogel več delati, podedoval samo eden.

Franca so dali v šolo v 20 km oddaljeno Idrijo, ki takrat ni spadala pod Tolminsko oziroma Primorsko, ampak pod Kranjsko. Idrija je bila s svojim rudnikom živega srebra, enim največjih na svetu, drugo mesto na Kranjskem. Imela je marsikaj, česar mnogi drugi kraji niso imeli: grad brez graščakov, rudarsko godbo, gledališče, urejeno zdravstvo, predvsem pa šole, vse od protestantskih časov naprej, in sicer od ljudske in glavne do tehniške in zemljemerske. Za vse to gre zahvala rudniku in izobražencem, ki so prihajali v Idrijo tudi iz drugih dežel avstrijskega cesarstva.

Samo ugibamo lahko, kako je mladi Franc prišel v Idrijo pri takrat slabih prometnih povezavah. Morda peš, morda na vozu z vprego, morda na konjskem hrbtu. Niti ni znano, kje je v Idriji stanoval. Rečemo lahko samo to, da mu je v šoli šlo dobro. Slovenščine je bilo takrat po šolah bore malo ali nič, nemščine, ki je bila učni jezik, in latinščine pa neprimerno več. Sicer so poučevali na glavni šoli običajne vsebine, na primer aritmetiko, geometrijo, naravoslovje, zgodovino, zemljepis, glasbo, klasično grščino in še kakšen tuj jezik. Verjetno je Franc že takrat občutil togost šolskega sistema, ki je temeljil na učenju na pamet, branju iz knjig, neskončnem ponavljanju in disciplini. Še največ svobode in ustvarjalnosti so si učenci lahko privoščili pri pisanju prostih spisov. Ničesar ne vemo o njegovem vračanju v rodno Cerkno. Verjetno so ga domači obiskovali ali pa mu tako ali drugače pošiljali kaj za priboljšek v Idrijo.

V Ljubljani in Gorici

Ko je bil Franc star 10 let, je nadaljeval šolanje v Ljubljani. Glede tega posebnih možnosti pravzaprav ni imel: Ljubljana ali Gorica. Poti do teh mest so bile dolge in slabe. Iz Idrije v Ljubljano se je dalo priti po poti, po kateri so tovorili živo srebro do Vrhnike, morda tudi še kako drugače, iz Cerknega pa prek prelazov na vzhodni strani cerkljanske kotline, skozi Poljane in Škofjo Loko. Gorica je bila še težje dosegljiva. Če imamo v mislih najkrajšo pot, ki so jo uporabljali tudi romarji na Sveto goro nad Solkanom, pomeni, da je moral Cerkljan kreniti po dolini Cerknice do Idrijce, jo prečkati, se na Straži povzpeti v Šebrelje in se tam usmeriti proti Oblakovemu vrhu in Čepovanu. Lahko je krenil s Straže tudi po dolini Idrijce do Dolenje Trebuše in se tam usmeril proti Čepovanu. Ko je prispel v Grgar, so bili pred njim tako Sveta gora kot Solkan in Gorica. Možno pa je bilo izbrati še kakšno drugo pot.

V Ljubljani se je Močnik vpisal v gimnazijo, nato pa na licej. Ljubljanski licej je bil na Kranjskem takrat šola najvišjega ranga. Pomembna Močnikova učitelja na liceju sta bila jezikoslovec Matija Čop, Prešernov osebni prijatelj, in Leopold Karol Schulz von Straßnitzki (1803–1852). Slednji je bil po rodu iz starodavnega Krakova in matematično dobro podkovan profesor, ki je obiskoval gimnazijo ter nato študiral matematiko in astronomijo na Dunaju. Tudi v tistih časih ni bilo profesorskih mest na pretek, in zgodilo se je, da je bil s cesarskim dekretom poslan na ljubljanski licej, kjer je ostal 7 let. O Straßnitzkem in njegovem pomenu za našo matematiko bi bilo dobro narediti posebno raziskavo. Dodajmo le to, da je, kot je sam zapisal v nekem pismu, bila ob njegovem prihodu v Ljubljano na liceju znanost v precej bolehnem stanju. Da bi to stanje po svojih močeh vsaj malo ozdravil, je izvedel več javnih predavanj iz matematike in astronomije in s tem tudi pokazal ne samo, kako je treba poučevati, ampak tudi, kako je treba mlade navdušiti za znanosti. Vse pa kaže, da je Straßnitzki imel velik vpliv na Močnika, ki se je kasneje odločil za študij matematike. Močnik je imel izjemno srečo, da je bil učenec duhovitega in razgledanega profesorja evropskega formata, polnega novih idej, kako izboljšati šolstvo. Straßnitzki se je iz Ljubljane preselil v Lvov, kjer je doktoriral, svojo kariero in življenjsko pot pa je sklenil na Dunaju. Napisal je več matematičnih učbenikov in priročnikov, v matematično zgodovino pa se je vpisal s formulo $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$, s katero je Johann Martin Zacharias Dase, tudi Dahse (1824–1861), človek, ki je imel izjemne sposobnosti v računanju na pamet, izračunal v nekaj tednih število π (1844) na takrat rekordnih točnih 200 decimalk.

Močnik je po končanem liceju študiral bogoslovje v Gorici. Ne znamo odgovoriti na vprašanje, zakaj v Gorici in ne kar v Ljubljani, ki je bila, kot smo že zapisali, za Cerkljane in Idrijčane bolj dostopna. Morda je bila to želja staršev, morda se mu je zdela sončna Goriška bolj zdrava kot meglena Ljubljana. Leta 1836 je uspešno dokončal študij, star 22 let, kar pa je bilo premalo, da bi bil lahko posvečen v duhovnika. V Gorici je ostal še 10 let in tam poučeval na normalki, obenem pa je študiral za doktorat na graški univerzi. V tistem času še ni bilo južne železnice in ljudje so potovali do Gradca in nazaj večinoma s poštnimi kočijami. Prvi vlak je iz Gradca v Celje pripeljal leta 1846, v Ljubljano leta 1849, v Trst pa leta 1857.

V času poučevanja na goriški normalki se je Močniku že drugič nasmehnila sreča. V Gorico se je namreč leta 1836 zatekel z vso družino francoski kralj Karel X. Burbonski (1757–1836), ki je moral leta 1830 odstopiti. Z njim je bil tudi Henrik V. (1820–1883), kraljev vnuk in prestolonaslednik, ki pa ni nikoli vladal. Zatočišče jim je ponudil goriški grof Coronini. Kot se je za kraljevo družino spodobilo, je prišla s številnim spremstvom. Večina članov družine je na kraljevo željo pokopanih v kripti kostanjeviškega samostana. Leta 1917 so sarkofage zaradi spopadov na soški fronti začasno preselili v Mödling pri Dunaju. Ta kraj bomo v tem prispevki srečali še enkrat. V zvezi s tem pa le redki omenjajo, kar kaže na to, kako malo nekateri cenijo matematiko, da je bil v spremstvu tudi veliki, takrat že priznani francoski matematik Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), ki je bil za kralja in je imel z novimi oblastmi v Parizu nemalo težav. Cauchy je prišel v Gorico kot dvorni učitelj Henrika V. Spisal je celo posebno knjižico, kako mladega Henrika naučiti nekaj matematike, ki pa je slednji ni nikdar imel posebno rad.

Cauchy je ostal v Gorici do leta 1838. Ni se ukvarjal le s poučevanjem za matematiko nezainteresiranega kraljevega vnuka, ampak je vneto raziskoval in objavljal. Med drugim je razvil metodo za numerično reševanje polinomskih enačb poljubne stopnje. Matematikov v nekem mestu ni prav veliko in se po navadi hitro najdejo. Cauchy je v Gorici kmalu našel sogovornike za matematične teme in Močnik je bil eden od njih. To je bilo kot naročeno za Cerkljana, ki se je takrat pripravljal na doktorat v Gradcu. Očitno je prav hitro razumel Cauchyjevo metodo za numerično reševanje polinomskih enačb, kajti leta 1839 je na Dunaju objavil skoraj 100 strani obsežno znanstveno razpravo *Theorie der numerischen Gleichungen mit einer Unbekannten. Mit besonderer Rücksicht auf die neueste von Cauchy erfundene allgemeine Auflösungsmethode*, kar pomeni *Teorija numeričnih enačb z eno neznanko. S posebnim ozirom na najnovejšo splošno metodo reševanja, ki jo je izumil Cauchy.* V tem delu je Močnik znanstveno, metodično in razumljivo obdelal Cauchyjevo metodo in jo predstavil avstrijskim in drugim nemško govorečim matematikom. Žal je ta razprava ostala njegovo edino znanstveno delo, a bilo je za tiste čase dovolj dobro, da se je uveljavil v znanstvenem in akademskem svetu ter nato kot matematični pedagog, šolski reformator, pisec učbenikov, šolski svetnik in nadzornik. Morda je celo od Cauchyja, ki je imel nekaj prakse, kako mlade s kraljevičem vred učiti matematiko, dobil navdih za svoje kasnejše metodične priročnike. Goričani so se leta 2007 oddolžili Cauchyju in mu 150 let po njegovi smrti na palači Strassoldo v Gorici odkrili spominsko ploščo (glej [4]).

Doktorat, Lvov in Olomuc

Močnikov doktorat je neprimerljiv z današnjim doktoratom, pri katerem mora kandidat najprej vpisati študij 3. stopnje, opraviti predpisane izpite, najti temo, predlagati mentorja, čakati, da jo potrdi senat fakultete, predstaviti teze pred komisijo, napisati doktorsko disertacijo, ki jo pregleda strokovna komisija in morda nato še etična komisija, ter antiplagiatorski program, javno obraniti disertacijo in nato nekaj mesecev čakati na slovesno promocijo. Močnik je v Gorici naštudiral, kar so v Gradcu od njega zahtevali, predavanj pa zaradi dela na normalki v Gorici ni mogel obiskovati. V letih 1839 in 1840 je v Gradcu opravljal izpite, potem pa še tako imenovane rigoroze pred komisijo strogih profesorjev. Po zadnjem izpitu je bil že naslednjega dne, 14. aprila 1840, promoviran za doktorja filozofije. Iz seznama predavanj lahko navedemo, katere matematične vsebine so takrat (1839) obravnavali: osnove matematike, fiziko in uporabno matematiko, uporabno geometrijo (glej [5]).

Po doktoratu je Močnik poučeval na goriški normalki vse do leta 1846. Tako kot dandanes, ko mladi doktor ne najde kar takoj stalne službe, se je godilo tudi njemu. Višjih in visokih šol v cesarstvu ni bilo na pretek, narava pa je, tako kot vedno, poskrbela, da se je tu in tam sprostilo kakšno učiteljsko mesto. Močnik si je seveda prizadeval, da bi ga našel. Pisal je celo cerkljanskemu župniku, da mu dopolni krstni list, iz katerega naj bi bilo razvidno, da je vendarle njegov oče bil posestnik in občinski veljak, ne pa kdorkoli. Menil je, da si na cesarskem Dunaju popolnoma napačno predstavljajo, kakšna je situacija na Primorskem. Leta 1845 mu ni uspelo zasesti prostega mesta v Gradcu, naslednje leto pa mu je prineslo napredek: imenovan je bil za profesorja elementarne matematike in trgovskega računstva na Tehniški akademiji v daljnem Lvovu v današnji Ukrajini. Stavba akademije je bila leta 1848, ob *Pomladi narodov*, precej poškodovana. Močnik se ni vpletal v to vrenje, premeščen je bil na univerzo v Olomucu na Moravskem. Tam je predaval osnovno in višjo matematiko, elementarno matematiko, diferencialni račun z uporabo v geometriji in numerično reševanje enačb. Opravljal je celo dolžnosti dekana fakultete. V Olomucu je ostal do leta 1851 (glej [1, 2, 3]).

Nazaj v Ljubljano in nato v Gradec

Decembra 1850 so ga imenovali za deželnega šolskega svetnika in nadzornika ljudskih šol na Kranjskem. Po prisegi januarja 1851 se je preselil v Ljubljano. Leta 1860 je bil Močnik spet premeščen, tokrat v Gradec, kjer je bil od leta 1861 deželni svetovalec ter nadzornik ljudskih šol in realk za Štajersko in Koroško. Dne 23. junija 1862 je za svoje delo in zasluge v napredku šolstva prejel viteški križec reda Franca Jožefa. Leta 1869 je v skladu z novim šolskim zakonom postal deželni šolski nadzornik prve stopnje, vendar ne za dolgo. Leta 1871 se je upokojil, uradno na lastno željo zaradi zdravja. Ob tej priliki ga je cesar s podpisom 5. julija 1871 ponovno odlikoval, to pot z viteškim redom železne krone 3. razreda. Malo je ljudi, ki so si z matematiko in pisanjem učbenikov prislužili viteško čast. Verjetno je bil pri svojih 57 letih, še poln ustvarjalnih moči in idej, ne malo zagrenjen zaradi upokojitve, približno tako kot danes, ko profesorji odhajajo v pokoj zaradi ZUJF-a. Seveda pa vitez Močnik, ki se je smel od takrat naprej predstavljati in podpisovati kot *von Močnik*, njegovi potomci pa tudi, ni bil brez dela: urejal, dopolnjeval in popravljal je svoje učbenike. Močnik je umrl 30. novembra 1892 po srčnem napadu na svojem domu v Gradcu. Pokopan je bil 2. decembra 1892 na graškem pokopališču pri sv. Petru.

Franc Močnik je že zgodaj spoznal, kot učenec in učitelj, najbrž pod vplivom Cauchyja in Straßnitzkega, da je šolstvo v cesarstvu zastarelo in ne sledi času, ki je zahteval boljše znanje, saj se je dogajala industrijska revolucija, gradili so železnice, prihajale so nove tehnologije, napredovala je trgovina itd. Zato ni čudno, da je že leta 1840 v Ljubljani v nemščini izdal knjigo, v kateri opisuje osnovne štiri računske operacije, kot pomoč učiteljem in učencem pri pouku računstva. Prav tako je leta 1843 izdal v Ljubljani v nemščini napisan priročnik za vse, ki se želijo izpopolniti v računstvu. Močnik je napisal v nemščini sploh vsa svoja dela, ki so jih prevajali v druge jezike v državi. Leta 1846 je na Dunaju izdal navodila za računanje na pamet za prvi razred ljudskih šol. Naslednje leto so, prav tako na Dunaju, izdali tudi slovenski prevod, napisan v bohoričici. Nato skoraj ni minilo leto, v katerem Močnik ne bi izdal kakšne knjige: navodil, računic, tablic, učbenikov aritmetike, učbenikov geometrije. Namenjeni so bili za ljudske, glavne, meščanske in dekliške šole ter gimnazije.

Močnik je v začetku leta 1851 na Dunaj poslal poročilo o stanju ljudskih šol na Kranjskem, hkrati pa predlagal izboljšave. Poleti istega leta je sestavil in predlagal nov učni načrt za ljudske šole, ki je predvideval tudi več ur slovenščine. Septembra 1851 so njegov načrt potrdili. Postopoma je namreč le napredovalo mnenje, da je v osnovni šoli treba tudi poučevati v slovenščini, ki je bil materin jezik večine prebivalcev na Kranjskem. Močnik je pisal učbenike, izvajal inšpekcije po šolah, se srečeval z učitelji in tudi sam pokazal, kako se pravilno poučuje. Uvajal je tudi novosti: risanje, telovadbo, petje, praktična znanja, učiteljske tečaje, šolske knjižnice. Sodeloval je tudi pri pisanju slovensko-nemške slovnice, pisanju statutov nekaterih šol, trudil se je za boljši gmotni položaj učiteljev, dal pobudo za ustanovitev Društva v podporo vdov in sirot kranjskih učiteljev, ki je potem delovalo vse do 1. svetovne vojne (več v [1]).

Slovensko znanstveno izrazoslovje je bilo treba postaviti na novo. Pri tem so imeli veliko zaslug trije Rovtarji, če gledamo na njihovo narečje ob rojstvu. Poleg Močnika sta bila to še Mihael Peternel (1808–1884), doma v današnjem Podlanišču blizu Cerknega, in Matej Cigale (1819–1889), doma blizu Črnega Vrha nad Idrijo. Peternel je bil duhovnik, ki ga je Močnik postavil za prvega ravnatelja ljubljanske realke. Bil je vsestransko tehnično in naravoslovno podkovan izobraženec (več v [7]). Cigale pa je bil pravnik in jezikoslovec. Močnik je dal zgled za geometrijo. V učbeniku za nižje realke iz leta 1856 je dodal slovenske geometrijske izraze. Po vseh treh možeh so v Ljubljani poimenovali ulice.

Poleg državnih priznanj je bil Močnik deležen še drugih časti. Postal je častni član učiteljskega društva za Kranjsko, častni član učiteljskega društva v Celju, Gradcu in Leobnu, častni član kranjske in goriške kmetijske družbe.

Njegove učbenike odlikujejo jasnost, uporabnost, koristnost. Zasnovani so tako, da naj ne bi po nepotrebnem obremenjevali učenca s pravili in obrazci, osnove računstva naj si pridobi s samostojnim razmišljanjem, utrdi pa naj jih s ponavljanjem in raznovrstnimi vajami, pri tem naj skrbi tudi za pravilno izražanje in dobi naj občutek za resnico in pravico. Pogosto pa naj učenec računa na pamet.

Močnikove učbenike so prevajali v vse jezike cesarstva, pravijo, da tudi v ruščino in celo v staro cerkveno slovanščino. Doživeli so številne ponatise in priredbe in so se ponekod uporabljali skoraj do 2. svetovne vojne (več o tem v [6]).

Močnik se je zavzemal za uvedbo desetiških mer v vsakdanjem življenju. Te so se zelo počasi uveljavljale. Že baron Jurij Vega (1754–1802) se je trudil v tej smeri, pa se v sto letih ni dosti spremenilo. Prav tako je vladala zmeda na področju denarništva. Zato je Močnik na koncu računic in učbenikov dodajal pretvornike med merskimi in denarnimi enotami, ki so jih uporabljali v državi.

Družina

Močnik se je 15. oktobra 1850 v Olomucu poročil s Terezijo Rossiwall (1830–1911). Imela sta 3 otroke: Marijo (1852–1903), Emilijo (1854–1948) in Teodorja (1855–1920).

Marija se je poročila z Gustavom von Zeynekom (1837–1901), ki je bil šolski svetnik za Šlezijo in avtor več knjig, ki obravnavajo nemško literaturo. Marija in Gustav sta imela tri otroke: Richarda (1869–1945), ki je bil fiziolog in kemik, leta 1930 nominiran za Nobelovo nagrado iz fiziologije in medicine; Olgo Rudel (1871–1948), ki je postala pisateljica in političarka, prva predsednica avstrijskega Bundesrata (1927/28 in 1932); Teodorja (1873–1948), pisatelja, Shakespearjevega prevajalca v nemščino in polkovnika (glej [9, 10]). Počivajo v družinski grobnici v Mödlingu pri Dunaju.

Emilija Močnik se je poročila s sodnim adjunktom Josefom Schallerjem. Teodor je diplomiral leta 1877 v Gradcu iz matematike in fizike, toda postal je benediktinec z redovniškim imenom Benno Močnik v avstrijskem Admontu, zadnjih 35 let pa je preživel v samostanu v Einsiedelnu v Švici.

Za konec

Dr. Franc vitez Močnik je bil pravi mož, latinsko *vir*, poosebljena možatost, pogumnost, vrlina in odločnost, latinsko *virtus*. S svojim znanjem in nesebičnim prizadevanjem je kot metodik in reformator pouka matematike ter šolski organizator dvignil zastarelo, omrtvičeno, okorno in zanikrno nižje in srednje šolstvo prve polovice 19. stoletja na naših tleh, pa tudi širše, na spodobno visoko ráven. Njegovi številni matematični učbeniki, računice in navodila, kako uspešno poučevati matematiko, nas še danes prijetno presenečajo. Njegova dela, latinsko *operae*, so uporabljali številni rodovi in bila so zgled in vzpodbuda mnogim, da so se odločili študirati pedagoško matematiko in z njenim nezadržnim napredkom šli po njegovih stopinjah. Pod njegovim viteškim grbom se ne vije zaman trak z latinskim napisom *Virtute et opera*, kar navadno prevajamo v *Z vrlino in delom*.

Ob 200-letnici rojstva smo se Franca viteza Močnika spomnili z nekaj dogodki, ki so se zgodili okoli njegovega rojstnega dne, 1. oktobra. Občina Cerkno praznuje svoj občinski praznik ravno na ta dan v čast cerkljanskemu vitezu. Osnovna šola Cerkno je v sodelovanju z Univerzo na Primorskem organizirala Močnikove delavnice za zadnje tri razrede. Osnovna šola je prispevala tudi kviz in igrico, ki se tičeta Močnika in njegovih računic. Mestni muzej Idrija, Cerkljanski muzej in Slovenski šolski muzej so pripravili priložnostno razstavo o Močniku v Cerknem in postavili malo učilnico, kakršne so bile v slavljenčevem času po šolah. V posebnem prostoru so poskrbeli tudi za računalniško predstavitev nalog iz njegovih računic, anagramov in kviza. V učilnici so v oktobru izvedli nekaj delavnic učnih ur po starem. Občina Cerkno in Cerkljanski muzej sta poskrbela za preselitev Močnikovega doprsnega kipa na primernejšo lokacijo in njegovo ponovno odkritje na sam občinski praznik, 1. oktobra. Filatelistično društvo Idrija je na ta dan predstavilo Močniku v čast priložnostno ovojnico z osebno poštno znamko in priložnostnim poštnim žigom. Na levi strani ovojnice je natiskan Močnikov viteški grb, pod njim pa kopija njegovega podpisa. Na znamki je slavljenčeva fotografija z osnovnimi osebnimi podatki. Poštni žig vsebuje Močnikovo karikaturo, katere avtor je Borut Pečar (1931–2009), prav tako Močnikove osnovne osebne podatke, datum 1. 10. 2014 in cerkljansko poštno številko. Seveda na ovojnici ne manjkata zapisa njenega avtorja (Blaž Jereb) in kraja predstavitve (Cerkljanski muzej).

Mestni muzej Idrija je dal na svetlo katalog razstave z naslovom *Življenjska pot Franca Močnika* (*Z vrlino in delom.* Dr. Franc Močnik (1814–1892)). Na sploh je bil *Z vrlino in delom* glavni moto vseh prireditev. V katalogu je zbranih več člankov o Močniku in njegovem delu. DMFA Slovenije je imelo v Cerknem, kot se spodobi za 200-letnico rojstva velikega cerkljanskega rojaka, svoje strokovno srečanje in občni zbor. Matematični del s prispevki več avtorjev, enega celo iz Slovaške, je bil v glavnem posvečen Močniku. Ciklus prireditev je bil sklenjen s predavanjem prof. Milana Hladnika z naslovom *Poslanstvo dr. Franca Močnika* v okviru rednih muzejskih srečanj, ki jih organizira Mestni muzej Idrija.

V okviru Seminarja za zgodovino matematičnih znanosti, ki poteka ob ponedeljkih v Plemljevem seminarju na Jadranski ulici 19 v Ljubljani pod okriljem DMFA, IMFM in FMF, se je v letu 2014 (pa tudi že prej) zvrstilo več predavanj o Francu Močniku in njegovem delu.

LITERATURA

[1] M. Hladnik, *Franc Močnik kot šolski svetnik in nadzornik* (v zborniku Po stopinjah dr. Franca Močnika, Strokovno srečanje matematičnih pedagogov, Cerkno, 28. september 1996), Založba Bogataj, Idrija 1997.

[2] M. Hladnik, *Franc Močnik, matematik in pedagog. Ob stoletnici njegove smrti*, Idrijski razgledi **37** (1992), 19–33.

[3] M. Hladnik, *Življenjska pot Franca Močnika* (Z vrlino in delom. Dr. Franc Močnik (1814–1892). Katalog občasne razstave ob 200-letnici rojstva dr. Franca Močnika), Mestni muzej, Idrija 2014.

[4] S. Južnič, *Cauchyjeva in Močnikova Gorica kot središče evropske matematike* (ob 190. obletnici Močnikovega rojstva), Arhivi **28** (2005), 15–32.

[5] S. Južnič, *Močnikova disertacija* (ob 165. obletnici Močnikove promocije), Arhivi **28** (2005), 153–164.

[6] J. Povšič, *Bibliografija Franca Močnika*, Slovenska akademija znanosti in umetnosti, Ljubljana 1966.

[7] M. Razpet, *Mihael Peternel, prvi ravnatelj ljubljanske realke*, Obzornik mat. fiz. **51** (2004), 80–86.

[8] A. Štucin, *Cerkljanska pod Francozi*, Idrijski razgledi **35** (1990), 27–34.

[9] T. Zeynek, *Ein Offizier im Generalstabskorps erinnert sich*, Böhlau Verlag, Dunaj, Köln, Weimar 2009.

[10] `www.deutsche-biographie.de/sfz108610.html`, ogled 2. 12. 2014.

NOVE KNJIGE

Vito Lampret: Matematika I, prvi del – preslikave, števila in vektorski prostori, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo – Komisija za informatiko, knjižničarstvo in založništvo, Ljubljana 2013, XIV + 442 strani.

Avtor pričujočega novega učbenika že vrsto let predava matematiko, preverja znanje študentov in pri tem spoznava, kaj le-ti v svoji starosti zmorejo. Pri tem si je nabral veliko izkušenj in je, ko je pisal učbenik matematike, očitno imel v mislih študenta prvega letnika gradbeništva in kasnejšega inženirja, ki naj bi znal korektno formulirati tehniški problem, na katerega je naletel v praksi, ga predelati v primerno matematično obliko in ga uspešno rešiti. Nato naj bi rezultate, ki jih večinoma dobi z uporabo računalniške opreme, znal kritično interpretirati, jih temeljito preveriti in prenesti nazaj v svojo stroko. Študent gradbeništva, ki bo študiral matematiko po tej knjigi, naj bi precej temeljito spoznal in razumel notranjo zgradbo matematike, njene metode in sistematičnost. Ni cilj, da bi matematiko spoznal do potankosti, ampak da bi kot bodoči inženir dobro obvladal matematični jezik in se znal v njem primerno izražati. Za poglobljeni študij matematike pa avtor sam priporoča številne druge dobre učbenike priznanih avtorjev.

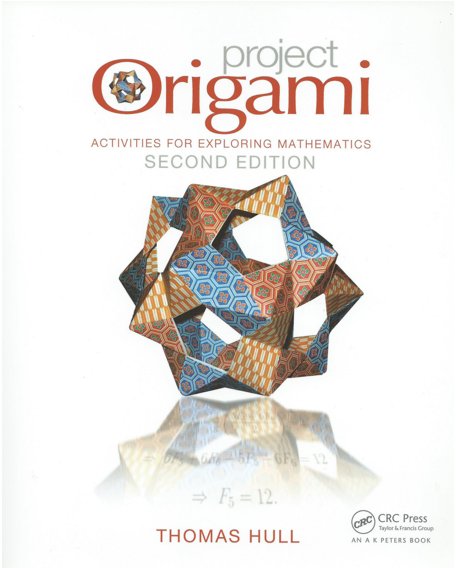
Učbenik je zasnovan in napisan moderno, tako kot večina učbenikov matematike za tehniške fakultete doma in po svetu. Delo je smiselno in logično razdeljeno na devet poglavij: Množice in preslikave, Števila, Geometrijski vektorji, Linearni prostori, Linearne preslikave, Matrike, Sistemi linearnih enačb, Lastne vrednosti in Normiran prostor matrik. Vsako od teh poglavij je razdeljeno na več razdelkov, ti pa po potrebi na podrazdelke. Vse enote besedila so oštevilčene, prav tako definicije, izreki, trditve, posledice, opombe in primeri, kar omogoča, da uporabnik hitro najde, kar je morda med branjem učbenika že pozabil. Avtor je poskrbel za primerno velikost črk osnovnega besedila, prav tako je zelo pazil na izbiro oznak za standardne funkcije, konstante in spremenljivke, bodisi skalarne, vektorske, operatorske ali matrične. Vse to v veliki meri pripomore k večji preglednosti učbenika. V njem je obdelanih nekaj tem, recimo v linearni algebri, veliko bolj natančno kot v drugih tovrstnih slovenskih učbenikih. Linearna algebra, od geometrijskih vektorjev do matrik, je obdelana zelo vestno in temeljito, pri čemer je dano veliko poudarka na linearno neodvisnost vektorjev in urejene vektorske baze. Delo vsebuje tudi zahtevnejši temi o singularnem razcepu matrik in simultani diagonalizaciji matrik. O velikih matematikih, po katerih se kaj obravnavanega v knjigi imenuje, avtor v opombah pod črto napiše osnovne življenjske podatke, tako da bralec mimogrede izve nekaj o zgodovini problema in da vsaj okvirno ve, kdaj je v matematiki kaj novega nastajalo. Morda je celotno vsebino knjige nemogoče odpredavati v predvidenih pedagoških enotah, določenih z učnim načrtom, toda delo je napisano tako, da bi študent lahko tudi samostojno, s papirjem in svinčnikom v roki, predelal določene vsebine.

Učbenik je opremljen s kazalom, seznamom slik, seznamom tabel, seznamom uporabljenih virov in z obširnim stvarnim kazalom. Slednje bo zelo dobrodošlo uporabnikom, ki bodo v knjigi hitro našli, kar jih bo pač zanimalo, bodisi pri študiju ali pa kasneje na delovnem mestu. Delo je napisano v lepi in kleni slovenščini, v kateri je sicer precej tujk, ki pa jih avtor večino prevede in pojasni v našem jeziku. Po svoje so tuji izrazi dobrodošli, ker pomenijo preprost most za laže razumevanje matematičnih besedil v tujih jezikih, katerim se dandanes ne moremo izogniti. Besedilo je lepo razporejeno in oblikovano, vanj je vključenih tudi precej slik. Pri izpeljavah in dokazih se avtor opira na aksiome, definicije in prejšnje, že dokazane izreke, trditve, posledice, opombe in primere, kar je tudi pri sklicevanjih nanje nedvoumno označeno s številkami le-teh, tako da bralec lahko hitro najde, kaj v njih piše. Konci dokazov so, kot se v takih učbenikih spodobi, jasno označeni. Avtor pogosto vključuje tudi kratka navodila, kako lahko uporabimo računalniški program Mathematica pri reševanju nekaterih problemov, ki so povezani z vsebino knjige.

Univerzitetni učbenik Matematika I, prvi del – preslikave, števila in vektorski prostori – je napisan estetsko, pregledno, strukturirano, matematično in jezikovno korektno ter tehnično dovršeno. Napisan je za študente prvega letnika univerzitetnega študija gradbeništva, ki se prvič srečajo z visokošolsko matematiko, primeren pa je prav tako za inženirje gradbeništva, ki bi želeli svoje znanje matematike obnoviti ali pa še nekoliko poglobiti.

Marko Razpet

Thomas Hull, Project Origami, Activities for exploring mathematics, Second Edition CRC Press, Taylor & Francis Group, 2013, 363 str.



Avtor predava na Western New England University matematične predmete. Na predavanjih povezuje matematiko z japonsko umetnostjo prepogibanja papirja. Prvo izdajo knjige (2006), ki je vsebovala 22 dejavnosti, je na podlagi odzivov, ki jih je prejel od študentov in učiteljev, ki so dejavnosti praktično izvedli v razredih, in na podlagi lastnih izkušenj v drugi izdaji dopolnil in razširil na 30 dejavnosti.

Že vsebina uvoda nakazuje metodično zasnovo knjige, saj v njem najdemo navodila, kako izvajati dejavnosti, da bi poudarili učenje z raziskovanjem, in katero vrsto oziroma velikost papirja potrebujemo za posamezne dejavnosti. Uvod se konča z navedbo 13 knjig s kratkim opisom vsebine, ki prav tako obravnavajo povezavo med matematiko in origamiji.

V knjigi je navedenih 30 dejavnosti, ki imajo vse enako strukturo. Najprej je z več slikami opisan postopek prepogibanja, včasih sledi namig, kako z vprašanji napovemo matematično ozadje, nato avtor zapiše, s katerimi matematičnimi vsebinami lahko povežemo določeno dejavnost, sledijo delovni listi z vprašanji in nalogami za učence (dijake ali študente), ki so dostopni tudi na domači strani založbe. Poglavje se konča z navodili za učitelje, kjer so zapisane rešitve ali namigi za rešitve in opozorila, na kaj moramo biti pri delu posebej pozorni. Na koncu so dodani še predlogi za nadaljnje dejavnosti, s katerimi nadgradimo matematično znanje.

Prvo dejavnost bomo opisali nekoliko podrobneje, da bomo bolje spoznali strukturo knjige, druge pa bomo preleteli. Dejavnost povezuje kvadrat in enakostranični trikotnik. Narisan je eden od načinov, kako s prepogibanjem kvadrata dobimo enakostranični trikotnik. Učenci morajo nato ugotoviti, na koliko načinov lahko v kvadrat včrtajo enakostranični trikotnik. Po razgovoru se posvetijo primeru, ko imata trikotnik in kvadrat le eno skupno oglišče, drugi dve oglišči trikotnika pa ležita na stranicah kvadrata. Poiskati morajo povezavo med ploščino trikotnika p in kotom φ, ki ga osnovnica enakostraničnega trikotnika oklepa s stranico kvadrata. Narišejo graf funkcije $p(\varphi)$ in določijo največji možni kot, ki je 15°. Narišejo natančno skico, določijo kote, se pogovorijo o medsebojni legi trikotnika in kvadrata in nato iz kvadrata s prepogibanjem dobijo enakostranični trikotnik. Ob tem lahko ponovimo lastnosti zrcaljenja, kotne funkcije in iskanje ekstremov funkcij z odvodi. Kot nadaljevanje dejavnosti pa avtor predlaga iskanje največjega kvadratu včrtanega šestkotnika.

Naštejmo še preostale dejavnosti: origami trigonometrija (adicijski izreki), delitev kvadrata na n enakih delov, pri čemer razlikujemo delitev na sodo in liho število delov, *origami helix* ali zgibanje kvadratnega lista papirja tako, da ga lahko zvijemo in ustvarimo rotacijske prostorske ploskve, zgibanje parabole, trisekcija kota, reševanje kubične enačbe (več metod reševanja z zgibanjem papirja), vozli s papirnatim trakom, primeri Hagovega izreka. Sledijo modularni origamiji, kjer zlagamo modele iz več enakih ali različnih modulov, vsakega od njih izdelamo iz enako velikih kvadratnih listov papirja. Modularno sestavi različne poliedre (škatlo, prisekani dvanajsterec, zvezdaste poliedre). Zanimive so dejavnosti, pri katerih za izdelovanje poliedrov uporabimo vizitke. Sledi zgibanje papirja, pri katerem ponavljamo določen niz prepogibov, tako da nastanejo sebi podobni liki. Pri tem so omenjene povezave s fraktali, aritmetičnim in geometrijskim zaporedjem, kompleksnimi števili in preslikavami. Mreže poliedrov in ravninske origamije, pri katerih gredo vsi zgibi skozi eno točko, avtor poveže s teorijo grafov. Sledijo skice za zgibanje »nemogočih vzorcev«, kot jih imenuje avtor, saj se po razgrnitvi prepognjenega kvadrata izkaže, da vzorec ne more biti ravninski. Zadnje tri dejavnosti v knjigi so vezane na abstraktno algebro (matrike, homomorfizmi) in sferno trigonometrijo.

Če je pri vsaki dejavnosti navedeno, katere matematične vsebine lahko pri tem obravnavamo, je za učitelje pomemben tudi dodatek, v katerem avtor naredi obraten seznam: za posamezne matematične vsebine našteje dejavnosti, ki se nanje navezujejo.

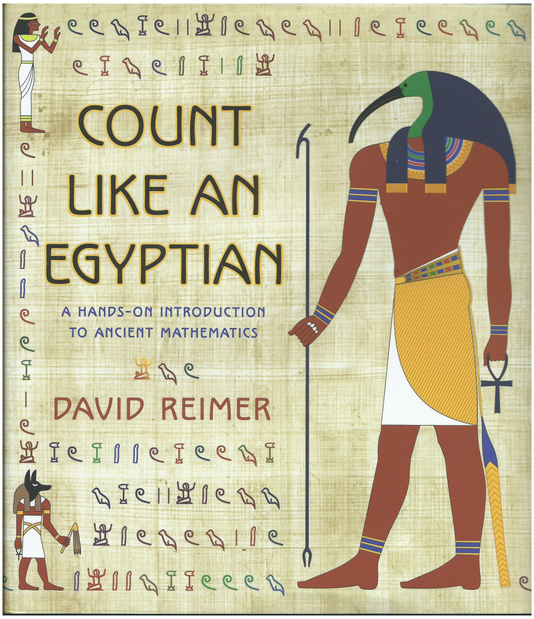
Začetne dejavnosti lahko uporabimo v zadnji triadi osnovne šole, saj matematično ozadje ni zahtevno. Sledijo dejavnosti, ki so primerne za srednješolce, druga polovica naštetih dejavnosti pa je vezana na matematične vsebine, ki jih v srednji šoli ne obravnavamo. Še vedno pa lahko vsaj začetni del uporabimo tudi v srednji šoli.

Avtor pri nekaterih dejavnostih predlaga tudi uporabo računalniških programov za dinamično geometrijo, kot je na primer GeoGebra oziroma v ZDA priljubljeni program The Geometer's Sketchpad. Z njimi se lahko izognemo nekaterim zapletenejšim računom in naloge prilagodimo za osnovnošolski ali srednješolski nivo.

Knjigo odlikujejo skrbno izbrane skice, razumljive in v enostavnem jeziku zapisane razlage ter metodično zasnovani delovni listi. Zasnovana je tako, da jo uporablja učitelj kot metodični pripomoček, a hkrati tudi omogoča bralcu, da se ukvarja le z umetnostjo prepogibanja papirja ali pa nastale like, ploskve in telesa tudi matematično »obdela«.

Nada Razpet

David Reimer, Count like an Egyptian, A hands-on introduction to ancient mathematics, Princeton University Press, 2014, 250 strani.



Matematika starega Egipta je bila popolnoma drugačna od matematike, kakršno poznamo danes. Po navadi ljudje mislijo, da je bila le nekakšen primitivni predhodnik sodobne matematike. Pa ni čisto tako. Predvsem je bila praktična. Je pa res, da je ni mogoče enostavno razumeti, ker smo že preveč indoktrinirani s sodobno matematiko in sodobnimi računskimi postopki. Vendar nam egipčanski način zapisa števil in računanje z njimi ponuja svojevrsten užitek. Marsikaj novega se pri tem naučimo.

V knjigi najprej spoznamo osnovne egipčanske števke:

𓏺 = 1, 𓎆 = 10, 𓍢 = 100, 𓆼 = 1 000, 𓂭 = 10 000, 𓆐 = 100 000, 𓁨 = 1 000 000.

Znak za 1 je palčka, za 10 podkev, za 100 kos zvite vrvi, za 1 000 lotus, za 10 000 človeški prst, za 100 000 žabji paglavec, včasih kar žaba, in za 1 000 000 človek, morda neko božanstvo v posebni telesni pozi. Za števila od 1 do 9 so Egipčani zapisali ustrezno število znakov 𓏺, za 10-kratnike teh števil ustrezno število znakov 𓎆 in tako naprej. Zaradi varčevanja s prostorom so znake zapisovali tudi drugega nad drugim, na primer:

$$\text{𓏺𓏺𓏺𓏺} = \overset{\text{𓏺𓏺}}{\text{𓏺𓏺}} = 4,\ \text{𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺} = \overset{\text{𓏺𓏺𓏺}}{\text{𓏺𓏺𓏺}} = 6,\ \text{𓎆𓎆𓎆𓎆} = \overset{\text{𓎆𓎆}}{\text{𓎆𓎆}} = 40,\ \text{𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆} = \overset{\text{𓎆𓎆𓎆}}{\text{𓎆𓎆𓎆}} = 60.$$

Večja števila so zapisovali z združevanjem ustrezno mnogo osnovnih števk, na primer:

$$\text{𓆼𓆼𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺} = \text{𓆼𓆼}\overset{\text{𓎆𓏺𓏺}}{\text{𓏺𓏺𓏺}} = 2015.$$

Avtor zaradi enostavnosti uporablja prvo varianto, zapis v vrsto. Tako so zapisovali naravna števila, ničle in negativnih števil pa še niso poznali. Ulomke so zapisovali kot vsoto ulomkov s števcem 1. Ulomku s števcem 1 glede na deželo, v kateri so ga uporabljali, običajno pravimo *egipčanski* *ulomek*. Pri takem ulomku so Egipčani pod znak 𓂋 zapisali imenovalec. Za ulomek 2/3 so imeli poseben simbol, včasih tudi za 1/2 in 1/4. Številski simboli so se skozi čas namreč spreminjali. Števili $3{,}14 = 3+1/10+4/100 = 3+1/10+1/25$ in $11/30 = 1/5+1/6$ bi v egipčanski obliki zapisali takole:

$$\mathrm{III}\quad \overset{\text{𓂋}}{\cap}\quad \overset{\text{𓂋}}{\cap\cap\mathrm{IIIII}},\qquad \overset{\text{𓂋}}{\mathrm{IIIII}}\ \overset{\text{𓂋}}{\mathrm{IIIIII}}.$$

Egipčanski ulomki v knjigi niso prav velikokrat zapisani v hieroglifski pisavi, ampak s črtami nad običajnimi indijsko-arabskimi števkami, na primer $1/2 = \overline{2}, 1/123 = \overline{123}$. Za poseben ulomek 2/3 uporablja zapis $\overline{\overline{3}}$.

S seštevanjem števil v egipčanskem številskem sistemu ni posebnih težav. Za množenje pa so uporabljali princip zaporednega podvajanja. Da dobimo zmnožek naravnih števil a in b, zapišemo a binarno: $a = a_0 + 2\cdot a_1 + 2^2\cdot a_2 + \cdots + 2^n\cdot a_n$. Pri tem je vsak a_k bodisi 0 bodisi 1. Torej je

$$a\cdot b = a_0\cdot b + a_1\cdot(2\cdot b) + a_2\cdot(2^2\cdot b) + \cdots + a_n\cdot(2^n\cdot b).$$

Egipčani so, ne da bi vedeli za binarni zapis števil, razvili algoritem za množenje. Število a so zapisali kot vsoto potenc števila 2, ki so jih dosegli z zaporednim podvajanjem števila 1: $(1, 2, 4, \ldots)$. Podvajali so samo tolikokrat, da niso presegli a. Nato so zaporedno prav tolikokrat podvojili še b: $(b, 2\cdot b, 4\cdot b, \ldots)$. Nazadnje so sešteli tiste člene tega zaporedja, ki so na tistih zaporednih mestih v prvem zaporedju, katerih členi dajo vsoto a. Vzemimo za primer $a = 19, b = 2015$:

$$(\underline{1}, \underline{2}, 4, 8, \underline{16});\quad 19 = 1 + 2 + 16,$$

$$(\underline{2015}, \underline{4030}, 8060, 16120, \underline{32240});\quad 19\cdot 2015 = 2015 + 4030 + 32240 = 38285.$$

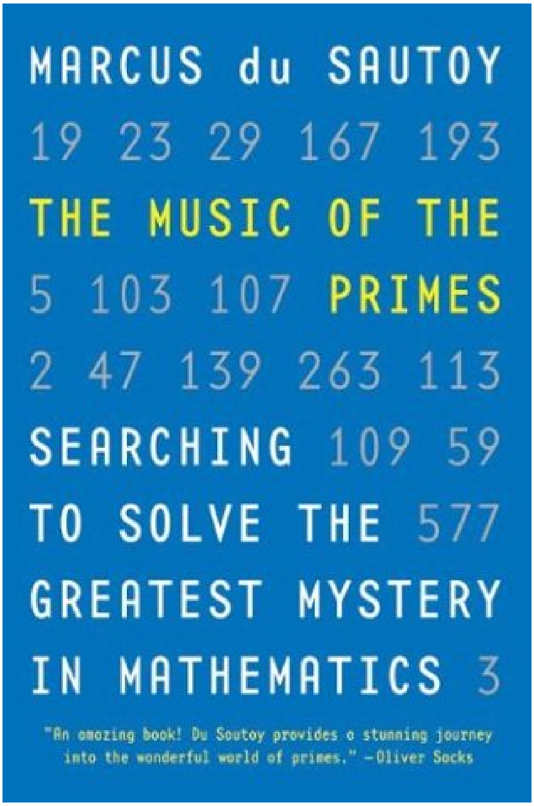
Avtor knjige nas postopoma vodi skozi skrivnosti egipčanskih števil in ulomkov ter osnovnih računskih operacij z njimi. Obenem pokaže, da je matematika izraz kulture, ki jo uporablja. Prav tako nas sproti ob reševanju matematičnih problemov opozarja na nekatere zanimive zgodovinske podatke in zgodbe iz različnih obdobij egiptovske zgodovine. Ob reševanju nalog bralec nehote bolje spozna življenje, mitologijo in družbeno organiziranost starih Egipčanov, njihov način kmetovanja, peko kruha in celo varjenje piva. Seveda je govor tudi o hieroglifih, geometriji, astronomiji in piramidah. Razen egipčanske matematike bralec za primerjavo spozna tudi veliko stvari o babilonski matematiki, na primer klinopisni zapis števil, šestdesetiški številski sistem in računanje v tem sistemu.

Knjiga je lepo napisana in opremljena s številnimi barvnimi slikami. Je zanimiva kombinacija matematike, zgodovine, književnosti (ep o Gilgamešu) in mitologije. Je lahko vzor za medpredmetno povezovanje. Vsebuje tudi veliko nalog za samostojno računanje, ki bralca vzpodbuja k razmišljanju. Zato ima knjiga tudi precejšnjo didaktično vrednost.

David Reimer, avtor knjige, je izredni profesor matematike na izobraževalni ustanovi College of New Jersey. Matematiko je študiral na Rutgers University. Leta 1996 je prejel za delo na področju diskretne matematike nagrado, imenovano George Pólya Prize. Dokazal je namreč van den Berg-Kestenovo domnevo. Njegovo ime nastopa tudi v van den Berg-Kesten-Reimerjevi neenakosti.

Marko Razpet

Marcus du Sautoy, The Music of the Primes, HarperCollins Publishers, 2004, 335 strani.



Izvrstno napisana knjiga na poljuden in privlačen način obravnava eno najtežjih še nerešenih vprašanj matematike: skrivnostno razporeditev praštevil. Ključ do odgovora na to vprašanje leži v slavni Riemannovi hipotezi, osrednjem problemu sodobne matematike in enem od sedmih t. i. milenijskih problemov; za rešitev vsakega od njih je razpisana nagrada milijon dolarjev. Ko so Hilberta, ki je ta problem že leta 1900 uvrstil na svoj znameniti seznam 23 odprtih problemov, vprašali, kaj bi storil, če bi ga oživili po 500 letih, je odgovoril, da bi vprašal, ali je že kdo dokazal Riemannovo hipotezo. Sedmega aprila 1997 je matematični svet obkrožila in šokirala vest, da jo je dokazal mlad fizik, ki je »v trenutku videl«, kako jo lahko dokaže s svojimi bizarnimi »supersimetričnimi fermionskimi bozonskimi sistemi«, a izkazalo se je, da je šlo za prvoaprilsko potegavščino. Mimogrede, podobna sodobna potegavščina je na spletu dostopen program za generiranje »matematičnih člankov«, ki za videzom učenih besednih zvez in slučajno generiranih formul skriva popolne nesmisle, kot so npr. »topološka topologija«, »semiintegrabilna kombinatorika«, ipd.

Z vprašanjem razporeditve praštevil, teh »atomov naravnih števil«, so se ukvarjali mnogi veliki matematiki. Avtor predstavi njihove prispevke k reševanju te velike skrivnosti, z obilico zgodovinskih podrobnosti in anekdot pa nam jih približa tudi kot osebnosti. Matematični del knjige je predstavljen predvsem na ravni idej, dostikrat tudi s pomočjo različnih metafor. Ne ukvarja se prav veliko s tehničnimi podrobnostmi, formulami in dokazi, zato osnovno sporočilo knjige načeloma lahko razume in usvoji vsak dovolj zainteresiran bralec.

Tako npr. Eulerja, ki mu pravi kar matematični orel, omenja med drugim v zvezi s tabelo praštevil, ki jih je izračunal do 100 000 in še malo čez, ter z izrazom $x^2 + x + 1$, katerega vrednost je praštevilo kar za prvih 41 naravnih števil x. Mladi Gauss je bil prvi, ki je sprevidel, da če stoletja iskanja magične formule, katere vrednosti bi bila sama praštevila, niso rodila uspeha, potem je treba ubrati drugačen način: odkril oziroma uganil je približno formulo $\pi(N) \doteq N/\ln N$ za število praštevil $\pi(N)$, ki ne presegajo danega števila N. Ker pa tega ni znal dokazati, je bilo to odkritje zanj, ki je cenil dokaz bolj kot katerikoli matematik pred njim, tako rekoč brez vrednosti. Legendre je, resda nekaj let kasneje, a neodvisno od Gaussa, našel boljši približek $\frac{N}{\ln(N)-1.08366}$ za $\pi(N)$. Kot vzorec avtorjevega duhovitega, metaforično obarvanega sloga navedimo le en odstavek: »Gauss je naredil pomemben psihološki premik v gledanju na praštevila. Bilo je tako, kot bi prejšnje generacije poslušale glasbo praštevil noto za noto, nezmožne slišati celo kompozicijo. Ko se je namesto tega skoncentriral na štetje, koliko je praštevil do danega števila, je Gauss našel nov način, da je slišal dominantno temo.« To glasbeno metaforo o glasbi praštevil avtor kasneje še razvija in je nekakšna rdeča nit vse knjige.

Najodločilnejši korak k razumevanju razporeditve praštevil je storil Bernhard Riemann, ki ga avtor knjige imenuje »Wagner matematičnega sveta«. Riemannova hipoteza (iz leta 1859) pravi, da imajo vse netrivialne ničle zeta funkcije

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

kjer je n poljubno naravno število, realno komponento enako $1/2$. Matematiki so postopoma spoznali, da prav takšna razporeditev ničel zeta funkcije v kompleksni ravnini vpliva na to, da se zdi razporeditev praštevil med naravnimi števili tako naključna in nepredvidljiva. Riemannova hipoteza je še do danes nedokazana, njen dokaz (ali ovržba) pa bo pomembno prispevala k nadaljnjemu razvoju matematike, saj gre za enega osrednjih nerešenih problemov matematike. Po besedah Andrewa Wilesa nam bo rešitev tega problema olajšala navigacijo v matematičnem svetu, tako kot je rešitev problema geografskih dolžin omogočila raziskovalcem v 18. stoletju navigacijo v fizičnem svetu.

V knjigi je predstavljenih še mnogo zanimivih rezultatov o praštevilih, kot npr. »praštevilska formula« s 26 spremenljivkami, izraz, katerega vrednost je pri kakršnemkoli izboru vrednosti spremenljivk praštevilo, pod pogojem, da je pozitiven.

Praštevila, za katera so dolgo verjeli, da so, podobno kot teorija števil v celoti, le teoretično zanimiva, imajo v sodobnem svetu tudi pomembne praktične uporabe. Tako so npr. pomembna v modernih kriptografskih sistemih. Ta njihova uporabnost je neločljivo povezana s težavnostjo problema razcepitve produkta dveh velikih praštevil na njegova prafaktorja. Če bi matematiki našli enostavno metodo za rešitev tega problema, bi bila internetna varnost ogrožena.

Iz zgodbe o praštevilih, ki se ne omejuje zgolj na matematične rezultate, opisana so tudi življenja mnogih znamenitih matematikov, logikov in fizikov, ki so pomembno prispevali k razumevanju praštevil, se lahko naučimo, da proces odkrivanja novih izrekov, formul in dokazov v matematiki ni omejen le na logiko, domiselnost in znanje posameznih raziskovalcev, temveč je odvisen tudi od naključij, povezanih s srečanji matematikov in komunikacije med njimi (marsikatera dobra matematična ideja se utrne med pogovori ob kavi). Jasno razumevanje tega procesa prinaša uvid, da bodo v prihodnje matematični izreki (ne samo o praštevilih, ampak v matematiki na sploh) in njihovi dokazi vse bolj kompleksni, da bo pri njihovem oblikovanju sodelovalo vse več matematikov in da bodo pri njihovem dokazovanju računalniki imeli vse pomembnejšo vlogo (kot jo npr. že imajo pri računanju vse več ničel zeta funkcije). Seveda pa se bodo vedno našli tudi matematiki, ki bodo raje delali sami (kot npr. Andrew Wiles, ki je dokazal Fermatov zadnji izrek).

Knjiga je kratkočasno branje in obenem odlična motivacija za nadaljnji študij tega področja. Študentje ali nadarjeni dijaki bi lahko o posameznih poglavjih ali temah iz nje pripravili zanimive povzetke, plakate ali seminarje. Še več, glede na silno zanimivost teme, ki tako ali drugače ugaja vsem, predlagam, da slovenski matematiki razglasimo en dan v letu za *dan praštevil*, morda kar rojstni dan Jurija Vege, 23. marec.

Jurij Kovič

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 61 (2014)
številke 1–6, strani 1–240

Članki — Articles

Šola — School

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

http://www.presek.si/

Vesti — News

Nove knjige — New books

http://www.obzornik.si/

Pisma bralcev — Letters

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 2014[1]

V letu 2014 se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 13 novih članov:

2410. Renata Babič
2411. Marcel Čampa
2412. Aljoša Erman
2413. Blaž Koroša
2414. Blaž Kovačič
2415. Jernej Kovačič
2416. Lara Kozarski
2417. Maja Remškar
2418. Jonathan Skowera
2419. Aleš Toman
2420. Ciril Velkovrh
2421. Nina Zupančič
2422. Neža Žager Korenjak

Tadeja Šekoranja

Anagram

Ali je res, da

IMA TRIKOTNIK MOZAIK, BOZONI FAZE?

Odgovor na vprašanje morda najdete v glasilu Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Kako se še imenuje?

Marko Razpet

http://www.dmfa.si/

[1]Novi člani DMFA Slovenije za leto 2013 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **60** (2013) 6, stran XXIII.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, NOVEMBER 2014
Letnik 61, številka 6

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Franc Močnik in naslovnica njegovih navodil za računanje na pamet iz leta 1847. Glej prispevek na strani 220.