IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2014
Letnik 61
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 61 • ŠT. 3 • STR 81-120 • MAJ 2014

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2014, letnik 61, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

KRATEK VPOGLED V ZGODOVINO INTEGRACIJE

MARJAN JERMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01-01, 28-03, 97I50

Predstavljene so glavne ideje, ki so vodile do razvoja integracije. Zgodovinski pogled na snov ponuja intuitiven pristop k poučevanju integralov.

A SHORT INSIGHT INTO THE HISTORY OF INTEGRATION

Main ideas which led to the development of integration are presented. This historical point of view can be used as an alternative intuitive approach to teaching integrals.

Uvod

Integrali so od nekdaj obvezna snov gimnazijske matematike pri nas in po svetu. Njihovo znanje je sestavni del splošne izobrazbe za vse dijake in nuja za vse bodoče študente naravoslovja in tehnike. Pri njihovem poučevanju in nasploh pri poučevanju bolj zapletenih poglavij matematike v srednji šoli smo velikokrat v dilemi, kako narediti kompromis med strogo matematično pravilnostjo, motivacijo, intuitivnostjo in dostopnostjo.

V Ameriki je v petdesetih letih, pri nas pa nekaj let kasneje, srednješolsko matematiko zajel val tako imenovane »nove matematike«, ki je skušala matematične pojme predstaviti dijakom na najkrajši, najbolj eleganten in matematično pravilen način. Osnovni namen novih pristopov pri poučevanju matematike je bil na hiter in korekten način čim več dijakov pripraviti na študij tehnike, ki je imel zelo pomembno vlogo pri ogromnih potrebah razvijajoče se industrije po drugi svetovni vojni. Žal se novi pristop v praksi večinoma ni obnesel. Pozitivni učinek je dosegel le pri res najboljših dijakih, preostali pa so matematiko začeli dojemati kot sterilno znanost, ki je večinoma sama sebi namen. Tudi na dobrih ameriških univerzah so se še posebej predavatelji tehnike pritoževali, da matematiki na izpitih pomečejo preveč študentov, večina tistih, ki izpit uspešno opravi, pa svojega znanja ni sposobna uporabiti v praksi. Stanje je zelo lepo opisala izjava profesorja Mortona Browna z Univerze v Michiganu, ki bi jo žal prevečkrat lahko uporabili tudi danes: »*Študentje se naučijo zložiti skupaj nekaj ključnih simbolov, izjav in enačb in kompilacijo predstaviti kot sprejemljivo rešitev, ne da bi pri tem vedeli, kaj počnejo.*« Stvar je šla tako daleč, da je leta 1962 skupina 75 znanih in uspešnih matematikov z vsega sveta napisala ali sopodpisala memorandum [1] v sedmih točkah in pozvala k bistvenim spremembam.

V osemdesetih letih je prišlo do resnih poskusov reforme pouka matematike, ki bi matematiko približali širši množici dijakov in predstavili njeno uporabno vrednost. Tudi nekatere univerze so bistveno zmanjšale število slušateljev v posamezni predavalnici, v predavanja so vključili veliko grafičnih predstavitev, spodbujali so diskusijo med predavanji, v snov so vključili več praktičnih primerov, del ocene pa so predstavljali domači projekti, kjer je bistven del računanja opravil računalnik. Žal so dobronamerni poskusi pogosto vodili v precejšnjo zmedo in napake pri poučevanju, kasneje pa so pogosto ugotovili, da imajo študentje večje luknje pri razumevanju osnovnih teoretičnih konceptov. Čutiti je bilo tudi odpor učiteljev, ki so jim bile nove metode poučevanja ali tuje ali prehud izziv in so jih veliko bolj obremenjevale.

Zanimivo je, da je o pristopih pri poučevanju analize, še posebej integralov, temeljito premišljeval tudi znani matematik Otto Toeplitz (1881–1940). Svoje poglede [8] je leta 1926 v Düsseldorfu predstavil nemškemu matematičnemu društvu. Bil je velik ljubitelj in poznavalec zgodovine matematike. Zagovarjal je tako imenovani »genetski pristop« k pouku matematike, ki nove matematične pojme uvede postopoma, velikokrat s pomočjo briljantnih idej, ki so skozi zgodovino vodile do njihovih odkritij. Pri tem večinoma posamične konkretne probleme naravno vodi do njihovih posplošitev. Eno od njegovih bolj zanimivih spoznanj je tudi, da se pri obravnavi ni nujno izogibati anahronizmom, ki so v očitnem neskladju z zgodovinskim razvojem. Tako včasih za bolj jasno in enostavno matematično obravnavo na primer ni nič narobe smiselno uporabiti matematične simbole ali celo matematične pojme, ki v času reševanja problema še niso bili znani, dijakom in študentom pa so veliko bližje kot originalne včasih nerodne in dolgotrajne izpeljave.

Svoja spoznanja in praktične učiteljske izkušnje je Toeplitz dolga leta skupaj s študenti brusil in spreminjal v knjigo [9], ki naj bi postala univerzitetni učbenik začetnih poglavij analize. Knjige mu žal ni uspelo dokončati. Posthumno jo je uredil Gottfried Köthe (1905–1989). Takoj po drugi svetovni vojni je izšla v nemščini, precej preurejena pa skoraj dvajset let kasneje tudi v angleščini. Vsem, ki jih zanima poučevanje matematike, še posebej analize, toplo priporočam, da preberejo tudi izjemno informativne predgovore v angleški različici knjige, ki so jih napisali uredniki posameznih izdaj Gottfried Köthe, Alfred L. Putnam (1928–1977) in David M. Bressoud (1950).

Žal tudi genetski pristop ni idealna metoda za poučevanje integralov. Vsi trije uredniki se strinjajo, da bi bilo knjigo težko uporabiti kot učbenik za širšo populacijo. Zdi se jim primerna kot dodatek za bolj zainteresirane študente in za tiste, ki so osnovne tečaje analize že poslušali in bi radi svoje znanje videli v drugačni luči. Zelo pa se jim zdi primerna za bodoče in trenutne učitelje matematike.

Bralcem Obzornika, ki jih tema zanima, priporočam tudi Burnov članek

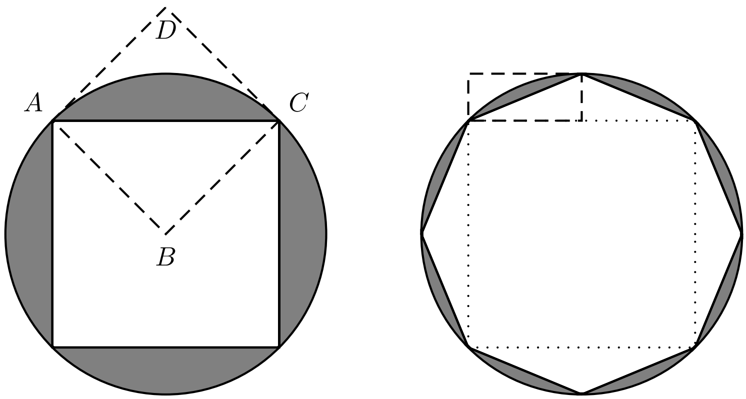
[4], ki presenetljivo izčrpno na zelo malo straneh povzame duh Toeplitzeve knjige.[1]

V naslednjih poglavjih bom poskušal predstaviti nekaj najpomembnejših in najzanimivejših korakov, ki so skozi zgodovino vodili do matematično korektne definicije integrala. Morda bo kakšna od teh idej prišla prav kateremu od učiteljev vsaj kot motivacija, zanimivost ali popestritev pri poučevanju integralov.

Ploščina kroga

Grški sofist Antifon (pribl. 5. stoletje pr. Kr.) je prvi poskušal izračunati ploščino kroga z metodo izčrpavanja ploščine. V krog je zaporedoma včrtoval pravilne večkotnike s čedalje več stranicami in trdil, da je ploščina kroga enaka ploščini ustreznega včrtanega večkotnika z neskončno stranicami.

Danes njegova razlaga ne bi vzdržala stroge matematične presoje, kljub temu pa je ideja prava, njegov rezultat pa ima trdno matematično podlago.



Slika 1. Antifonovo izčrpavanje kroga s pravilnimi 2^n-kotniki. Pri vsakem dvakratnem povečanju števila stranic zmanjšamo površino nepokritega dela za več kot dvakrat.

V krog včrtajmo kvadrat. Ker črtkani kvadrat $ABCD$ na sliki 1 levo vsebuje celoten krožni izsek ABC, je ploščina osenčenega nepokritega dela kroga manjša od ploščine včrtanega kvadrata. Zato včrtani kvadrat pokriva več kot polovico ploščine kroga.

Oglišča kvadrata in preseki simetral stranic kvadrata s krožnico so oglišča pravilnega osemkotnika, ki vsebuje kvadrat in je prav tako včrtan krogu (slika 1 desno). Podobno kot prej je ploščina osenčenega preostanka kroga

[1]Zahvaljujem se dr. Damjanu Kobalu, ki mi je priporočil ta članek.

manjša od polovice ploščine črtkanega pravokotnika. Zato smo z osemkotnikom pokrili več kot polovico dela kroga, ki bi ostal, če bi iz kroga izrezali kvadrat.

S postopkom nadaljujemo. Z indukcijo lahko dokažemo, da po vsakokratni podvojitvi števila stranic ploščino nepokritega ostanka zmanjšamo več kot za polovico. Zato je

$$p(\text{včrtanega } 2^n\text{-kotnika}) > (1 - \tfrac{1}{2^{n-1}})p(\text{kroga}). \tag{1}$$

Od tod vidimo, da je ploščina pravilnega včrtanega 2^n-kotnika poljubno blizu ploščini kroga, če je le n dovolj veliko število.

Antifonovo delo je dopolnil Brison iz Herakleje (pribl. 5. stoletje pr. Kr.), ki je krogu dodatno očrtal pravilni 2^n-kotnik in pokazal, da sta ploščini včrtanega in očrtanega 2^n-kotnika poljubno blizu, če je le n dovolj veliko število. S tem rezultatom mu je uspelo na nekaj točnih decimalnih mest izračunati tudi kasneje uvedeno konstanto π.

Z današnjim znanjem lahko Antifonov rezultat uporabimo za izračun ploščine kroga takole: Pravilni 2^n-kotnik, ki je včrtan v krog s polmerom r, je sestavljen iz 2^n skladnih enakokrakih trikotnikov s kraki dolžine r in ploščino

$$\tfrac{1}{2}(2r\sin\tfrac{\pi}{2^n}\cdot r\cos\tfrac{\pi}{2^n}) = \tfrac{1}{2}r^2\sin\tfrac{\pi}{2^{n-1}},$$

zato je ploščina pravilnega včrtanega 2^n-kotnika enaka

$$p_{2^n} = \pi\tfrac{2^{n-1}}{\pi}r^2\sin\tfrac{\pi}{2^{n-1}}.$$

Z večanjem n in upoštevanjem veljavnosti limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ dobimo, da je ploščina kroga s polmerom r enaka πr^2.

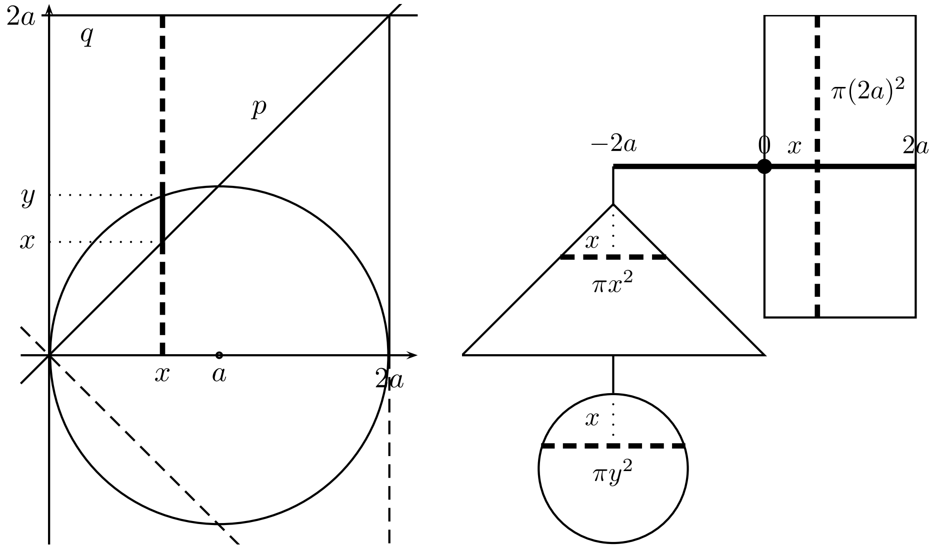
Prostornina krogle

Arhimed (287–212 pr. Kr.) je svoj izjemen občutek za naravo uporabil pri izračunu prostornine krogle. Pri tem si je pomagal z navorom in tedaj že znanima prostorninama valja in stožca.

Na tem mestu bomo zagrešili anahronizem in Arhimedovo ponekod zapleteno premišljevanje utemeljili z uporabo analitične geometrije, ki jo je izumil šele René Descartes (1596–1650) več kot tisočletje kasneje. Valj, stožec in kroglo bomo predstavili kot vrtenine.

Enačba $(x-a)^2+y^2=a^2$ predstavlja krožnico s središčem $(a,0)$ in polmerom a (slika 2 levo). Prepišemo jo lahko v obliko $x^2+y^2=2ax$. Enačba bo dobila fizikalni pomen, če jo pomnožimo s primernimi konstantami:

$$2a\cdot(\pi x^2+\pi y^2) = x\cdot\pi(2a)^2. \tag{2}$$



Slika 2. Arhimedov izračun prostornine krogle. Pri vrtenju premic $y = 2a$, $y = x$ in krožnice $x^2 + y^2 = 2ax$ okrog abscisne osi dobimo valj, stožec in kroglo. Ko stožec in kroglo obesimo na ročico $2a$, dobimo ravnovesje navorov s silo teže valja, ki je nameščen na nasprotni strani in ima za os daljico med fiksno točko in skrajno ročico $2a$.

Posamezne količine v enačbi najprej interpretiramo takole: Na sliko narišimo še premici $p\colon\ y = x$ in $q\colon\ y = 2a$. Pri vrtenju premice p, krožnice in premice q okrog abscisne osi na intervalu $[0, 2a]$ dobimo zaporedoma stožec, kroglo in valj. Količine πx^2, πy^2 in $\pi(2a)^2$ so ploščine krogov, ki so prerezi stožca, krogle in valja na oddaljenosti x od ordinatne osi.

Enačbo (2) interpretirajmo fizikalno z navorom. V $\mathbb{R}^3$ postavimo fiksno točko v izhodišče koordinatnega sistema, gugalnica pa naj leži na abscisni osi med $x = -2a$ in $x = 2a$. Prerez z ravnino $y = 0$ je narisan na sliki 2 desno. Tedaj enačba (2) pove, da dosežemo ravnovesje, če na levi strani gugalnice pri ročici $-2a$ obesimo rezino stožca πx^2 in rezino krogle πy^2, na nasprotni strani pa pri ročici $x > 0$ obesimo rezino valja $\pi(2a)^2$. Sedaj seštejmo navore vseh rezin stožca, krogle in valja v ustreznih prijemališčih. Upoštevajmo že tedaj znano dejstvo, da lahko vsoto navorov vseh rezin valja nadomestimo z navorom sile teže celotnega valja, ki prijemlje v njegovem težišču.

Če torej na levi strani na ročico dolžine $2a$ obesimo kroglo in stožec, dosežemo ravnovesje s silo teže valja, ki v celoti prijemlje pri ročici $x = a$. Demokrit (470–360 pr. Kr.) je že poznal prostornini valja in stožca. Enakost navorov zato lahko napišemo z enačbo

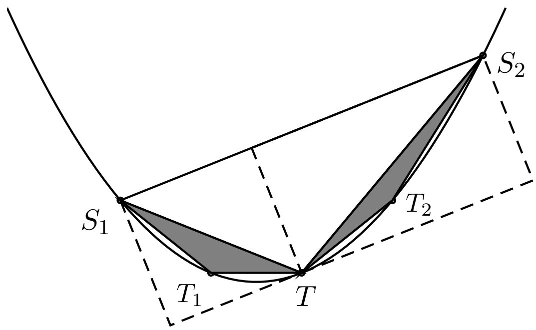
$$2a \cdot \big(\frac{\pi(2a)^2 \cdot 2a}{3} + V_{\text{krogle}}\big) = a \cdot \big(\pi(2a)^2 \cdot 2a\big),$$

iz katere izračunamo, da je prostornina krogle s polmerom a enaka

$$V_{\text{krogle}} = \tfrac{4}{3}\pi a^3.$$

Kvadratura parabole

Arhimed je samo s pomočjo elementarne geometrije izračunal tudi ploščino parabole pod njeno sekanto. Sledili bomo njegovim idejam, zaradi enostavnejše obravnave pa si bomo zopet pomagali s koordinatnim sistemom.



Slika 3. Arhimedova kvadratura parabole.

Naj bosta $S_1(a, a^2)$ in $S_2(b, b^2)$, $a < b$, točki na paraboli, podani z enačbo $y = x^2$ (slika 3). Izračunali bomo ploščino p lika, ki ga od parabole odreže sekanta S_1S_2. Liku bomo najprej včrtali trikotnik, nato pa bomo nepokriti del zapolnili s čedalje manjšimi trikotniki.

Prvi, največji včrtani trikotnik naj ima za oglišča točki S_1, S_2 in dotikališče T tiste tangente na parabolo, ki je vzporedna sekanti S_1S_2. Tangenta na parabolo v točki $T(x, x^2)$, ki je vzporedna sekanti S_1S_2, ima naklon

$$2x = \tfrac{b^2-a^2}{b-a} = b + a,$$

zato gre skozi sredinsko točko $T(\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2)$.

Na primer s pomočjo koordinat lahko izračunamo, da je ploščina trikotnika S_1TS_2 enaka

$$p_1 = \big(\tfrac{b-a}{2}\big)^3. \tag{3}$$

Diagonali S_1T in TS_2 črtkanih pravokotnikov na sliki 3 razdelita ustrezna pravokotnika na ploščinsko enaka dela. Zato trikotnik S_1TS_2 pokriva več kot polovico lika, ki ga določata parabola in sekanta.

V nadaljevanju v levi in desni nepokriti del parabole na enak način včrtamo trikotnika. Prvi manjši včrtani trikotnik S_1T_1T je določen s točkama S_1, T in točko T_1 na paraboli, kjer je tangenta na parabolo vzporedna sekanti S_1T. Podobno je desni trikotnik TT_2S_2 določen s točkama T in S in točko T_2, kjer je tangenta vzporedna sekanti TS_2.

Enačba (3) pove, da je ploščina vsakega tako včrtanega trikotnika enaka kubu polovice dolžine projekcije ustrezne sekante na abscisno os. Zato je ploščina vsakega od trikotnikov S_1T_1T in TT_2S_2 enaka

$$p_2 = \left(\tfrac{1}{2}\tfrac{b-a}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{2^3}p_1.$$

Postopek nadaljujemo s štirimi še manjšimi trikotniki nad sekantami S_1T_1, T_1T, TT_2 in T_2S_2, nato z ustreznimi osmimi trikotniki in tako naprej. Vsakič z novimi trikotniki pokrijemo več kot polovico preostanka ploščine, ki je še ne pokrivajo trikotniki iz prejšnjih korakov.

Ploščina parabole pod sekanto S_1S_2 je manjša od vsote ploščin včrtanih disjunktnih trikotnikov, zato je

$$p \geq p_1(1 + 2 \cdot \tfrac{1}{2^3} + 4 \cdot \tfrac{1}{4^3} + \cdots) = p_1 \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{4^k} = \tfrac{4}{3}p_1. \tag{4}$$

Po drugi strani z novimi trikotniki vsakič pokrijemo več kot polovico nepokritega dela parabole:

$$p < 2p_1,\; p < p_1 + 2 \cdot 2p_2,\; p < p_1 + 2p_2 + 2 \cdot 4p_3,\; \ldots$$

Zato za poljubno število n velja tudi

$$p \leq p_1(1 + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{4^{n-1}} + 2\tfrac{1}{4^n}). \tag{5}$$

Ker sta si vsoti v ocenah (4) in (5) poljubno blizu, smo s tem izračunali ploščino parabole pod sekanto S_1S_2, $p = \frac{4}{3}p_1$.

Na poti k osnovnemu izreku analize

Nikolaj Oresme (pribl. 1320–1382) je bil eden od najbolj aktivnih in bistrih srednjeveških mislecev. Med drugim je prvi dokazal divergenco harmonične vrste.

Nas bo najbolj zanimalo njegovo delo na področju kinematike. Da bi lahko grafično predstavil hitrost v vsakem času gibanja, je izumil stolpčne diagrame. Kar je danes videti samoumevno, je bilo v tistih časih, ko še niso poznali koncepta funkcije in koordinatnega sistema, revolucionarno odkritje. Privzel je, da se telo na posameznem časovnem intervalu giblje s konstantno hitrostjo. Nato je nad vodoravno os nanašal pravokotnike, katerih širina *(intensio, latitudo)* je bila sorazmerna času, višina *(extensio, longitudo)* pa hitrosti, ki jo je imelo telo na tem časovnem intervalu (slika 4 levo).

Slika 4. Na levi sliki so Oresmejevi diagrami, ki so predhodniki pojmov funkcije in koordinatnega sistema, na desni pa je Galilejev dokaz izreka o srednji hitrosti.

Med preučevanjem teh stolpčnih diagramov je ugotovil, da je vsota ploščin vseh pravokotnikov enaka dolžini prevožene poti. Če bi dovolili zelo kratke časovne intervale, bi lahko njegov rezultat interpretirali takole:

$$\int_a^b s'(t)\,dt = s(b) - s(a).$$

Prav tako je s pomočjo interpretacije diagramov izpeljal *izrek o srednji hitrosti,*[2] ki pove, da enakomerno pospešeno telo naredi enako pot kot telo, ki se istočasno giblje enakomerno s hitrostjo, ki je enaka polovici končne hitrosti pospešenega telesa. Zelo nazoren intuitiven dokaz sledi iz interpretacije enakih ploščin v stolpčnem diagramu. Enak dokaz je podal tudi Galileo Galilei (1564–1642) več kot dvesto let kasneje (slika 4 desno).

Modernizacija metode izčrpavanja

Luca Valerio (1552–1618) se je sistematično lotil računanja težišč, ploščin in prostornin. Pri računanju se ni omejil le na klasične like in telesa. Izračunati je znal prostornine teles, ki imajo veliko simetrije ali pa nastanejo z rotacijo.

[2]Izrek so odkrili matematiki z Merton Collega v Oxfordu okrog leta 1330 in ga zato pogosto imenujemo tudi Mertonov izrek o srednji hitrosti. Walter de Merton (1205–1277) je bil sicer politik, po katerem so poimenovali kolidž.

Pri računanju je antično metodo izčrpavanja pripeljal bližje definiciji Riemannovega integrala. Glede na današnje standarde je malo nerodno napisal: *»Če ravninskemu liku pada širina z obeh strani, mu lahko včrtamo in očrtamo lik, ki je sestavljen iz samih pravokotnikov, pri tem pa se ploščini včrtanega in očrtanega lika poljubno malo razlikujeta.«* Težje razumljivo zahtevo, da širina pada z obeh strani, bi lahko interpretirali z računanjem ploščine pod krivuljo, ki do neke točke raste, potem pa pada. Analogno trditev za prostornino pod ploskvijo je napisal tudi za telesa.

Zapleteno metodo izčrpavanja, ki potrebuje posredno dokazovanje s protislovjem, je prvi skušal prevesti na enostavnejše direktno sklepanje Simon Stevin (1548–1620). S pomočjo Aristotelovih silogizmov je pokazal, da sta količini, ki sta si poljubno blizu, v resnici enaki.

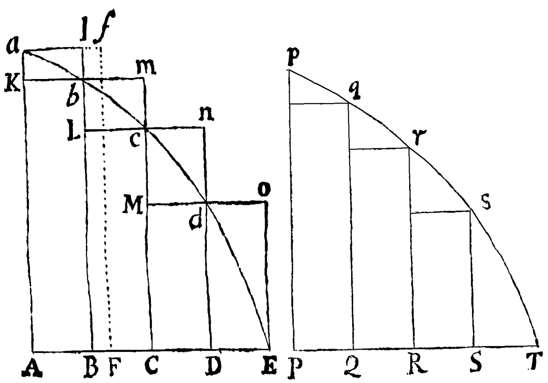
Valerio se je posrednemu sklepanju izognil s premislekom, ki bi ga v današnjem jeziku interpretirali takole: Če za neka konvergentna zaporedja $(a_n)_n$, $(a'_n)_n$, $(b_n)_n$ in $(b'_n)_n$ z neničelnimi členi in limitami a, $a' \neq 0$, b in $b' \neq 0$ velja

$$\frac{a_n}{a'_n} = \frac{b_n}{b'_n} \qquad \text{za vse } n \in \mathbb{N},$$

potem je tudi

$$\frac{a}{a'} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b'_n} = \frac{b}{b'}.$$

Naj bosta L in L' lika, v katera včrtujemo in okrog katerih očrtujemo čedalje boljše aproksimacije z unijo pravokotnikov. Če sta ploščini a_n in a'_n v L in v L' včrtane unije pravokotnikov in ploščini b_n in b'_n očrtane unije vedno v enakem razmerju, sta v istem razmerju tudi ploščini likov L in L'. To



Slika 5. Skica pri četrti lemi v prvi knjigi Newtonovih Principov: Lika sta v enakem ploščinskem razmerju kot ploščine njunih včrtanih in očrtanih unij pravokotnikov.

je vsebina četrte leme v prvi knjigi Newtonovih Principov[3] (slika 5) in kasneje poimenovano *Cavalierijevo načelo,* ki v ravninskem primeru pravi: Če imata lika, ki se nahajata med dvema vzporednima premicama, enako dolge preseke z vsako vmesno vzporedno premico, sta ploščini likov enaki. Danes lahko gledamo na Cavalierijevo načelo kot na poseben primer Fubinijevega[4] izreka.

Infinitezimale in nedeljive količine

Johann Kepler (1571–1630) je sicer dobro poznal grško matematiko in njene stroge standarde dokazovanja, a je bil zelo praktičen znanstvenik, ki je bil za ceno rezultatov pripravljen zamižati na eno oko v primerih, ko z metodami 17. stoletja ni bilo mogoče korektno rešiti kakšnega od težjih problemov. Praktične potrebe pri računanju prostornin sodov so pripeljale do mnogih novih metod in rezultatov, ki jih je leta 1615 objavil v knjigi *Nova stereometrija.* Like in telesa je rezal na infinitezimalno majhne ne nujno vzporedne koščke različnih oblik. S pomočjo izjemne intuicije mu je uspelo kljub zelo liberalnemu delu z infinitezimalno majhnimi količinami vedno priti do pravilnih rezultatov.

Zvezo med površino in prostornino krogle je recimo dobil takole: Najprej je površino krogle razrezal na zelo majhne disjunktne koščke. Te koščke si je predstavljal kot osnovne ploskve nekakšnih stožcev s skupnim vrhom v središču krogle. S tem je kroglo razrezal na te neobičajne stožce. Ko je seštel prostornine vseh stožcev, so se površine njihovih osnovnih ploskev seštele v površino krogle. S povečevanjem števila stožcev so postale njihove osnovne ploskve skoraj ravne, zato je za prostornino teh stožcev vzel kar prostornino običajnega stožca. Tako je dobil

$$V_{\text{krogle}} = \frac{r}{3}(S_1 + S_2 + \ldots) = \frac{r}{3} S_{\text{krogle}}.$$

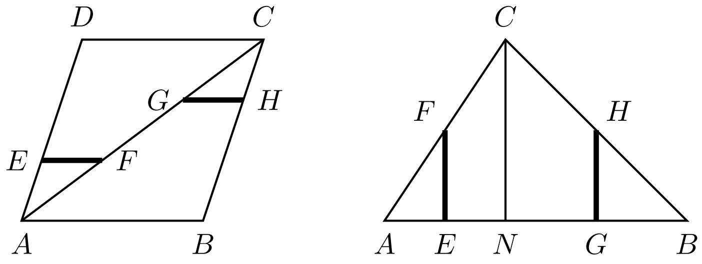
Iz Arhimedovega rezultata za volumen krogle tako lahko izračunamo površino krogle $S_{\text{krogle}} = 4\pi r^2$. Skupaj je Kepler izračunal prostornine 96 teles, ki nastanejo z vrtenjem delov stožnic okrog različnih osi.

Galileo Galilei (1564–1642) je trdil, da je zvezna snov sestavljena iz neskončno kosov nedeljivih delov, do katerih pa ne moremo priti z zaporednim drobljenjem snovi. Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647) je njegovo idejo uporabil tako, da je vsak lik predstavil kot neskončno unijo vzporednih daljic, ki so tako tanke, da jih ne moremo več razdeliti na tanjše dele.

S pomočjo te predstave je recimo pokazal, da imata trikotnika, na katera deli diagonala paralelogram, enako ploščino. Naj bo $ABCD$ paralelogram

[3] Isaac Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica*

[4] Guido Fubini (1879–1943)



Slika 6. Levo je Cavalierijev dokaz, da imata trikotnika, na katera z diagonalo razpade paralelogram, enako ploščino. Desno je primer, kjer metoda ne deluje.

z diagonalo AC (slika 6 levo). Trikotnika ACD in ABC sta sestavljena iz daljic, ki so vzporedne osnovnici AB. Vsaki daljici $EF \parallel AB$, $E \in AD$, $F \in AC$, lahko najdemo natanko eno enako dolgo daljico $GH \parallel AB$, $G \in AC$, $H \in BC$, in obratno. Ker sta trikotnika ACD in ABC sestavljena iz enakih daljic, imata enako ploščino.

Pri previdni uporabi je Cavalierijeva metoda z nekaj sreče vodila do pravilnih rezultatov. Zelo kmalu pa je metoda doživela resne kritike, ko so njegovi sodobniki, med njimi na primer Evangelista Torricelli (1608–1647), našli primere, pri katerih metoda ne deluje pravilno.

Vzemimo recimo neenakokrak trikotnik ABC z osnovnico AB in ga z višino NC razdelimo na trikotnika ANC in NBC (slika 6 desno). Enako kot prej lahko oba trikotnika sestavimo iz daljic, ki so vzporedne višini NC. Vsaki navpični daljici EF v trikotniku ANC lahko najdemo natanko eno enako dolgo navpičnico GH v trikotniku NBC in obratno, vendar trikotnika ANC in NBC očitno nimata enake ploščine.

Z današnjim znanjem analize se da lepo razložiti, zakaj Cavalierijeva metoda enkrat deluje, drugič pa ne. Če si nedeljive daljice predstavljamo kot zelo tanke letvice, ki sestavljajo trikotnike, sta v levem primeru letvici EF in GH enako dolgi in enako visoki. V desnem primeru pa sta letvici EF in GH sicer enako visoki, njuna širina pa je v razmerju $AN : NB$. V današnjem jeziku bi rekli, da v primeru, ko daljici AN in NB parametriziramo s spremenljivko t na intervalu $[0, 1]$, enkrat seštevamo ploščine pravokotnikov z osnovnico $AN \cdot dt$, drugič pa ploščine pravokotnikov z osnovnico $NB \cdot dt$.

Ploščina pod krivuljo

Descartes je v tem času povzročil revolucijo v matematiki z uvedbo koordinatnega sistema. Sam je zaradi nekonsistentnosti zavračal uporabo infinitezimalnih količin.

Arhimedov antični rezultat o kvadraturi parabole pove, da je ploščina med parabolo $y = x^2$ in sekanto $y = a^2$ enaka štirim tretjinam ploščine včrtanega trikotnika, $\frac{4}{3}\frac{2a \cdot a^2}{2} = \frac{4}{3}a^3$, zato je ploščina pod krivuljo $y = x^2$ na intervalu $[0, a]$ enaka

$$\tfrac{1}{2}(2a \cdot a^2 - \tfrac{4}{3}a^3) = \tfrac{1}{3}a^3.$$

Cavalieri je skušal priti do enakega rezultata s pomočjo novih orodij. Interval $[0, a]$ je razdelil na n enakih delov in nad vsakim delom včrtal in očrtal pravokotnik. Tako je v bistvu ponovno uporabil antično metodo izčrpavanja. Ker parabola narašča, je spodnja ocena za ploščino p pod krivuljo enaka

$$\tfrac{a}{n}\big(0 + (\tfrac{a}{n})^2 + (\tfrac{2a}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{(n-1)a}{n})^2\big),$$

zgornja pa

$$\tfrac{a}{n}\big((\tfrac{a}{n})^2 + (\tfrac{2a}{n})^2 + (\tfrac{3a}{n})^2 + \ldots + (\tfrac{na}{n})^2\big).$$

Z uporabo tedaj že znane formule $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ je tako dobil oceno

$$\frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3} < p < \frac{a^3 n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Takrat sicer še niso poznali koncepta limite, a je bilo Cavalieriju jasno, da od tod sledi pričakovani rezultat $p = \frac{1}{3}a^3$. Podobno je s pomočjo znanih formul za vsoto potenc zaporednih števil izračunal ploščine pod krivuljami $y = x^n$ za $n \leq 9$.

S pomočjo izjemnih izkušenj z analitično geometrijo je Pierre de Fermat (1601–1665) izračunal ploščino pod krivuljo $y = x^m$ tudi v primeru, ko je $m > -1$ realno število. Pokažimo le, kako se je lotil spodnjih vsot (slika 7). Najprej je izbral pozitivno število $\rho < 1$ in interval $(0, a]$ razbil na neskončno različno dolgih podintervalov oblike $(a\rho^i, a\rho^{i-1}]$, $i \in \mathbb{N}$. Vsota ploščin nad temi intervali včrtanih pravokotnikov je enaka

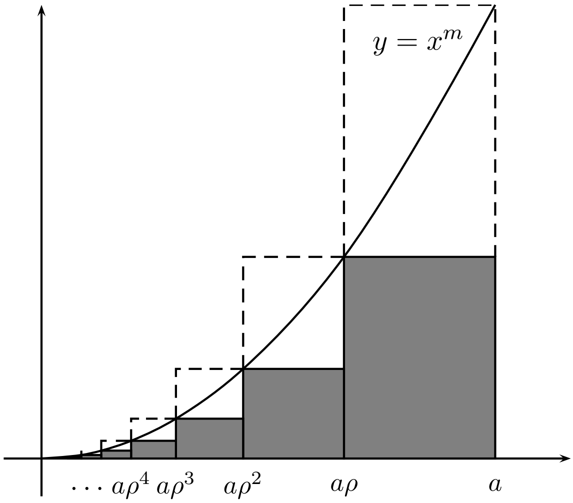
$$S = \sum_{i=1}^{\infty}(a\rho^{i-1} - a\rho^i)(a\rho^i)^m =$$

$$= a^{m+1}\rho^m(1-\rho)\sum_{i=1}^{\infty}(\rho^{m+1})^{i-1} = \frac{a^{m+1}\rho^m(1-\rho)}{1-\rho^{m+1}}.$$

Zadnja enakost drži, ker zaradi $m > -1$ velja $\rho^{m+1} < 1$ in zato vrsta konvergira.

V primeru, ko je m naravno število, lahko zadnjo enakost preoblikujemo v obliko

$$S = \frac{a^{m+1}\rho^m}{1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m}.$$



Slika 7. Fermatov izračun integrala potenčnih funkcij s pomočjo različno dolgih podintervalov.

Ko pošljemo ρ proti 1, dobimo Cavalierijev rezultat za poljubno naravno število m brez uporabe vsote potenc zaporednih naravnih števil.

Če pa m ni naravno število, je v današnjem jeziku treba izračunati limito

$$\lim_{\rho\to 1} \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho},$$

ki je enaka odvodu funkcije $y = x^{m+1}$ v točki 1. To je Fermat po vseh izkušnjah z iskanjem tangent vedel in dobil rezultat, ki ga danes napišemo kot

$$\int_0^a x^m\,dx = \tfrac{1}{m+1}a^{m+1},\ m > -1.$$

Ideja z izbiro različno dolgih intervalov je verjetno prišla iz njegovih izkušenj pri računanju ploščine pod krivuljo $y = \frac{1}{x^2}$ na neskončnem intervalu $[a, \infty)$.

Osnovni izrek analize

Osnovni izrek analize po navadi povemo takole: Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, $x \in [a, b]$ in je

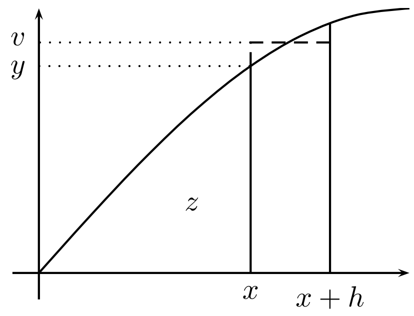
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

potem je F odvedljiva in $F' = f$ na intervalu (a, b).

Drugače: če je F primitivna funkcija na intervalu $[a, b]$ zvezne funkcije f, je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Prvi je osnovni izrek analize zapisal James Gregory (1638–1675). V razširjeni verziji ga je objavil Isaac Barrow (1630–1677), njegov učenec Isaac Newton (1643–1727) pa je izrek vključil v matematični kontekst. Napišimo njegov dokaz v modernem jeziku.



Slika 8. Skica k Newtonovemu dokazu osnovnega izreka analize.

Naj bo f nenegativna funkcija, za katero velja $f(0) = 0$. Za $x > 0$ naj bo $y = f(x)$, $h > 0$ pa infinitezimalno majhno število. Naj bo z ploščina pod krivuljo $y = f(x)$ na intervalu $[0, x]$ (slika 8). Izberimo število v, za katero je ploščina pravokotnika s stranico h in višino v enaka ploščini pod krivuljo na intervalu $[x, x+h]$. Ploščina pod krivuljo na intervalu $[0, x+h]$ je enaka vsoti ploščin na intervalih $[0, x]$ in $[x, x+h]$, zato je enaka $z + hv$. Če povečanje ploščine hv delimo z ustreznim povečanjem abscise h, dobimo v. Ker je h infinitezimalno majhno število, lahko vzamemo, da je enako 0, zato je $v = y$ in $\frac{dz}{dx} = y$.

Če prevedemo ploščinske in infinitezimalne argumente v današnji jezik, bomo opazili, da dokaz potrebuje zveznost funkcije f. Glede na argumente v dokazu je Newton verjetno dodatno implicitno privzel, da je funkcija f monotona. Zveznost sta definirala šele Bernard Bolzano (1781–1848) in Augustin-Louis Cauchy (1789–1857).

Po izreku o srednji vrednosti za zvezno funkcijo f obstaja število $\xi_h \in (x, x+h)$, da je

$$v = f(\xi_h) = \tfrac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Sedaj ponovno zaradi zveznosti f velja

$$z'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{z(x+h) - z(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x) = y.$$

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), ki je uvedel današnjo notacijo za odvode in integrale, je prvi poudaril, da rezultat pove povezavo med določenim integralom in primitivno funkcijo. Interpretacija je tako močno vplivala na poučevanje, da večina dijakov še danes napačno razume določeni integral kot obratno operacijo k odvajanju.

Definicija določenega integrala

George Berkeley (1685–1753) je prvi resno podvomil o logičnih temeljih Newtonove analize. Zapisal je, da tedanji analizi kljub pravilnim rezultatom, ki jih daje, ne moremo zaupati nič bolj kot religiji. Še posebej so ga zmotile neskončno majhne količine, ki jih je primerjal z duhovi umrlih količin. Takrat običajni izračun odvoda funkcije $f(x) = x^2$ je šel recimo takole:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2x \cdot dx + (dx)^2}{dx} = 2x + dx.$$

Potem so na dx nekako pozabili, ker je bilo poljubno majhno število, in dobili $f'(x) = 2x$. Berkeley je pri izračunu ponudil dve možnosti: bodisi je $dx = 0$ in z njim ne smemo deliti bodisi je $2x + dx \neq 2x$, kar pomeni, da je izračun odvoda napačen.

Veliko izjemnih matematikov je skoraj stoletje neuspešno poskušalo utrditi temelje analize, zares pa je uspelo Cauchyju in Karlu Weierstrassu (1815–1897) s korektno definiranima pojmoma limite in odvoda. Tako danes odvod funkcije $f(x) = x^2$ v točki x_0 izračunamo kot limito

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0.$$

Zanimivo je, da je Abraham Robinson (1918–1974) šele leta 1966 logično pravilno definiral infinitezimalno majhne količine kot primerne ekvivalenčne razrede zaporedij realnih števil. Robinsonova nestandardna analiza sicer opravičuje klasično računanje z infinitezimalnimi količinami brez danes običajnega ukvarjanja z ε in δ, a je tako nenavadna, da se ni uveljavila niti v poučevanju niti v raziskovanju.

Pred prvo korektno definicijo določenega integrala je prav, da se zavedamo motivacije takratnih matematikov. Integral jim je pomenil ploščino pod grafom funkcije, kot funkcijo pa so si predstavljali predpis $y = f(x)$, ki je bil v večini primerov elementarna funkcija, zagotovo pa zvezna in pogosto tudi nenegativna ter monotona funkcija na integracijskem intervalu. Da so lahko »smiselne« funkcije tudi drugačne, so se zavedeli šele, ko se je pojavila potreba po integraciji vsot Fourierovih vrst.

Cauchy je opazil, da se z ožanjem osnovnic pravokotnikov, ki imajo osnovnico na abscisni osi in so včrtani grafu, vsota njihovih ploščin približuje ploščini pod grafom. Določeni integral je definiral za zvezno funkcijo f na zaprtem intervalu $[a, b]$ kot limito vsot oblike

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}), \tag{6}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

ko gre širina najširšega podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ proti 0. Nato je pokazal, da takšna limita vedno obstaja. Natančen pregled njegovega dokaza pokaže, da je intuitivno pravilen, implicitno pa privzema polnost množice realnih števil, pojem, ki takrat še ni bil znan.

Bernhard Riemann (1826–1866) je določeni integral posplošil na nezvezne funkcije. V primeru, ko je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ in so $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ za $i = 1, \ldots, n$, je izbor $\mathcal{D} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i);\ i = 1, \ldots n\}$ poimenoval *označena delitev* s širino $\max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$. Za funkcijo f na intervalu $[a, b]$ je nato definiral vsoto

$$R(f, \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Funkcija f je *Riemannovo integrabilna* na intervalu $[a, b]$ in njen integral je enak I, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako označeno delitev $\mathcal{D}$ s širino, manjšo kot δ, velja

$$|R(f, \mathcal{D}) - I| < \varepsilon.$$

Pri nas običajno definiramo integral s primerjavo spodnjih in zgornjih vsot. To definicijo, ki temelji na antičnem izčrpovanju ploščine, je podal Jean-Gaston Darboux (1842–1917). Lahko je videti, da je definicija ekvivalentna Riemannovi.

Izkaže se, da je omejena funkcija Riemannovo integrabilna natanko tedaj, ko je zvezna skoraj povsod. *Zveznost skoraj povsod* pomeni, da za vsako (poljubno majhno) število $\varepsilon > 0$ točke nezveznosti ležijo v števni uniji primerno izbranih odprtih intervalov (a_i, b_i) s skupno dolžino $\sum_i |b_i - a_i| < \varepsilon$. Tako na primer Dirichletova funkcija $\chi_{\mathbb{Q}}$, ki je enaka 1 na množici racionalnih števil in 0 drugje, ni zvezna v nobeni točki, zato ni Riemannovo integrabilna. Karl Johannes Thomae (1840–1921) je Dirichletovo funkcijo predelal v funkcijo

$$\tau(x) = \begin{cases} 0; & x \in \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}); \\ \frac{1}{q}; & x = \text{okrajšan ulomek } \frac{p}{q},\ q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

ki je nezvezna le v vsaki neničelni racionalni točki, zato je Riemannovo integrabilna na vsakem intervalu.[5]

Če je funkcija integrabilna v Riemannovem smislu, se za vsako dovolj drobno delitev Riemannova vsota malo razlikuje od določenega integrala, ne glede na izbiro označenih točk. Če torej iz Cauchyjeve definicije izpustimo zahtevo po zveznosti funkcije f, je vsaka Riemannovo integrabilna funkcija integrabilna tudi v Cauchyjevem smislu. Težje je videti, da za omejene funkcije velja tudi obratno.

Praktične probleme, ki so se pojavili pri integraciji bolj neobičajnih funkcij, recimo vsot Fourierovih vrst in funkcij, ki se naravno pojavljajo v verjetnostnem računu, je uspelo rešiti Henriju Léonu Lebesgueu (1875–1941) z vpeljavo merljivih množic in aproksimacijo z enostavnimi funkcijami. V precej površni interpretaciji bi si lahko predstavljali, da pri Riemannovem integralu najprej razdelimo abscisno os na podintervale in seštejemo ploščine pokončnih pravokotnikov, ki imajo te podintervale za osnovnico, pri Lebesgueovem integralu pa najprej na podintervale razdelimo zalogo vrednosti in za osnovnice ležečih pravokotnikov vzamemo ustrezne praslike. V Lebesgueovem smislu je integrabilna tudi Dirichletova funkcija $\chi_{\mathbb{Q}}$. Njen integral na intervalu $[0, 1]$ je enak 0.

LITERATURA

[1] L. V. Ahlfors, ..., A. Wittenberg, *On the mathematics curriculum of the high school*, American Mathematical Monthly **69** (1962), 189–193.

[2] W. S. Anglin, *Mathematics: a concise history and philosophy*, Undergraduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.

[3] M. E. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus*, Dover Phoenix Editions, 2003.

[4] R. P. Burn, *Integration, a genetic introduction*, Nordisk Mat. Did., April 1999, 7–27.

[5] E. Carruccio, *Mathematics and logic in history and in contemporary thought*, New Brunswick, NJ Aldine 2006.

[6] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *The MacTutor history of mathematics archive*, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk`

[7] O. A. Hernandez Rodriguez, J. M. Lopez Fernandez, *Teaching the fundamental theorem of calculus: a historical reflection – Newton's proof of the FTC*, Loci, January 2012.

[8] O. Toeplitz, *Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **36** (1927), 88–99.

[9] O. Toeplitz, *The calculus, a genetic approach*, The University of Chicago Press, 1963.

[5] Množica $\mathbb{Q}$ je števna, zato lahko točke nezveznosti funkcije τ postavimo v zaporedje $(a_n)_n$. Vsak člen a_n zaporedja leži v odprtem intervalu $(a_n - 2^{-n-2}\varepsilon, a_n + 2^{-n-2}\varepsilon)$ z dolžino $2^{-n-1}\varepsilon$. Vsota dolžin intervalov je enaka $\frac{1}{2}\varepsilon$.

VEGOVI PROFESORJI IN NJEGOVA OCENA PRI MATEMATIKI[1]

STANISLAV JUŽNIČ

Math. Subj. Class. (2010): 01A50

Prispevek obravnava na novo odkrito Vegovo visokošolsko oceno iz matematike. Vegov profesor matematike je bil leta 1774 Jožef Maffei, pomočnik Gabrijela Gruberja. Podane so službene težave Maffeija in Gruberja ob vzrokih za njun odhod iz Ljubljane.

VEGA'S PROFESSORS AND HIS SCORE IN MATHEMATICS

The newly discovered student Georg Vega's mark in mathematics is put in the limelight. In 1774 his teacher of mathematics was Josef Maffei, the assistant of Gabriel Gruber. The official troubles and reasons for Maffei and Gruber's later departure from Ljubljana are discussed.

Uvod

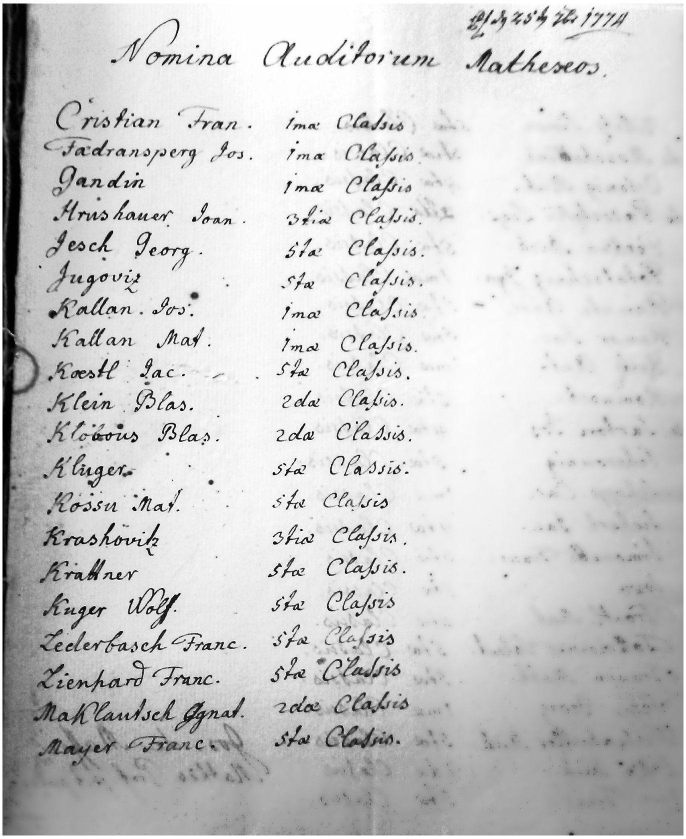
Jurij Vega je svoje študije docela opravil pri ljubljanskih jezuitih. Kakšen je bil njegov učni uspeh? Kako so na Vegov študij vplivala trenja med njegovimi profesorji?

Vegovi profesorji

Poglavitni Vegov profesor je bil Gabrijel Gruber, ki je med letoma 1802–1805 kot general utemeljil obnovo Družbe Jezusove. Novi papež Frančišek, prvič v zgodovini jezuit, je krona prizadevanj za obnovo Družbe Jezusove.

Drugi veliki Gruberjev uspeh je bil vzgoja matematika Jurija Vege. Potem ko ga je dodobra izuril v ljubljanskih šolskih klopeh, ga je še nadaljnjih pet let zaposloval kot navigacijskega inženirja pri vzdrževanju plovnosti reke Mure na Štajerskem. Gruber je izučil veliko brodarskih inženirjev in ladijskih kapitanov; številne svoje študente je zaposlil na posameznih odsekih reke Mure za urejanje plovbe. Najpomembnejši med njimi je bil Jurij Vega, za njim pa nista veliko zaostajala brata Jožef Marija Šemerl (Schemerl) in Andrej Šemerl, prav tako pa ne Gruberjev mlajši brat Anton Gruber. Jožef Šemerl je po Gruberjevem odhodu za dve leti prevzel Gruberjevo katedro in risarsko šolo pri liceju. Med najbolj nadarjenimi ljubljanskimi učenci G. Gruberja je bil Mariborčan Leopold Hofer, ki je po Gruberjevem priporočilu leta 1771 postal ljubljanski stavbni mojster.

[1] Ob proslavi dvestoletnice obnove Družbe Jezusove, pri kateri se je Vega šolal do leta 1773



Nomina Auditorum Matheseos.

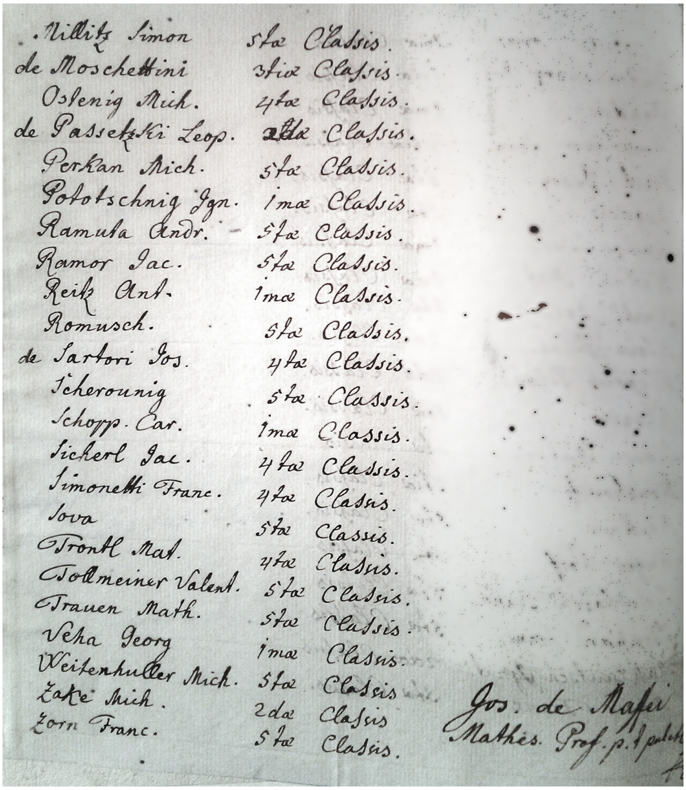
Cristian Fran. 1mæ Classis
Fædransperg Jos. 1mæ Classis
Gandin 1mæ Classis
Hrushauer Joan. 3tiæ Classis.
Jesch Georg. 5tæ Classis.
Jugoviz 5tæ Classis.
Kallan. Jos. 1mæ Classis
Kallan Mat. 1mæ Classis.
Koestl Jac. 5tæ Classis.
Klein Blas. 2dæ Classis.
Klobous Blas. 2dæ Classis.
Kluger. 5tæ Classis.
Kossu Mat. 5tæ Classis
Krashoviz 3tiæ Classis.
Krattner 5tæ Classis.
Kuger Wolf. 5tæ Classis
Lederbasch Franc. 5tæ Classis
Lienhard Franc. 5tæ Classis
Maklautsch Ignat. 2dæ Classis
Mayer Franc. 5tæ Classis.

Slika 1. Prvi del ocen Vegovih sošolcev pri matematiki; dne 25. 9. 1774 je ocenjeval Jožef Maffei, pomočnik G. Gruberja (Vir: Arhiv Republike Slovenije, AS 7 Deželno glavarstvo za Kranjsko, Publico-Politica, š. 70, Lit S, No 19, Vol 2, Schul- und Studien Sachen Anno 1774).

Študent Vega

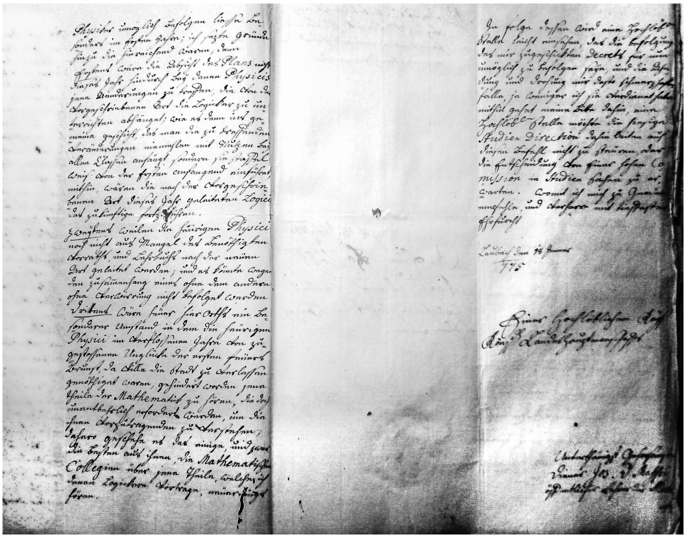
Vega je poslušal Maffeijeva predavanja iz matematike v prvem letniku filozofskih študijev leta 1773/74. Dne 25. 9. 1774 mu je Maffei prisodil najvišjo oceno, prvi razred; enka je bila njega dni seveda najvišji red. V tistem času redovalnice niso bile takšne kot danes. Zato nas ne sme presenetiti navidezna okornost tedanjih dokumentov.

Vega je imel v prvem letniku visokošolskih študijev v Ljubljani dvainštirideset sošolcev. Krivulja ocenjevanja pri profesorju Maffeiju je bila približno normalna, čeprav je bil njen avtor Gauss, rojen komaj poltretje leto pozneje. Poleg Vege je še osem sošolcev dobilo najboljšo oceno; ni manjkalo niti tistih z najslabšo (petim razredom), ki pa Maffeiju zagotovo ni bila všeč.


Nillitz Simon 5tae Classis.
de Moschettini 3tiae Classis.
Ostenig Mich. 4tae Classis.
de Passetzki Leop. 2dae Classis.
Perkan Mich. 5tae Classis.
Pototschnig Ign. 1mae Classis.
Ramuta Andr. 5tae Classis.
Ramor Jac. 5tae Classis.
Reitz Ant. 1mae Classis.
Romusch. 5tae Classis.
de Sartori Jos. 4tae Classis.
Tscherounig 5tae Classis.
Schopp. Car. 1mae Classis.
Sicherl Jac. 4tae Classis.
Simonetti Franc. 4tae Classis.
Sova 5tae Classis.
Trontl Mat. 4tae Classis.
Tollmeiner Valent. 5tae Classis.
Trauen Math. 5tae Classis.
Veha Georg 1mae Classis.
Weitenhuller Mich. 5tae Classis
Zake Mich. 2dae Classis
Zorn Franc. 5tae Classis.
Jos. de Maffei
Mathes. Prof. p. t publ.

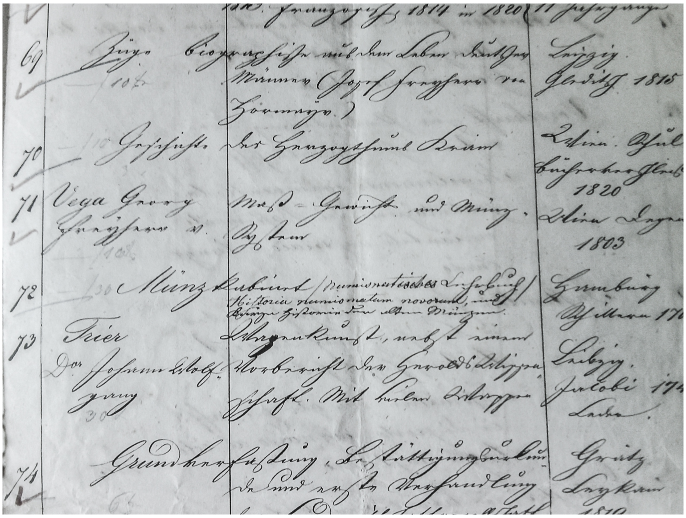
Slika 2. Jurij Vega (Georg Veha) je bil zapisan četrti od spodaj kot eden od devetih med triinštiridesetimi slušatelji matematike z najboljšo oceno iz matematike pri Jožefu Maffeiju, pomočniku G. Gruberja, dne 25. 9. 1774 na drugi strani »redovalnice«. Tisti čas je bila najboljša ocena seveda – enka (Vir: Arhiv Republike Slovenije, AS 7 Deželno glavarstvo za Kranjsko, Publico-Politica, š. 70, Lit S, No 19, Vol 2, Schul- und Studien Sachen Anno 1774).

Maffei je imel kot nekdanji jezuit v času Vegovega študija že huda prerekanja s študijsko komisijo (*Direktion in Studien Wesen*), ki jo je vodil ljubljanski knezoškof Karel Herberstein (1719–1787) od oktobra 1774 do konca leta 1778. Dotedanja jezuitska oblast v študijskih zadevah je bila po prepovedi jezuitov leta 1773 v breme nekdanjim jezuitom; med njimi so bili ljubljanski profesorji Maffei, fizik Gregor Schöttl in Gruber. Do tedaj so matematiko predavali v prvem, fiziko pa v drugem letniku. Herberstein je že novembra 1774 predlagal pouk fizike tudi v prvem letniku dvoletnih višjih študijev; matematiko naj bi predavali med 8. in 9. uro zjutraj, fiziko pa popoldne med 2. in 3. uro (tedanje učne ure so trajale po 60 minut). Maffei naj bi v dveh mesecih prilagodil svoj pouk; Maffei je oporekal, zato



Slika 3. Podpis Vegovega profesorja Maffeija ob koncu Vegovih študijev dne 18. 1. 1775 pod tremi točkami ugovorov proti Herbersteinovemu tri dni starejšemu odloku (Vir: Arhiv Republike Slovenije, AS 7 Deželno glavarstvo za Kranjsko, Publico-Politica, š. 70, Lit S, No 19, Vol 2, Schul- und Studien Sachen Anno 1775).

je sledil knezoškofov ukaz dne 15. 1. 1775. Maffei je tri dni pozneje zahtevek odklonil v treh točkah pisma, ki ga je poslal kranjskemu Deželnemu glavarstvu s priloženim spornim ukazom knezoškofa. Deželni glavar je bil v letih 1774–1780 Marija Jožef grof Turjaški (Auersperg, * 1723 Ljubljana, † 1805 Karlovac) s Turjaka, ki je bil obenem pokrovitelj kranjske Družbe za poljedelstvo in koristne spretnosti, katere člana sta bila Maffei in Gruber, ne pa Herberstein. Maffei je trdil, da fizike ni mogoče predavati v prvem letniku, preden se študentje ne naučijo dovolj matematike; dodatno težavo je pomenilo pomanjkanje učbenikov zaradi požara, ki je dne 28. 6. 1774 prizadel šolska poslopja. Med vrsticami je mogoče prebrati, da matematik Maffei ni odobraval poseganja v svojo stroko. Vendar je bilo Maffeijevo izvijanje iz primeža nove ljubljanskim jezuitom sovražne študijske politike jalovo, saj je pod direktorjem ljubljanskih Višjih študijev teologom Jožefom Gregorjem Lenacom (Lenaz, * 1738 območje Reke, † pred 1814 Komárno na Slovaškem) moral oditi. Lenac je postal direktor Višjih študijev po smrti kanonika Antona Svetine († 23. 3. 1777); Lenac je bil po Herbersteinovi odstavitvi tudi prisednik študijske komisije. Takoj po smrti Svetine in Vegovega profesorja fizike Gregorja Schöttla (* 1732 Steyr, † 4./5. 11. 1777 Ljubljana) je dne 8. 11. 1777 ljubljanske Višje študije vizitiral direktor artističnih fakultet (*Artiorum*) od leta 1770 direktor dunajske bogoslovne fakultete, profesor kanonskega prava Fran de Paula Tomičić (Franjo, * 1729 Kastav, † 1790)



Slika 4. Ljubljanski visokošolski profesor in knjižničar Franc Wilde (1753 Vielkie Karlowice v pruski Šleziji, 1828) je pod številko 71 popisal Vegovo knjigo o merah in utežeh, izdano leta 1803, med izvodi ljubljanske knjižnice (z dovoljenjem Arhiva Republike Slovenije: AS 33 Deželna Vlada 1861–1918, Konvolut 163/d številka 68). Naslov knjige, ki jo je po Vegovi smrti izdal A. Kreil pri dunajskem tiskarju J. V. Degenu, je bil *Natürliches, aus der wirklichen Grösse unserer Erdkugel abgeleitetes, in ganz Frankreich und in einigenen angrenzenden Ländern zum allgemeinen Gebrauche gesetzmässig engeführtes Mass-Gewichts- und Münz-System* ... V Wildovem seznamu popisan izvod Vegovega dela danes hranijo v NUK-u pod signaturo 7935.

[1]. Tomičić je bil pozneje v letih 1778–1783 direktor graške univerzitetne knjižnice; leta 1784 in 1785 je bil rektor graškega liceja, kjer je zaposlil tudi svojega zaupnika in ožjega rojaka iz okolice Reke Lenaca. Lenac je ob vizitaciji Tomičiću precej očrnil ljubljanske Višje študije, kar je napravilo skoraj za zaveznika žrtvi kritike, tedanjega predsednika študijske komisije Herbersteina in nekdanjega jezuita, novega ljubljanskega profesorja fizike Antona Ambschella. Po vizitaciji je profesor matematike, nekdanji jezuit Martin Jell (* 19. 11. 1730 Waldkirchen v kneževini Passau, † 2. 12. 1797 Celovec), po ukazu grofa Gallenberga dne 28. 11. 1777 nadomestil Herbersteinu nevšečnega Jožefa Maffeija [2]. Študijski referent kranjskega deželnega glavarstva Franc Saleški Gallenberg (* 17. 6. 1747, † november 1803) je sicer kmalu po svoji poroki leta 1775 med prvimi zasebno opozoril cesarico Marijo Terezijo, da zaradi Herbersteinovega študijskega vodstva med profesorji vre; opozorilo je bilo neposredna posledica Maffeijevega dopisa z dne 18. 1. 1775. Franc se je 1. 9. 1774 poročil s Theclo Lichtenberg (* 25. 10. 1755). Bil je brat Sigismunda grofa Gallenberga (Janž Žiga, * 4. 2. 1751, † 11. 8. 1800 Dunaj), ki je bil od 20. 4. 1774 do 8. 7. 1775 tajnik Družbe za poljedelstvo

in koristne spretnosti kot ljubljanski gubernialni svetnik do prestavitve v Galicijo; bila sta sinova Wolfa Sigmunda Antona Jožefa grofa Gallenberga (1707–1773) in Marije Cecilije Ester grofice Orzon.

Sklep

Maffeijev izsiljen odhod iz Ljubljane je bil zgolj začetek zdrah, ki so prvič po osmih desetletjih delovanja onemogočile visokošolski študij matematike in fizike v Ljubljani zaradi ukinitve filozofskih študijev med oktobrom 1785 in aprilom 1788. Jurij Vega je imel v resnici srečo, da se je temu izognil: če bi študiral ducat let pozneje, bi zaradi siromaštva le stežka obiskoval visokošolski pouk zunaj Ljubljane. Po študiju je Vega pet let pomagal svojemu dotedanjemu profesorju Gabrijelu Gruberju pri urejevanju reke Mure, Gruber pa je v Ljubljani ostal do januarja 1785 [3].

Vega je bil najboljši matematik med ljubljanskimi študenti, tako da ga je učitelj Maffei podpiral vse življenje: najprej s priporočilom svojemu lastnemu mecenu generalnemu direktorju artilerije feldmaršalu knezu Jožefu Mariji Colloredo-Walsseeju (1735–1818), nato pa s svojimi zvezami med dunajskimi prostozidarji. Nič manj ni Vegi pomagal mlajši Gabrijelov brat Tobija Gruber, ki je postal vplivni praški prostozidar, trikratni predsednik in tajnik poznejše Češke akademije znanosti, imenovane Češka znanstvena družba (*Česká Společnost Nauk*). Vego je sprejel med člane Češke znanstvene družbe dne 26. 2. 1800, štiri leta pozneje pa je obnovil svoje prisege pri ruski Družbi Jezusovi pod vodstvom generala Gabrijela Gruberja.

LITERATURA

[1] S. Južnič in Anton Ambschell, *Novi Slovenski Biografski Leksikon Nova slovenska biografija*, Ljubljana: ZRC SAZU (ur. B. Svetina, P. Bobič), **1** (2013), 164–166; Arhiv Republike Slovenije, AS 7 Deželno Glavarstvo (publico politica), Škatla 73, lit S num 19 vol 9; F. E. Hoško, *Jozefinist Franjo Tomičić iz Kastva* (1729–1790) (ur. F. E. Hoško), Zbornik Marijana Jurčevića, *O čovjeku i Bogu*, Kršćanska sadašnjost, Zagreb, 2005, 333-334; J. Marolt, *Škof Karl Herberstein in njegovi dopisovalci*, Herbersteinov simpozij v Rimu (ur E. Škulj), Celje: Mohorjeva družba, 2004, 403.

[2] S. Južnič, *Ljubljanski kemijski učni pripomočki ob odkritju Voltove baterije (Ob 210-letnici smrti profesorja Jerneja Schallerja)*, Acta Chimica Slovenica 60/2 (2013), S94–S104 (`http://acta.chem-soc.si/60/ACTA\%202013-4a.pdf`, ogled 7. 3. 2014); C. Sorč, *Škof Karl Janez Herberstein in njegovi sodelavci*, Herbersteinov simpozij v Rimu (ur. E. Škulj), Celje: Mohorjeva družba, 2004, 178; ARS AS 7, Deželno Glavarstvo (publico politica), Škatla 71, lit S, Num 19, Vol 5, Acta de Anno 1777.

[3] S. Južnič, *Euler and the Jesuits in Russia*, Quaderns d'Historia de l'Enginyeria (Escola Tecnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona) **9** (2008), 232 (`http://upcommons.upc.edu/revistes/bitstream/2099/8061/1/article11.pdf`, ogled 7. 3. 2014).

POLDRUGO STOLETJE ELEKTROMAGNETNIH VALOV

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.65.+g, 41.20.Jb

Spoznanje, da je svetloba elektromagnetni pojav, je zorelo dalj časa. Odločilni korak je naredil James Clerk Maxwell leta 1864. Pred stopetdesetimi leti je prvič iz enačb za električno in magnetno polje izpeljal valovno enačbo. Zanimajo nas glavne poteze te izpeljave. Opišemo tudi Maxwellovo prejšnje delo in poznejši razvoj. Dandanes pogosto spregledamo prispevke drugih.

A CENTURY AND A HALF OF ELECTROMAGNETIC WAVES

The awarenes that light is an electromagnetic phenomenon matured for some length of time. The decisive step was taken by James Clerk Maxwell in 1864. A hundred and fifty years ago for the first time the wave equation was derived from equations of the electric and magnetic fields. We are interested in the main twists of this derivation. Maxwell's earlier work and later developement are described as well. Nowadays the contributions of others are often overlooked.

Svetloba in elektromagnetni pojavi

Na začetku 19. stoletja je po zaslugi Thomasa Younga prevladalo stališče, da je svetloba valovanje. Predstavljali so si, da valovanje potuje po *etru*, snovi s skrajno majhno gostoto. Najprej so imeli valovanje za longitudinalno, pozneje pa so polarizacijo pojasnili s transverzalnim valovanjem. Hypollite Fizeau je za hitrost svetlobe med pariškima gričema leta 1848 nameril $3{,}149 \cdot 10^8$ m/s, Leon Foucault pa leta 1860 v laboratoriju $2{,}98 \cdot 10^8$ m/s.

Michael Faraday je že leta 1845 opazil, da je magnetno polje v prozorni snovi zasukalo jakost električnega polja v linearno polarizirani svetlobi. Leta 1850 je Fizeau s sodelavcem z merjenjem ugotovil, da elektrika v telegrafskih vodih potuje s hitrostjo, ki doseže velikostno stopnjo hitrosti svetlobe. Leta 1856 sta Wilhelm Weber in Rudolf Kohlrausch izmerila »razmerje med absolutno elektrostatično enoto naboja in absolutno elektromagnetno enoto naboja«. Za enoto jakosti sta vzela tok, »ki nastane, ko v časovni enoti enota pozitivne proste elektrike v dani smeri in enaka množina negativne elektrike v nasprotni smeri stečeta skozi vsak presek verige.« Za razmerje sta dobila $1{,}5537 \cdot 10^8$ m/s. S pravo definicijo toka bi dobila dvakrat več, $3{,}1074 \cdot 10^8$ m/s. Povezave s hitrostjo svetlobe nista prepoznala. Leta 1857 je Gustav Robert Kirchhoff z zasnovo telegrafske enačbe ugotovil, da spremembe napetosti po tankem vodniku z zanemarljivim uporom potujejo s hitrostjo svetlobe. Iz tega ni izpeljal sklepa, da je svetloba elektromagnetno valovanje.

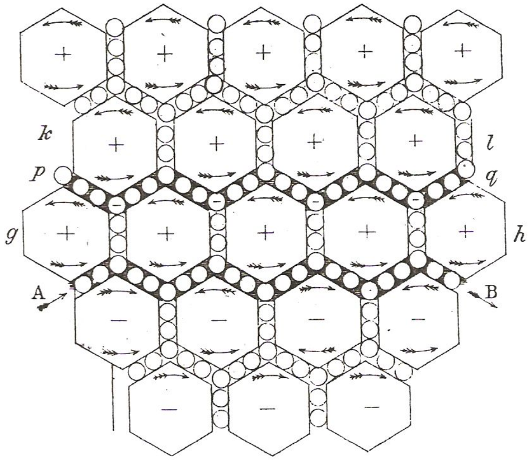
O Faradayevih silnicah

James Clerk Maxwell (1831 - 1879) je »delo začel predvsem v upanju, da bo Faradayevim zamislim in postopkom uspelo dati matematično obliko.« »Faraday je videl v duhu silnice, razširjajoče se po vsem prostoru, kjer so matematiki videli centre sil, ki delujejo drug na drugega na daljavo. Faraday je videl sredstvo, kjer oni niso videli nič drugega kot razdalje.« Med drugimi je Maxwell objavil štiri članke: *O Faradayevih silnicah* v dveh delih v letih 1855 in 1856 [1], *O fizikalnih silnicah* v petih delih v letih 1861 in 1862 [2], *Dinamična teorija elektromagnetnega polja* leta 1865 [3] in *O načinu, kako naravnost primerjati elektrostatično silo z elektromagnetno s pripombo k elektromagnetni teoriji svetlobe* leta 1868 [4]. Leta 1873 je povzel dognanja v temeljnem delu *Razprava o elektriki in magnetizmu* z več kot tisoč stranmi. S tem je postavil temelje *Maxwellove elektrodinamike.*

Spočetka se je Maxwell zgledoval pri Williamu Thomsonu, poznejšem lordu Kelvinu, ki je vsak pojav poskušal pojasniti z analogijo iz mehanike. Tudi Thomson je izhajal iz Faradayevega »električnega sredstva«. Najprej je porazdelitev električne sile primerjal s porazdelitvijo toplotnega toka v trdni snovi, pozneje pa z ravnovesjem v prožni trdni snovi. Maxwell je poudaril, da je Thomson »prvi v matematično znanost uvedel misel o delovanju, ki ga prenaša zvezno sredstvo. Čeprav je to zagotovil in uporabil kot vodilno misel v svojih raziskovanjih Faraday, tega niso cenili drugi možje znanosti.«

V *Faradayevih silnicah* se je Maxwell oprl na analogije: »Da bi dobili fizikalno predstavo, ne da bi postavili kako posebno teorijo, se moramo seznaniti z obstojem fizikalnih analogij. S fizikalno analogijo razumem tisto delno podobnost med zakoni kakega območja in zakoni drugega območja, s katero je mogoče z enim območjem ilustrirati drugo.«

Najprej je obdelal analogijo s stacionarnim prevajanjem toplote in nato podrobneje analogijo s stacionarnim tokom nestisljive tekočine. Potem je razpravljal o Faradayevem *elektrotoničnem stanju.* Silnice podajajo smer količine, njena velikost je obratno sorazmerna s presekom izbrane niti silnic. To velja za vsako količino s sklenjenimi silnicami, tudi za hitrost delov nestisljive tekočine. Enačb, ki jih je navedel Maxwell, ni lahko prepoznati, ker jih je pisal v komponentah in je te zaznamoval z različnimi znaki. Čeprav je članek *O Faradayevih silnicah* vseboval domala vse enačbe elektrodinamike, se te enačbe, dobljene na podlagi analogij, dandanes zdijo nepovezane in neurejene.



Slika 1. V *Fizikalnih silnicah* je Maxwell električne in magnetne pojave opisal z modelom vrtincev in kotalečih se delcev. Šestkotni vrtinci se vrtijo okoli silnic v svojih oseh, pravokotnih na risalno ravnino. Delci, ki se brez drsenja in trenja kotalijo po njih, ustrezajo nosilcem naboja.

O fizikalnih silnicah

Maxwell je enačbe poskusil pojasniti na enotni osnovi z modelom molekulskih vrtincev in kotalečih se delcev. Tako je še naprej ostal pri mehanični analogiji: »Magnetno-električne pojave povzroča sredstvo, ki je na vsakem kraju magnetnega polja v določenem gibalnem ali napetostnem stanju, ne pa neposredno delovanje na daljavo magnetov in električnih tokov. Snov, ki povzroča učinke, je lahko sestavni del navadne snovi ali eter, ki snov prežema.«

Silnice kažejo smer mehanične napetosti, ki jo je poleg tlaka treba upoštevati. Ležijo v oseh vrtincev, katerih smer določa svedrsko pravilo. Vrtinci se zelo hitro vrtijo, so majhni v primerjavi z molekulami in njihova gostota se ravna po permeabilnosti. Med vrtinci se brez drsenja in trenja kotalijo okrogli delci (slika 1). Na upor naletijo, ko preidejo od ene molekule k drugi. Delci imajo vlogo nosilcev naboja in njihovo potovanje v določeni smeri ustreza električnemu toku. Vrtinci se vrtijo zaradi gibanja delcev in s tem povzročajo elektromotorno silo: »Predstava o delcih, katerih gibanje določa pogoj, da se na obeh straneh vrtincev kotalijo brez drsenja, se morda zdi nezadovoljiva. Nočem, da velja za pravo mnenje o tem, kar obstaja v naravi, ali za domnevo o bistvu elektrike v dosedanjem pomenu besede. To vrsto povezave pa si je mogoče mehanično zamisliti, zlahka jo je mogoče raziskati in je pripravna, da si z njo predstavljamo prave mehanične odnose med znanimi elektromagnetnimi pojavi.«

Z vrtinci in delci je Maxwell opisal tudi dielektrik v statičnem električnem polju. Naboj v molekuli se premakne, ne da bi zapustil molekulo: ena stran molekule postane pozitivna in druga negativna. Premik naboja v molekuli povzroči premik naboja v sosednji molekuli, in učinek se razširi po vsem dielektriku. Premik je odvisen od električnega polja in od narave dielektrika. Če deluje na delce sila v dano smer, ti s svojim tangentnim delovanjem deformirajo prožno snov vrtincev in izzovejo v snovi nasprotno prožno silo. Ko sila preneha, se vrtinci vrnejo v prejšnjo obliko in delci v prejšnjo lego. To opiše *električni premik* $\vec{D}$. Če se premik s časom spreminja, nastane *premikalni tok* z gostoto $\partial\vec{D}/\partial t$. Premikalni tok se mu je zdel tako neizogiben, da ga je vpeljal na hitro. Pri delu sodobnikov je naletel na nezaupanje in nasprotovanje. V Ampèrovem zakonu rot $\vec{H} = \vec{j}_e$ je gostoti toka nabojev dodal gostoto premikalnega toka rot $\vec{H} = \vec{j}_e + \partial\vec{D}/\partial t$. Vsoto na desni strani enačbe je vpeljal kot *gostoto polnega toka*, ki nima izvirov: div $\vec{j}_t = 0$.

Privzel je, da imajo vrtinci obliko krogel. Preračunal je ravnovesje prožne krogle pod vplivom pravokotnih in tangentnih sil. Račun mu je dal količini, ki ju je vstavil za strižni modul G in gostoto snovi ρ v enačbo za hitrost transverzalnega valovanja v prožni snovi: $c = \sqrt{G/\rho}$. Tako je za hitrost transverzalnih valov dobil vrednost, ki se ni znatno razlikovala od izmerjene hitrosti svetlobe. Izid je primerjal z Webrovim in Kohlrauschevim izidom ter s Fizeaujevim merjenjem in ugotovil, da »komaj lahko zavrnemo misel, da sestavljajo svetlobo transverzalna nihanja sredstva, ki so tudi vzrok električnih in magnetnih pojavov.«

Povezava svetlobe z elektromagnetnimi pojavi je bila pomemben korak, a vsa razglabljanja in vsi računi so izhajali iz mehaničnega modela. Zaradi enotnega modela so se enačbe zdele med seboj nekoliko bolj povezane kot v *Faradayevih silnicah*. Vendar je bila razprava še daleč od polja kot neodvisne tvorbe.

Dinamična teorija elektromagnetnega polja

Uredništvo *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* je rokopis dobilo 27. oktobra 1864. Maxwell je o njem predaval 8. decembra 1864, revija pa je izšla januarja 1865. V članku je opustil prejšnje mehanične analogije: »Teorijo, ki jo predlagam, je mogoče imenovati *teorija elektromagnetnega polja*, ker zadeva prostor v bližini električnih in magnetnih teles, in mogoče jo je imenovati *dinamična*, ker privzame, da je v prostoru snov v gibanju, ki povzroča vidne elektromagnetne pojave.« To je prvi pravi elektrodinamični članek. V njem ni novih osnovnih enačb. III. razdelek *Splošne enačbe elektromagnetnega polja* povzame »osnovne« enačbe. Enačbe, ki jih je navedel v komponentah, zapišemo z vektorji in totalne odvod nadomestimo s parcialnimi, a sicer poskušamo kolikor mogoče obdržati Maxwellovo obliko.

Enačbe polnih tokov:

$$\vec{j}_t = \vec{j}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (A)$$

so gostoto polnega električnega toka $\vec{j}_t$ povezale z gostoto toka nosilcev naboja $\vec{j}_e$ in premikalnim tokom $\partial D/\partial t$.

Enačbe o magnetni sili:

$$\mu\mu_0 \vec{H} = \mathrm{rot}\ \vec{A} \qquad (B)$$

so *količino magnetne indukcije*, po Maxwellovo $\mu\vec{H}$, po naše gostoto magnetnega polja $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, povezale z našim *vektorskim potencialom*, ki ga je Maxwell imenoval najprej *elektrotonična jakost* in pozneje *elektromagnetni moment*. Enačbo je že prej uporabil Thomson in neodvisno od njega Wilhelm Weber in drugi.

Enačbe tokov je Maxwell dobil tako, da je Ampèrovemu zakonu rot$\vec{H} = \vec{j}_e$ dodal premikalni tok:

$$\mathrm{rot}\ \vec{H} = \vec{j}_t = \vec{j}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (C)$$

Na desni strani je uporabil faktor 4π, ki smo ga spustili.

V *enačbah elektromotorne sile*

$$\vec{f} = \vec{v} \times \mu\vec{H} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\ V \qquad (D)$$

s skalarnim potencialom V je »elektromotorno silo« $\vec{f}$ razumel kot silo na enoto naboja. To spominja na našo jakost električnega polja $\vec{E}$ in enačba na gostoto Lorentzeve sile. Elektromotorna sila danes večinoma pomeni gonilno napetost.

Enačbe električne prožnosti so »elektromotorno silo« povezale z električnim premikom:

$$\vec{f} = k\vec{D}. \qquad (E)$$

Koeficient k je v našem zapisu $k = 1/(\varepsilon\varepsilon_0)$.

Enačbe električnega upora so bile naš Ohmov zakon:

$$\vec{f} = \zeta\vec{j}_e \qquad (F)$$

s specifičnim uporom ζ.

Enačba proste elektrike je bila naš Gaussov zakon:

$$\mathrm{div}\ \vec{D} = \rho_e. \qquad (G)$$

Vrsta enačb se je končala s *kontinuitetno enačbo*:

$$\mathrm{div}\ \vec{j}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}. \qquad (H)$$

Maxwell je naštel dvajset spremenljivk in dvajset enačb zanje. Enačbe so imenovali *Maxwellove enačbe*, dokler ime ni dobilo današnjega pomena. Vse enačbe niso bile med seboj neodvisne. Tako na primer dobimo enačbo (H) iz enačbe (G), ko upoštevamo, da je div $\vec{j}_t = 0$.

V VI. razdelku *Elektromagnetna teorija svetlobe* je Maxwell iz zapisanih enačb izpeljal valovno enačbo. Tudi tukaj si z vektorsko pisavo skrajšamo pot. Na levi in desni strani enačbe (B) vzamemo rotor $\mu\mu_0\mathrm{rot}\vec{H} = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{A})$ in uporabimo vektorsko identiteto $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{A}) = -\nabla^2\vec{A} + \mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A})$. V dielektriku ali praznem prostoru ni prostih nosilcev naboja in je $\vec{j}_e = 0$, tako da je po enačbi (C) $\mathrm{rot}\vec{H} = \partial\vec{D}/\partial t = k^{-1}\partial\vec{f}/\partial t$. Z enačbo (E) $\vec{D}$ izrazimo s $\vec{f}$ in nazadnje uporabimo enačbo (D) za primer, ko ni nabojev in je $\vec{f} = -\partial\vec{A}/\partial t - \mathrm{grad}V$:

$$\mu\mu_0\mathrm{rot}\vec{H} = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{A}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div})\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = \mu\mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \frac{\mu\mu_0}{k}\frac{\partial\vec{f}}{\partial t} =$$
$$-\frac{\mu\mu_0}{k}\left(\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mathrm{grad}\frac{\partial V}{\partial t}\right).$$

Maxwell je enačbo za komponento v smeri osi y:

$$\frac{\partial(\mathrm{div}\vec{A})}{\partial y} - \nabla^2 A_y = -\frac{\mu\mu_0}{k}\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial t}\right)$$

odvajal po z in enačbo za komponento v smeri osi z:

$$\frac{\partial(\mathrm{div}\vec{A})}{\partial z} - \nabla^2 A_z = -\frac{\mu\mu_0}{k}\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial t}\right)$$

po y. Drugo enačbo je odštel od prve in dobil:

$$\nabla^2\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = \frac{\mu\mu_0}{k}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right).$$

V oklepajih na obeh straneh po enačbi (B) prepoznamo komponento H_x. S ciklično permutacijo indeksov dobimo enačbi za preostali komponenti in sestavimo vektorsko valovno enačbo:

$$\nabla^2\vec{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \qquad \text{s} \qquad c = \sqrt{\frac{k}{\mu\mu_0}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}.$$

Maxwell je že prej ugotovil, da je magnetno polje pravokotno na smer potovanja valovanja. V ravnem valovanju je vpeljal fazo $w = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t$ z valovnim vektorjem $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ in krožno frekvenco ω. Z zvezo grad$w = \vec{k}$ je po enačbi (B) izrazil:

$$\mu\mu_0 H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial w} k_y - \frac{\partial A_z}{\partial w} k_z.$$

Dopisal je še enačbi za komponenti v smeri osi y in z. Prvo enačbo je pomnožil s k_x, drugo s k_y, tretjo s k_z in vse enačbe seštel. Dobil je zvezo $\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$, ki kaže, da je magnetno polje pravokotno na smer valovnega vektorja.

Izpeljal je tudi zvezo med lomnim količnikom in dielektričnostjo $n^2 = \varepsilon$ za $\mu = 1$. Ugotovil je, da je gostota energije v električnem polju $w_e = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2$. Da je gostota energije v magnetnem polju $w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\vec{B} = \frac{1}{2}B^2/(\mu\mu_0)$, je že leta 1853 spoznal Thomson.

Maxwell je zapisal valovno enačbo le za magnetno polje. Pripomnil je, da »sestoji val v celoti iz magnetnih motenj«. Morda se tedaj še ni zavedal, da tudi električna motnja potuje kot val. To bi bilo mogoče, saj enačb za električno polje ni zapisal simetrično z enačbami za magnetno polje.

Vsekakor je bila to prva izpeljava valovne enačbe iz enačb za električno in magnetno polje. Hitrost, ki sta jo Weber in Kohlrausch dobila pri električnem poskusu, je primerjal s Fizeaujevo in s Foucaultovo hitrostjo pri poskusu s svetlobo ter nazadnje pribil, da je svetloba elektromagnetno valovanje.

V krajšem članku *O načinu, kako naravnost primerjati elektrostatično silo z elektromagnetno s pripombo k elektromagnetni teoriji svetlobe* je Maxwell izpeljal valovno enačbo, ne da bi uporabil potenciale. S člankom je želel posebej pokazati, da se njegova teorija razlikuje od teorij z delovanjem na daljavo. Omejil se je na ravno valovanje, ki potuje v smeri osi z z električnim poljem v smeri osi x in magnetnim poljem v smeri osi y. Izpeljal je valovno enačbo za magnetno polje, a po sinusni rešitvi za H_y je dopisal tudi sinusni rešitvi za E_x in D_x. Vsaj odtlej je vedel za sestavo elektromagnetnega valovanja iz magnetnega in električnega polja. Članek je bil precej časa pozabljen, dokler ni nanj opozoril Thomson.

V *Razpravi o elektriki in magnetizmu* je Maxwell v zapisanih enačbah spremenil le nekaj znakov. Tako je vpeljal današnjo gostoto magnetnega polja $\vec{B}$ namesto prejšnje količine $\mu\vec{H}$. S tem so postale enačbe za magnetno polje nekoliko bolj podobne enačbam za električno polje. Vpeljal je še nekaj novosti, na primer Maxwellove napetosti, svetlobni tlak, spoznanje, da magnetno polje ne vdre v idealni vodnik, ampak povzroči površinske tokove. Še zdaj so v rabi nekateri njegovi znaki, ki jih je izbral po abecedi. Omejili smo se na Maxwellovo obravnavo elektromagnetnega valovanja v praznem prostoru in v izotropnih snoveh.

Maxwellove enačbe danes

Ob svojem času je Maxwellovo delo zbudilo nekaj pozornosti v Angliji, na celini pa so se nanj odzvali le posamezniki. Ludwig Boltzmann je v letih 1891 in 1893 izdal *Predavanja o Maxwellovi teoriji elektrike in svetlobe* v dveh delih. Po njegovem mnenju sta tedaj le še Hermann von Helmholtz v Berlinu in Jožef Stefan na Dunaju spoznala pomen Maxwellove teorije. Večina drugih fizikov je do nje čutila nezaupanje ali celo odpor. Upirali so se premikalnemu toku in stavili na delovanje na daljavo. Posebej so odklonili zvezo med lomnim količnikom in dielektričnostjo. Tedaj še niso poznali frekvenčne odvisnosti obeh količin. Nekaterim se je teorija, ki je tedaj še tekmovala z drugimi teorijami, zdela nedokončana. Ovirala jo je tudi »težavna matematika« in neurejene enačbe. To se je spremenilo zaradi del Oliverja Heavisida, Josiaha Willarda Gibbsa in Heinricha Hertza.

Oliver Heaviside (1850–1925) je bil posebnež, ki je s šestnajstimi leti zapustil šolo [5]. Učil se je sam in s časom od telegrafista napredoval do člana Kraljeve družbe (leta 1891). Pozneje je o Maxwellovi *Razpravi* zapisal: »Videl sem, da je velika, večja in največja z ogromnimi možnostmi. Bil sem odločen, da knjigo obvladam in sem se lotil dela [. . .] Vzelo mi je nekaj let, preden sem razumel toliko, kolikor sem mogel razumeti. Potem sem Maxwella odložil in sledil svoji lastni poti. Napredoval sem veliko hitreje.«

Medtem se je po zaslugi Gibbsa in drugih razvila vektorska analiza. Heaviside jo je pomagal razvijati in jo širil med fiziki. Po Hertzevem odkritju radijskih valov leta 1887 se je spremenil odnos do teorije. Hertz je prispeval tudi k teoriji vzporedno s Heavisidom, a je slednjemu priznal prvenstvo. Heaviside in Hertz sta uredila in poenostavila enačbe in jim dala današnjo obliko. Nekaj časa so te enačbe imenovali po Heavisidu in Hertzu in tudi po Maxwellu in Hertzu. Danes jih poznamo kot *Maxwellove enačbe*:

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho_e \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Dodati je treba še enačbi:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}.$$

Pogosto dodamo še enačbo za *Lorentzevo silo* na delec z nabojem e: $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Ohmovega zakona in kontinuitetne enačbe pa ne štejemo k Maxwellovim enačbam. Nekdo je pripomnil, da Maxwell v novih enačbah ne bi prepoznal svojih prvotnih enačb. V praznem prostoru, v katerem ni nabojev in tokov, so enačbe za električno polje simetrične z enačbami za magnetno polje – do minusa v indukcijskem zakonu.

George Francis Fitzgerald je zapisal: »Maxwellovo *Razpravo* obremenjujejo razbitine njegove sijajne črte naskoka, njegova polja s strelskimi jarki, njegove bitke. Razčistil jih je Oliver Heaviside, odprl neposredno pot, uvedel široko cesto in raziskal znaten preostanek področja.« Heaviside je naredil še več. Med drugim je obravnaval telegrafsko enačbo in predlagal, da naj bi s tuljavami v kablih zmanjšali popačenje signala. Predvidel je, da bi nabit delec, ki bi se gibal hitreje kot svetloba, oddajal sevanje, danes znano kot sevanje Čerenkova. Raziskal je gostoto energijskega toka v električnem in magnetnem polju, a pri tem ga je prehitel John Henry Poynting. Heaviside se je rad prepiral. Omenimo samo prepir s Petrom Guthriejem Taitom. Ta si je na vso moč prizadeval, da bi v elektrodinamiki uporabljali Hamiltonove kvaternione, ki jim je bil spočetka naklonjen tudi Maxwell. Heaviside pa se je zavzemal za vektorje.

Za študente je valovna enačba pri elektromagnetnem polju pomembna, ker jo izpeljejo iz osnovnih zakonov, to je Maxwellovih enačb, naravnost brez približkov. Valovno enačbo pa že poznajo iz mehanike. Tudi v razvoju fizike so jo spoznali v mehaniki že prej. Jean le Rond d'Alembert jo je za valovanje v eni razsežnosti izpeljal leta 1746. Leonhard Euler jo je za valovanje v treh razsežnostih dognal nekaj let pozneje. V tej zvezi kaže omeniti še prispevka Daniela Bernoullija in Joseph-Louisa Lagrangea.

Decembra 2013 je Generalna skupščina Združenih narodov leto 2015 razglasila za Mednarodno leto svetlobe. Kako zelo pomembna je vidna svetloba, ki je ozek pas v spektru elektromagnetnega valovanja, uvidimo, če si zamislimo, kakšno bi bilo življenje in sploh svet, če je ne bi bilo. Pri tem so poleg izida Maxwellovega članka leta 1865 upoštevali delo Ibn al-Haythama (Alhazena) leta 1015, teorijo transverzalnega etrskega valovanja Augustina Fresnela leta 1815, razlago fotoefekta Alberta Einsteina leta 1905 ter odkritja svetlobnih vodnikov Charlesa Kaa leta 1965. Tehnologije na osnovi svetlobe so izdatno prispevale k razvoju. V Mednarodnem letu svetlobe 2015 naj bi UNESCO, izobraževalne in raziskovalne ustanove ter strokovna društva in drugi po vsem svetu sodelovali pri širjenju zavesti o »pomenu svetlobe in njene uporabe«.

LITERATURA

[1] J. Clerk Maxwell, *On Faraday's lines of force*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society **10** (1855, 1856).

[2] J. Clerk Maxwell, *On physical lines of force*, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **21** (1861) 161–175, 281–291, 338–348; **22** (1862) 12–24, 85–95.

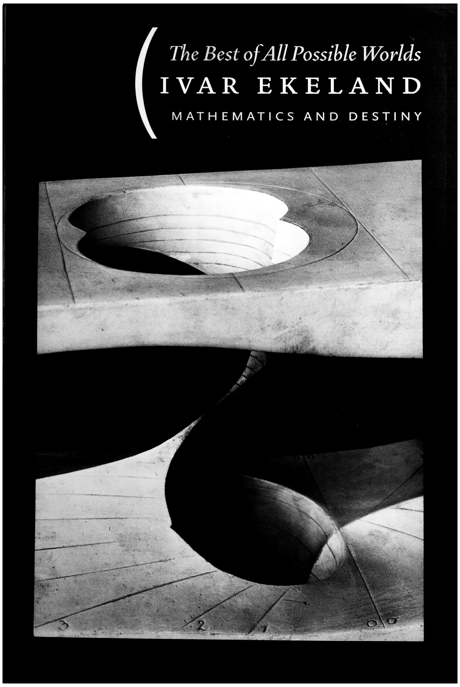
[3] J. Clerk Maxwell, *A dynamical theory of the electromagnetic field*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **155** (1865) 459–512.

[4] J. Clerk Maxwell, *On a method of making a direct comparison of electrostatic with electromagnetic force: with a note on the electromagnetic theory of light*, Philosophical Magazine **36** (1868) 316. Vire [1–3] je mogoče dobiti na spletu.

[5] P. J. Nahin, *Oliver Heaviside*, Scientific American **262** (1990) 80–87 (6).

NOVE KNJIGE

Ivar Ekeland, The Best of All Possible Worlds, Mathematics and Destiny, The University of Chicago Press, Chicago and London, 2006, 207 str.



Knjiga je najprej izšla v francoščini (leta 2000) z naslovom *Le meilleur des mondes possibles: Mathématiques et destinée*. Avtor knjige je francoski matematik z norveškimi koreninami, ki dela v Franciji in v Kanadi. Je specialist za variacijski račun, matematično ekonomijo in nelinearno funkcionalno analizo. Letos praznuje sedemdesetletnico.

Knjiga je namenjena široki publiki, zato vsebuje zelo malo formul. Posvečena je zgodovini nastanka *načela najmanjše akcije*, variacijskemu računu nasploh in razvoju te ideje. Okrog tega avtor nevsiljivo naplete mnoge zgodbe in razmišljanja o znanosti, filozofiji, človeški družbi ... Knjiga je odličen primer francoske kulture in kaže avtorjevo izredno intelektualno širino in kultiviranost. Je nadvse prijetno branje.

Avtor pravi, da je načelo najmanjše akcije med prvimi formuliral (čeprav pomanjkljivo) francoski matematik in univerzalni znanstvenik Pierre Moreau de Maupertuis. Znan je po tem, da je v letih 1736–37 vodil znanstveno odpravo na Laponsko, katere cilj je bil merjenje dolžine loka poldnevnika, ki ustreza eni stopinji razlike v zemljepisni širini. Isaac Newton je predvideval, da je Zemlja nekoliko sploščena na polih, medtem ko je francoski kraljevi astronom Cassini trdil nasprotno: da je Zemlja podobna podolgovati limoni. Meritve na Laponskem in rezultati podobne odprave v bližino ekvatorja v Peruju so pokazale, da je imel prav Newton. Odprava na Laponsko pa je seveda prinesla svetu še mnogo znanstvenih spoznanj in opisov življenja na skrajnem severu. V Pariz je pripeljala celo dve laponski dekleti, ki sta bili središče zanimanja in sta se pozneje tam tudi poročili in ustalili. Maupertuis je imel dolgo zelo uspešno kariero: postal je celo predsednik Berlinske akademije znanosti. Imel je mnogo prodornih idej, ki so prehitevale čas –

živi svet se mu ni zdel nespremenljiv, špekuliral je o vrtanju proti središču Zemlje ... Kasneje se je preusmeril v metafiziko in na podlagi svojih znanstvenih hipotez razširjal idejo, da je svet ustvarjen tako, da je *razlika med dobrim in slabim kar največja.*

Na dvoru pruskega vladarja Friderika II. Velikega je nekaj let bival tudi Voltaire, ki pa je prišel v nemilost in je moral v poniževalnih okoliščinah zbežati, medtem ko je Maupertuis še naprej užival kraljevo naklonjenost. Voltaire in arogantni Maupertuis se že prej nista razumela. Voltaire je ob prihodu odprave z Laponskega napisal verz: *Šel si v oddaljene in samotne kraje, da bi dokazal, kar je Newton vedel ves čas, ne da bi vstal od delovne mize.* Voltaire se po begu iz Berlina prosvetljenega absolutista Friderika Velikega neposredno seveda ni upal napasti. Zato pa se je lotil vladarjevega favorita Maupertuisa z vsem svojim arzenalom: s strupenim norčevanjem, pomešanim z neverjetnimi izmišljotinami itd.

Leta 1751 je holandski profesor Koenig v prestižni reviji Acta Eruditorum pisal o načelu najmanjše akcije in citiral podobne ideje, ki jih je v nekem pismu izrazil Leibniz leta 1707. Maupertuis je šel v zrak in obtožil Koeniga ponarejanja. To je bilo seveda odveč in slabo premišljeno, saj Leibniz teh svojih briljantnih idej ni razvil, Maupertuis pa je načelo najmanjše akcije uporabljal in marsikaj izračunal in so bile njegove zasluge jasne. Koenig je pismo prepisal pri človeku, ki so ga pa leta 1749 v Švici obglavili. Leibnizevega pisma v zapuščini usmrčenega niso našli. Koenig je kljub temu vztrajal pri svojem in prišlo je do velikega javnega spora. (Mnogo kasneje, leta 1913, so našli še eno kopijo tega Leibnizevega pisma, ki je vsebovala to, kar je trdil Koenig.) V spor se je z največjim veseljem vmešal tudi Voltaire. Leta 1753 so v avstrijsko-pruski vojni avstrijske čete zajele Maupertuisa in ga odpeljale na Dunaj. Tam so ga zaradi njegovih znanstvenih zaslug izpustili. Voltaire je to opisal takole: »Ujeli so ga moravski kmetje, ki so ga slekli do golega in mu iz žepov pobrali petdeset izrekov.« Izdal je celo knjigo teh pamfletov z naslovom *Histoire du docteur Akakia et du natif de Saint-Malo* (Zgodba o doktorju Akakiji in človeku iz Saint-Maloja). (Saint-Malo je bil Maupertuisov rojstni kraj.) Začne se takole: »Človeka iz Saint-Maloja se je že pred časom lotila kronična bolezen, ki jo nekateri imenujejo filotimija, drugi filokratija ... « (Prva grška skovanka pomeni ljubezen do nagrad in časti, druga ljubezen do oblasti.) Mnogi ljudje so uživali ob teh sporih slavnih ljudi. Voltairovi zlobni pamfleti so uničili Maupertuisov ugled, tako da je leta 1759 umrl v Švici kot strt človek. Vendar Voltairu to ni bilo dovolj. Dokončno si je Maupertuisa privoščil po njegovi smrti v Kandidu, kjer ga je karikiral kot večnega in smešnega optimista doktorja Panglossa. (Mimogrede, Ekelund Kandida opisuje kot »mojstrovino«, kar pa se mi zdi pretirano. Voltaire je res znal pisati izredno jasno in udarno. Njegova francoščina je praktično povsem moderna. Po drugi strani je marsikaj v tem delu napisano rokohitrsko. Kot literarna zgodba Kandid zame ni ravno biser.)

Načelo najmanjše akcije, njegova zgodovina in razvoj (na trdne temelje je bila stvar postavljena šele sredi devetnajstega stoletja) je samo ogrodje, na katero avtor nevsiljivo naplete mnoge zanimive zgodbe.

Prva je o merjenju časa in prostem padu. Ker je stvar zanimiva, bomo malce razširili eno od zgodb iz obravnavane knjige z drugimi viri. Galileo Galilei je navedel pet sekund za čas, ki ga za padec z višine sto petdeset rimskih čevljev potrebuje sto funtov težka železna krogla. Ta podatek je zbujal dvome, še posebno, ker je Galileo kasneje sam priznal, da so bile nekatere njegove tabele sad preračunavanj iz podatkov o kotaljenju kroglic po klancu. (Pri kotaljenju se del potencialne energije spremeni v rotacijsko. Pri padajoči krogli tega ni.) Čas pa je Galileo meril pogosto z utripi srca. Kakorkoli, po Galilejevi lastni teoriji naj bi krogla v dveh sekundah padla kakih 24 čevljev.

Menih Marin Mersenne, znan tudi kot največji posrednik znanstvenih informacij v takratni Evropi, se je odločil, da stvari razjasni. Prvi problem je bil dolžinska enota, ki jo je uporabljal Galilei.

Očitno Mersenne dolgo ni mogel natančno ugotoviti, koliko naj bi meril rimski čevelj. (Zanimivo je, da je leta 1644 Dubrovčan Marin Getaldić v knjigi *Cogitata physico-mathematica* natisnil dolžino rimskega čevlja, a je v Errata (popravkih) moral navesti, da se je papir skrčil in da je treba natisnjeno dolžino povečati za $\frac{1}{40}$. Starodavni merski sistemi s svojimi lokalnimi posebnostmi so bili prava mora za eksperimentalce.) Leta 1636 se je Mersenne natančneje spoprijel z merjenjem časa in ugotovil, da nihalo z dolžino 3 pariške čevlje (približno 98,6 cm) potrebuje iz ene skrajne točke do druge (za pol nihaja) eno sekundo. Takemu nihalu so rekli *sekundno*. Od tod je izmeril, da kamen v dveh sekundah pade 48 čevljev – bistveno več, kot je sledilo iz Galilejevih trditev, in precej bliže pravi vrednosti.

Še bolj natančno sta merila jezuita Giovanni Battista Riccioli in Francesco Maria Grimaldi. Riccioli je najprej s poskusi ugotovil, da je število nihajev danega nihala v enem dnevu praktično konstantno (dokler so amplitude majhne). Pred kratkim je bil narejen angleški prevod latinskih Ricciolijevih zapisov o merjenju časov padajočih krogel [2]. Prevod razgali površnosti, ki jih sicer najdemo v poročilih o Ricciolijevem delu, in pokaže, da gre v tem primeru za solidno znanstveno delo na področju eksperimentalne fizike. (Prevajalec je sicer moral astronomsko dolge stavke in odstavke razbiti na manjše dele.)

Riccioli opisuje, kako je dobil dovoljenje za branje Galilejevih dialogov, ki so bili na *Indeksu prepovedanih knjig*, in kako je podvomil o rezultatih. Sumljiva mu je bila velika masa (sto funtov), ki jo navaja Galileo, pa odsotnost podatkov, s katerega previsa ali stolpa naj bi Galileo spuščal to izredno težko kroglo. (Lahko si mislimo, da lastnik stolpa tega ne bi dovolil.) Konstruiral je majčkeno nihalo dolžine $1\frac{1}{15}$ rimskega palca (med osjo in sredino uteži), ki je za pol nihaja potrebovalo $\frac{1}{6}$ sekunde. Kalibriral ga je z dvema zaporednima prehodoma fiksne zvezde čez »sredino neba«. S kalibracijami nihal in konstrukcijo sekundnih nihal sta se jezuita ukvarjala še leta in bomo o tem zapisali nekaj več kasneje.

Najprej sta ugotovila z mnogimi ponovitvami poskusa, da v času $\frac{5}{6}$ sekunde kamen ali glinasta krogla pade 10 čevljev. Nato, da v $\frac{5}{3}$ sekunde glinasta krogla pade 40 čevljev, v $\frac{15}{6}$ sekunde 90 čevljev, v $\frac{10}{3}$ sekunde 160 čevljev. Torej je bila Galilejeva teorija pravilna, Galilejeve »meritve« pa slabe. Na koncu so spuščali glinaste krogle 280 čevljev navzdol s stolpa Asinelli v Bologni. Ustrezen čas je bil $4\frac{1}{3}$ sekunde ali 13 polnih nihajev malega nihala. To pomeni težni pospešek nekaj manj kot 30 čevljev na s^2.

Riccioli z risbo dobro opiše, kje in kako je leta 1640 spuščal krogle. Ploščad na vrhu stolpa Torre Asinelli (zgrajenega v letih 1109–1119) je širša od konstrukcije pod njo, stolp je bil verjetno že takrat rahlo nagnjen (danes je vrh od navpičnice odmaknjen za dobra dva metra), tako da je bil položaj za spuščanje idealen. Glinaste krogle so padale na ograjeno široko teraso ob vznožju stolpa, tako da niso ogrožale mimoidočih. (Riccioli širino slikovito opiše takole: Šest mož lahko poravnanih z ramo ob rami hodi okrog te terase.) Čas padanja sta merila Grimaldi in še en jezuit na vrhu in Riccioli ob vznožju. Kot pravi, se rezultati obojih niso nikoli razlikovali za več kot šestinko sekunde. (Ker so začetek pada skoraj gotovo označili zvočno, tudi hitrost zvoka ni igrala vloge.)

Iz Ricciolijevih zapisov in današnjih meritev stolpa lahko ocenimo dolžino »njegovega« čevlja, ki je nekaj večja od v literaturi navajanih podatkov. Riccioli je očitno določil pospešek prostega pada na kakih 5 odstotkov natančno. Poskuse je Riccioli izvajal tudi na drugih stolpih, ki jih navaja in jih v Bologni ni manjkalo, pa tudi z oken jezuitskega kolegija. Spuščal je hkrati dve krogli različnih velikosti ali gostot, eno v bronasto, drugo v leseno skledo – da je bil zven ob trku različen. Ugotovil je, da zaradi zračnega upora prihaja do razlik. Kakorkoli, če odštejemo manjše popravke zaradi upora zraka, so se Galilejevi zakoni enakomerno pospešenega gibanja pokazali kot pravilni. Riccioli opisuje, kako je o rezultatih poskusov obvestil slavnega matematika in profesorja na Bolonjski univerzi Bonaventuro Cavalierija. Ta je ob Ricciolijevem obisku počival doma zaradi napada revme in putike, a se je kot nekdanji Galilejev varovanec izredno razveselil eksperimentalne potrditve teorij svojega učitelja.

Oba jezuita sta znana tudi po astronomskih dosežkih – izdelala sta zemljevid Luninega površja in vpeljala mnoga še danes uporabljana imena za morja, kraterje, gore. Riccioli je prišel kasneje pri zgodovinarjih znanosti v nemilost, ker je zagovarjal geocentrični sistem (čeprav je navajal tudi argumente za heliocentrični sistem), zato so njegove zasluge precej pozabljene.

Veliko časa sta jezuita porabila tudi v kasnejših letih za določitev dolžine sekundnega nihala. S pomočjo devetih sobratov, ki so šteli in ohranjali nihanje, sta leta 1642 ugotovila, da nihalo z dolžino 3 čevlje 4,2 palca (v rimskih merah) v enem dnevu naredi 86999 polovičnih nihajev. Število se je za slabih 7 promilov razlikovalo od 86400, kolikor je sekund v enem dnevu. (Te poskuse enciklopedija [1] označuje iz meni neznanih razlogov kot »farso«.) Naredila sta tudi malce krajše nihalo, dolgo menda 3 čevlje $2\frac{2}{3}$ palca, ki pa tudi ni bilo povsem sekundno. Ekelundova knjiga trdi, da je bila ta nova dolžina sad preračunavanj, ampak to je nekonsistentno z dejstvom, da je nihajni čas premo sorazmeren s kvadratnim korenom dolžine, kar naj bi vedel že Galileo. Kakorkoli, sobratje so se uprli nadaljnjemu sodelovanju v teh napornih poskusih. Dve leti kasneje, 1644 je Mersenne s poskusi preveril, da je nihajni čas nihala premo sorazmeren s kvadratnim korenom dolžine. Mersenne je tudi zlahka ugotovil, da se pri velikih amplitudah nihajni čas poveča. (Emil Beloglavec in Mitja Lakner sta to obravnavala v naši reviji pred tremi desetletji [3]). Galilejeva trditev, da je nihajni čas neodvisen od amplitude, je bila res le »v limiti«, za majhne amplitude.

Galileo se je že ukvarjal s problemom, kakšne oblike mora biti »drča« med točkama A in B, da kroglica zdrsne iz prve točke v nižje ležečo drugo točko v najkrajšem času (trenje zanemarimo). Tu A ni natančno nad B. Iskano krivuljo so kasneje imenovali *brahistohrona* ali *brahistokrona*. (Na predavanjih rad povem študentom, da ta problem bolj ali manj uspešno rešujejo ptice. Sam sem videl lebdečo postovko, ki je zagledala nekaj užitnega (miš, bramorja ...) na tleh. Ptica je zložila krila in za začetek pikirala. Ko je dobila nekaj hitrosti, je začela po malem razpirati krila in usmerjati let. Tangenta na krivuljo leta je bila torej v začetni točki navpična. Tudi nekatere gozdne ptice letajo z malo truda in dovolj hitro z enega drevesa na drugo v globokih lokih – na začetku in morda na koncu napravijo kak zamah ali dva (in včasih celo ponovijo lok, ker je razdalja do tal omejitev).) Galileo je domneval, da ima najhitrejša pot obliko krožnega loka z navpično tangento na začetku. Resnična je le trditev o navpični tangenti na začetku – ampak že sam problem se je pokazal kot izredno spodbuden.

V sedemnajstem stoletju se je pojavilo tudi vprašanje, ali obstaja krivulja, ki je *izohrona* ali *tavtohrona*, se pravi, da kroglica zdrsne po njej iz katerekoli točke do najnižje točke v enakem času.

Krivulja *cikloida*, ki nastane kot sled kotaljenja točke na krožnici po premici, je bila znana že Mersennu, morda tudi nekaterim pred njim. Določitev lastnosti cikloide (dolžina loka, ploščina pod njo ...) je sprožila tekmovalnost in tudi spore glede prioritete med matematiki v sedemnajstem stoletju. Šele Christiaan Huygens je v drugi polovici sedemnajstega stoletja odkril, da je cikloida tavtohrona krivulja.

Sam Huygens je že pred tem, leta 1656, izdelal načrt prve ure na nihalo, jo dal izdelati in je patentiral svojo iznajdbo. Urarji so to visoko tehnologijo sprejeli, začeli izdelovati in tudi predelovati stare urne mehanizme brez nihal. Natančnost ur se je izredno povečala, za dva velikostna reda. Idejo za tako uro je imel že Galileo, ampak šele Huygens in sodobniki, kot Robert Hooke, so prispevali ključne in netrivialne tehnične rešitve, nujne za delovanje, kmalu tudi z nihali na krožno vzmet. Vidimo, kako neverjetno sta znanost in tehnologija napredovali v manj kot dveh desetletjih. Duhamorno štetje italijanskih jezuitov je postalo anahronizem – nadomestili so ga zobniški mehanizmi.

Johann Bernoulli je leta 1696 ugotovil, da je rešitev problema brahistohrone prav tako cikloida. Vendar svoje rešitve ni objavil takoj, ampak je problem zastavil v reviji *Acta eruditorum.* Pet matematikov je poslalo rešitve: Isaac Newton, Jakob Bernoulli, Gottfried Leibniz, Ehrenfried Walther von Tschirnhaus in Guillaume de l'Hôpital. Newton naj bi, po poročilu biografa, revijo dobil ob štirih popoldne, reševal problem vso noč in naslednji dan poslal rešitev. Objave teh najboljših evropskih znanstvenikov (revija je izpustila prispevek de l'Hôpitala, učenca Johanna Bernoullija) so bile začetek variacijskega računa.

Predstavil sem le nekaj stvari iz začetnega dela te knjige in nekaj malega tudi dodal. Ekelundovo potovanje sega do sedanjosti in ga resnično ne morem povzeti na kratko. Upam, da je napisano dovolj dobra vaba za bralca, ki bo v knjigi našel še mnogo mnogo zanimivega.

LITERATURA

[1] *Biographical Encyclopedia of Scientists*, Third Edition, John Daintith (ed.), CRC Press, 2009, str. 640 (posnetek v Google Books).

[2] *Doubting, Testing, and Confirming Galileo: A translation of Giovanni Battista Riccioli's experiments regarding the motion of a falling body, as reported in his 1651 Almagestum Novum* `http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1204/1204.3267.pdf`, ogled 17. 3. 2014.

[3] E. Beloglavec in M. Lakner, *Matematično nihalo*, Obz. mat. fiz. **31** (1984), 4, 97–100.

Peter Legiša

DR. JERNEJ BARBIČ MED LETOŠNJIMI SLOANOVIMI NAGRAJENCI

Ameriška zasebna Fundacija Alfreda P. Sloana je 18. februarja 2014 razglasila letošnji izbor 126 najboljših mladih znanstvenikov iz ZDA in Kanade, ki delujejo na enem od osmih področij: matematiki, računalništvu, kemiji, računski in evolucionarni molekularni biologiji, nevroznanosti, oceanski znanosti ali fiziki. Med letošnjimi 16 prejemniki prestižne Sloanove raziskovalne nagrade (Sloan Research Fellowship) za področje računalništva je tudi slovenski raziskovalec dr. Jernej Barbič (roj. 1976), matematik in profesor za računalniško grafiko na University of Southern California, Los Angeles, ZDA. Nagrada, ki jo podeljujejo od leta 1955, prinaša tudi 50.000 USD raziskovalnega denarja, toda večji kot njena finančna vrednost je njen prestiž. Med preteklimi nagrajenci sta bila denimo tudi fizik R. Feynmann in matematik J. Nash ter še 40 kasnejših prejemnikov Nobelove nagrade, zato ima Sloanova nagrada tudi vzdevek »Nobelova nagrada za mlade«. Dr. Barbič sicer ni prvi slovenski prejemnik – pred njim so nagrado prejeli že dr. Igor Kukavica (matematika, 2000), dr. Uroš Seljak (fizika, 2001), dr. Kristijan Haule (fizika, 2008) in dr. Jure Leskovec (računalništvo, 2012).

Dr. Barbič izhaja iz okolice Tolmina, kjer je obiskoval tudi gimnazijo. Že v srednji šoli je nase opozoril z uvrstitvijo na mednarodno matematično olimpijado v letih 1994 in 1995, bil je tudi med diamantnimi maturanti v prvi generaciji ob ponovno uvedeni maturi v Sloveniji leta 1995. Študij teoretične matematike na UL FMF je končal s študentsko Prešernovo nagrado, v Sloveniji začeti doktorski študij pa je nadaljeval na področju računalništva na univerzi Carnegie Mellon v ZDA in se podoktorsko izpopolnjeval še na

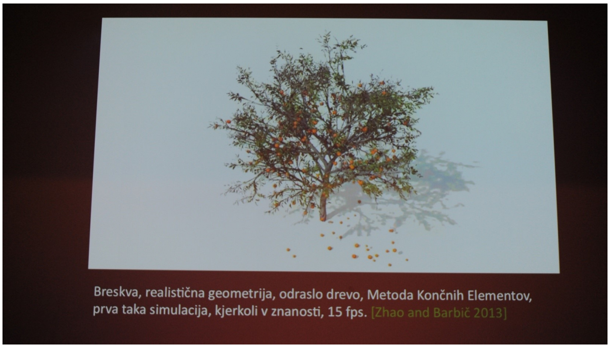
Dr. Barbič, častni gost na prireditvi Bistroumi 2014. (foto J. Šuntajs)

Dr. Barbič s člani letošnjih olimpijskih ekip DMFA Slovenije. (foto J. Šuntajs)

znamenitem Massachusetts Institute of Technology. V svetovnih medijih je dr. Barbič prvič zaslovel že leta 2011, ko ga je ameriška revija MIT Technology Review uvrstila med 35 najpomembnejših svetovnih inovatorjev do 35 let ob boku ustanoviteljev Facebooka in Googla. Istega leta pa je prejel tudi nagrado ameriške agencije NSF Early Career Award, ki pomeni petletno financiranje v vrednosti 500.000 USD, ki ga zagotavlja ameriška vlada. Raziskovalno delo dr. Barbiča je povezano z računalniško grafiko, animacijo, interaktivno fiziko, haptiko in zvokom. Njegove učinkovite algoritme za reševanje diferencialnih enačb matematične fizike uporabljajo številna podjetja iz letalske in medicinske industrije, sodeloval pa je tudi s podjetjem Weta Digital pri snemanju filma The Hobbit: The Desolation of Smaug (2013). S svojimi študenti trenutno nadaljuje razvoj odprte C/C++ knjižnice za mehaniko prožnih teles s pomočjo metode končnih elementov (FEM deformable objects), ki jo je poimenoval po slovenskem matematiku Juriju Vegi, zanjo pa so pokazala veliko zanimanje podjetja iz računalniške in filmske industrije. V zadnjih letih se je dr. Barbič iz tujine aktivno vključeval tudi v številne medijske razprave o izobraževalnem sistemu in financiranju znanosti v Sloveniji, svoje bogate osebne izkušnje pa rad velikodušno deli z vsemi zainteresiranimi tudi v obliki esejev in blogov na lastni spletni strani.

Konec maja je dr. Barbič obiskal Slovenijo in dvakrat tudi javno nastopil. Najprej je kot častni gost prireditve Bistroumi 2014 v Cankarjevem domu nagovoril najboljše mlade matematike, fizike in astronome, nagrajene na državnih tekmovanjih v znanju, ki jih prireja DMFA Slovenije, potem pa je sodeloval pri podelitvi nagrad in razglasitvi olimpijskih ekip, med podelitvijo in po njej pa se je tudi živahno pogovarjal in fotografiral s številnimi učenci in dijaki. Nekaj dni kasneje je obiskal še Pedagoško fakulteto v Ljubljani in v polni predavalnici bodočim učiteljem matematike in računalništva

Dr. Barbič s študenti PeF, bodočimi profesorji matematike in računalništva. (foto B. Kuzman)



Dr. Barbič je mladim poslušalcem predstavil tudi svoje raziskovalne dosežke. (foto J. Šuntajs)

najprej predstavil svojo karierno pot ter svoje vrhunske znanstvene dosežke na področju računalniške grafike, v drugem delu predavanja pa jim je podal številne informacije o študiju v ZDA, od načinov soočanja s problemi »akademske integritete« do lastnega pristopa k poučevanju in organizaciji predavanj. Ob koncu je na vprašanje, kaj vidi kot glavni izziv bodočih pedagogov, ki svoje karierne poti večinoma ne vidijo v vrhunskem znanstvenem delu, prijazno odgovoril, da je tudi njegova mati predmetna učiteljica in da je njihovo poslanstvo v tem, da s svojim delom izboljšajo življenje generacijam svojih učencev, tako najbolj nadarjenim kot tudi tistim s socialnega roba.

Boštjan Kuzman

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAJ 2014
Letnik 61, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Mladi James Clerk Maxwell in Maxwellove enačbe na spektru bele svetlobe (glej članek na strani 104).