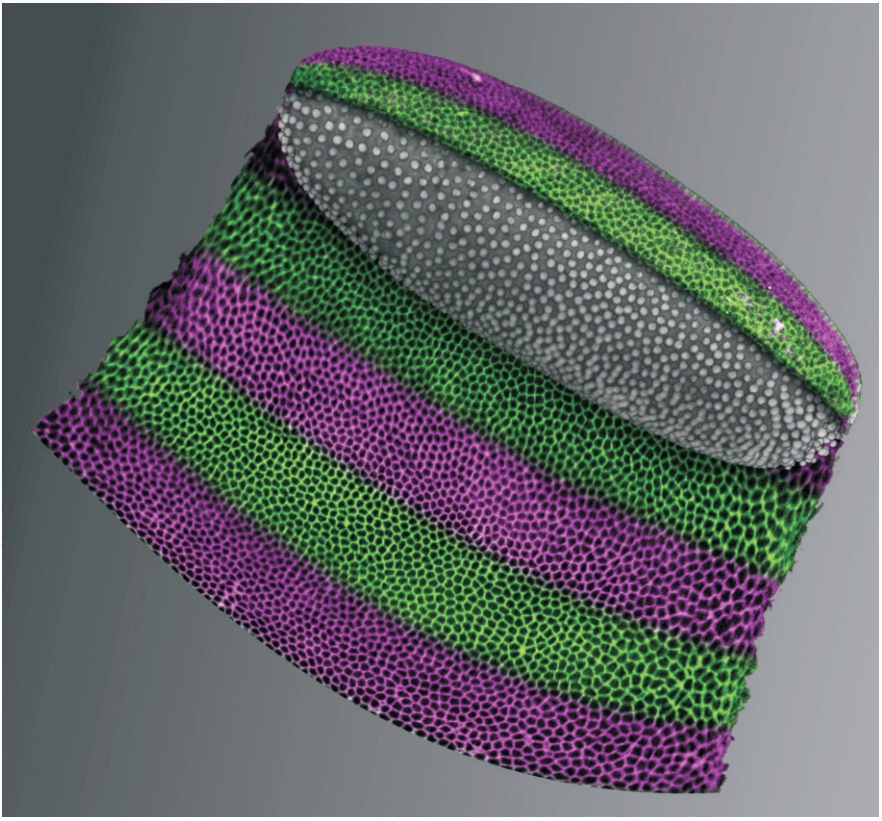
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2012
Letnik 59
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 59 • ŠT. 6 • STR. 201–240 • NOVEMBER 2012

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2012, letnik 59, številka 6, strani 201–240

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

VERIŽNICA – ELEMENTAREN IN CELOVIT PRISTOP[1]

KREŠIMIR VESELIĆ

Lehrgebiet Mathematische Physik
Fernuniversität Hagen

Math. Subj. Class. (2010): 49-01, 97-01

Podan je elementaren dokaz, ki ne zahteva znanja variacijskega računa, da je verižnica stacionarna točka klasičnega problema iskanja vezanega ekstrema. Dokazano je tudi, da ima ta problem v verižnici strogi globalni minimum.

CATENARY – AN ELEMENTARY AND COMPLETE APPROACH

The equilibrium of a standard catenary is solved without previous knowledge of the Variational Calculus. An elementary proof of the strict global minimum is provided.

Verižnica že dolgo rabi kot lep šolski primer iskanja vezanega ekstrema. Minimizirati moramo funkcional

$$\Phi(y) = \rho g \int_0^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \tag{1}$$

(potencialna energija grafa funkcije y), kjer sta ρ (dolžinska masna gostota) in g (težnostni pospešek) dani pozitivni konstanti. Funkcional moramo minimizirati med vsemi zvezno odvedljivimi funkcijami y, ki zadoščajo pogoju

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = d \tag{2}$$

(dožina grafa funkcije y je dana). Ob tem si predpišemo še robne pogoje. Obravnavali bomo dva tipa robnih pogojev: ali

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1 \tag{3}$$

(obe robni točki krivulje sta pribiti) ali pa

$$y(0) = 0, \quad y(x_1) = -\alpha x_1, \quad \alpha > 0 \tag{4}$$

(desni rob krivulje drsi vzdolž premice $y = -\alpha x$).

Pri uvodu v osnove klasičnega variacijskega računa in izpeljavi Euler-Lagrangeeve enačbe se za robne pogoje (3) hitro najde funkcijo hiperbolični kosinus kot ekstremalo zgornjega vezanega problema; robni pogoji (4) potrebujejo nekaj več teorije, saj se definicijski interval za funkcional Φ spreminja s funkcijo y. Še nekaj več izpeljav pa je treba za dokaz, da ima v dobljeni funkciji funkcional Φ tudi enoličen minimum. Pristop, ki nam pomaga iz

[1] V spomin profesorju Svetozarju Kurepi

te zagate in nam omogoči, da lahko oba tipa robnih pogojev obravnavamo hkrati, je, da iskane krivulje ne iščemo kot graf neke funkcije $y = y(x)$, ampak v parametrični obliki (npr. Troutman [1, pogl. 3])

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s \text{ ločna dolžina.}$$

Tu sta x in y zvezno odvedljivi funkciji na intervalu $[0, d]$, za kateri velja

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 - 1 = 0, \quad s \in [0, d]. \tag{5}$$

To nas pripelje do problema, ko moramo minimizirati funkcional

$$\Psi(x, y) = \rho g \int_0^d y\, ds \tag{6}$$

pri vezeh (5) in robnih pogojih: ali

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad x(d) = x_1, \quad y(d) = y_1, \tag{7}$$

ali pa

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(d) = -\alpha x(d), \quad \alpha > 0. \tag{8}$$

Kot je bilo pokazano že v [1], konveksnost funkcionalov poenostavi iskanje globalnega minimuma (vsaj za robne pogoje (7)). Vendar dejstvo, da je funkcional (6) linearen in da je vez (5) predstavljena s kvadratno funkcijo, omogoči nadaljnjo poenostavitev problema.

Vsak par (x, y) zvezno odvedljivih funkcij, ki zadoščata pogojem (5) in (7)/(8), bomo imenovali *konfiguracija.* Za poljubni konfiguraciji (x, y) in $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ ter poljubno zvezno funkcijo $\lambda = \lambda(s)$ imamo tako

$$\begin{aligned}
\Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) &= \int_0^d (\rho g \widetilde{y} + (\widetilde{x}'^2 + \widetilde{y}'^2 - 1)\lambda)\, ds \\
&= \int_0^d ((y + \widetilde{y} - y)\rho g + (y' + \widetilde{y}' - y')^2\lambda + (x' + \widetilde{x}' - x')^2\lambda - \lambda)\, ds \\
&= \Psi(x, y) + \int_0^d \Big((\widetilde{y} - y)\rho g + 2y'\lambda(\widetilde{y}' - y') + 2x'\lambda(\widetilde{x}' - x') + \\
&\qquad + (\widetilde{y}' - y')^2\lambda + (\widetilde{x}' - x')^2\lambda\Big)\, ds.
\end{aligned}$$

Pri predpostavki, da sta x in y dvakrat zvezno odvedljivi funkciji, funkcija λ pa enkrat zvezno odvedljiva, po integraciji po delih ob upoštevanju robnih pogojev pri 0 dobimo

$$\Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \Psi(x, y) + \tag{9}$$

$$+ \int_0^d (\rho g(\widetilde{y} - y) - 2(\lambda y')'(\widetilde{y} - y) - 2(\lambda x')'(\widetilde{x} - x))\, ds \tag{10}$$

$$+ 2\lambda(d)y'(d)(\widetilde{y}(d) - y(d)) + 2\lambda(d)x'(d)(\widetilde{x}(d) - x(d)) \tag{11}$$

$$+ \int_0^d \lambda((\widetilde{x}' - x')^2 + (\widetilde{y}' - y')^2)\, ds. \tag{12}$$

Takoj vidimo naslednje: če lahko najdemo taki funkciji x in y, da sta (10) in (11) enaka 0 za vsako konfiguracijo $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ in neko pozitivno funkcijo λ, potem je (x,y) enolična konfiguracija, ki minimizira funkcional Ψ. Rešiti moramo torej naslednji sistem navadnih diferencialnih enačb

$$-(2\lambda x')' = 0, \quad \rho g - (2\lambda y')' = 0, \quad x'^2 + y'^2 = 1 \tag{13}$$

pri robnih pogojih: ali

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(d) = y_1, \quad x(d) = x_1, \tag{14}$$

ali pa

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(d) = -\alpha x(d), \quad y'(d) = x'(d)/\alpha \tag{15}$$

(zadnji robni pogoj pri $s = d$ pomeni, da na desnem robu verižnica ostane pravokotna na premico, po kateri desni rob drsi).

Enačbe (13) zlahka integriramo

$$x(s) = c_1 \left(\operatorname{arsh}\left(\frac{s - c_2}{c_1}\right) + \operatorname{arsh}\frac{c_2}{c_1} \right) \tag{16}$$

$$y(s) = \sqrt{c_1^2 + (s - c_2)^2} - \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \tag{17}$$

$$\lambda(s) = \frac{\rho g}{2}\sqrt{c_1^2 + (s - c_2)^2} \tag{18}$$

in od tod dobimo

$$y(x) = c_1 \left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{c_1} + b\right) - \operatorname{ch} b \right).$$

Konstante določimo iz naslednjih pogojev:

$$d = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = c_1 \operatorname{sh}\left(\frac{x_1}{c_1} + b\right) - c_1 \operatorname{sh} b \tag{19}$$

$$y(x_1) = y_1 \quad \text{oziroma} \tag{20}$$

$$y(x_1) = -\alpha x_1, \quad y'(x_1) = \operatorname{sh}\left(\frac{x_1}{c_1} + b\right) = 1/\alpha. \tag{21}$$

Konstanti c_1 in b sta v primeru robnih pogojev (3) dobljeni na standarden način. Če delimo (20) z (19) in upoštevamo identitete med hiperboličnimi funkcijami, dobimo sistem enačb

$$\operatorname{th}\mu = \frac{y_1}{d}, \quad \mu = \frac{x_1}{2c_1} + b,$$

ki ima enolično rešitev μ. Podobno dobimo še sistem enačb

$$\frac{\sqrt{d^2 - y_i^2}}{x_1} = \frac{\operatorname{sh}\nu}{\nu}, \quad \nu = \frac{x_1}{2c_1},$$

ki ima enolično pozitivno rešitev ν. Vrednosti μ in ν določata iskani konstanti c_1 in b.

V primeru robnih pogojev (4) pa konstanti po nekaj elementarnih računskih operacijah enolično določimo takole: naj bo z enolična pozitivna rešitev enačbe

$$\frac{\alpha}{\sqrt{(\frac{\operatorname{sh}(z)}{z})^2 + \alpha^2}} = \operatorname{th}\left(z - \operatorname{arsh}\frac{1}{\alpha}\right).$$

S pomočjo te izračunamo

$$x_1 = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh} z}{z}\right)^2 + \alpha^2}}, \quad c_1 = \frac{x_1}{2z}, \quad b = \operatorname{arsh}\frac{1}{\alpha} - \frac{x_1}{c_1}.$$

Sklep

Predstavljena izpeljava verižnice kot stacionarne točke problema vezanega ekstrema (i) poda popoln odgovor na zastavljeni problem: obstoj, izračun in enoličnost točke, v kateri ima funkcional minimum, (ii) se izogne težavam z variabilno končno točko krivulje na naraven način in (iii) uporabi dejstvo, da je vez predstavljena s kvadratno funkcijo, kar nam z metodo „dopolnitve do popolnih kvadratov“ omogoči algebraičen dokaz obstoja strogega globalnega minimuma funkcionala.

Verižnica je primer mehaničnega sistema v gravitacijskem polju s togimi vezmi. Taki sistemi se pogosto lahko opišejo s kvadratično Lagrangeevo funkcijo, in tedaj je možen podoben elementaren dokaz obstoja strogega globalnega minimuma (npr. v [2], kjer je obravnavana končna verižnica).

Običajno se primer verižnice obravnava šele, ko se izpelje osnove variacijskega računa. Predstavljeni pristop pa se zlahka uporabi tudi kot uvod v variacijski račun, saj je popolnoma elementaren – obravnavamo le kvadratične funkcionale in rešujemo navadne linearne diferencialne enačbe (edine nelinearnosti se pojavijo le v integracijskih konstantah). Po drugi strani pa naš pristop v (9)–(12) že vsebuje nekaj bistvenih korakov Lagrangeeve metode.

LITERATURA

[1] J. L. Troutman, *Variatonal Calculus and Optima Control*, Springer, 1983.

[2] K. Veselić, *Finite catenary and the method of Lagrange*, SIAM, R. **37**, (1995), 224–229.

DEDEKINDOVE VSOTE IN KVADRATNI RECIPROCITETNI ZAKON

REBEKA RENKO ZVER

Prva gimnazija Maribor

Math. Subj. Class. (2010): 11F20

Predstavili bomo Dedekindove vsote in z njimi povezano reciprocitetno formulo ter pokazali, kako je iz le-te možno izpeljati znani kvadratni reciprocitetni zakon.

DEDEKIND SUMS AND THE QUADRATIC RECIPROCITY LAW

We will introduce the Dedekind sums with a related reciprocity formula which will lead us to the derivation of the known quadratic reciprocity law.

Uvod

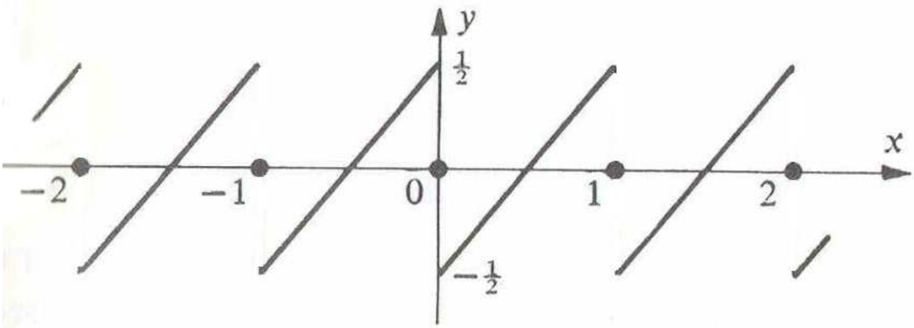
Dedekindove vsote so pomemben del klasične teorije števil in še danes pogosto uporabljena tema tudi na drugih področjih matematike. Sestavni del njihove definicije je naslednja funkcija:

Definicija 1 (Dvojni oklepaj).

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2}\,; & \text{če } x \text{ ni celo število,} \\ 0\,; & \text{če je } x \text{ celo število,} \end{cases} \tag{1}$$

kjer je $[x]$ največje celo število, ki ne presega $x \in \mathbb{R}$.

Njen graf je žagaste oblike:



Z uporabo dvojnega oklepaja (1) lahko definiramo najpomembnejši pojem tega sestavka:

Definicija 2 (Dedekindove vsote).

$$s(h,k)=\sum_{j=1}^{k}\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right),\qquad h\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Dedekindove vsote so dobile ime po znanem nemškem matematiku **Richardu Dedekindu**[1].

Ena njihovih glavnih lastnosti je simetričnost, predstavljena z naslednjo **reciprocitetno formulo**, ki je veljavna za tuji si naravni števili h,k:

$$12(s(h,k)+s(k,h))=-3+\frac{h}{k}+\frac{k}{h}+\frac{1}{hk}. \tag{3}$$

Reciprocitetna formula je pomembna sama po sebi, koristna pa je npr. pri izpeljavi splošnega (Jacobijevega) kvadratnega reciprocitetnega zakona. V zvezi s tem se spomnimo **Legendrovega simbola**, pri katerem za vsako naravno število n in liho praštevilo p, ki ne deli n, velja

$$\left(\frac{n}{p}\right)=\begin{cases}1\,; & \text{če obstaja tak } x\text{, da je } x^2\equiv n \pmod p,\\ -1\,; & \text{sicer.}\end{cases}$$

Če pa dovolimo za n tudi negativna cela števila, pa lahko povemo, da velja:

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=\begin{cases}1\,; & \text{če je } p\equiv 1 \pmod 4,\\ -1\,; & \text{če je } p\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

Ob upoštevanju multiplikativnosti Legendrovega simbola v n od tod sledi, da je dovolj poznati vrednosti simbola za naravne n. Vrednost $(-1/p)$ pa je tesno povezana s predstavljivostjo praštevila p kot vsote dveh kvadratov naravnih števil.

Jacobijev simbol potem definiramo (za poljubno naravno število n in za liho naravno število m, ki si je tuje z n in ima praštevilski razcep $m=$

---

[1]**Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916)** se je rodil v Braunschweigu v Nemčiji, kjer je obiskoval osnovno in srednjo šolo, študiral pa je na univerzi v Göttingenu in Berlinu. Doktoriral je leta 1852 pri Gaussu v Göttingenu kot njegov zadnji študent, habilitacijo pa je opravil leta 1854 v Berlinu istočasno z Riemannom, s katerim sta bila kasneje nekaj časa tudi učiteljska kolega. Vrnil se je v Göttingen, kjer je kot prvi poučeval Galoisovo teorijo. Kasneje je nekaj časa učil v Zürichu in nato do upokojitve 1894 v rodnem Braunschweigu. Znan je po svojem delu in rezultatih iz algebre (definicija idealov, algebraični dokaz Riemann-Rochovega izreka za kompaktne Riemannove ploskve), analize (prerezi kot model za realna števila) in teorije množic (definiciji neskončne množice). Na njegove matematične raziskave so največ vplivali Gauss, Dirichlet in Riemann, katerih zbrana dela je urejal. Zbrani in dopolnjeni Riemannovi zapiski so izšli leta 1876 s Heinrichom Webrom kot glavnim urednikom. Rokopisa, ki sta obravnavala teorijo eliptičnih modularnih funkcij, pa je uredil sam Dedekind [2].

$\prod_{j=1}^{r} p_j$ na ne nujno različne prafaktorje) kot produkt ustreznih Legendrovih simbolov:

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{n}{p_j}\right).$$

Splošni kvadratni reciprocitetni zakon pravi, da za tuji si lihi naravni števili h in k z Jacobijevima simboloma $\left(\frac{h}{k}\right)$ in $\left(\frac{k}{h}\right)$ velja enakost

$$\left(\frac{h}{k}\right)\left(\frac{k}{h}\right) = (-1)^{\frac{h-1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}}.$$

Pred leti je Obzornik že pisal [5] o posebnem primeru tega zakona, ko sta h in k različni lihi praštevili.

V nadaljevanju bomo najprej spoznali nekatere elementarne lastnosti Dedekindovih vsot (2) in prek njih izpeljali reciprocitetno formulo (3). Nato bomo (ob privzetku posplošene Gaussove leme) z uporabo reciprocitetne formule dokazali splošni kvadratni reciprocitetni zakon, na koncu pa dodali še nekaj opomb o drugih vidikih Dedekindovih vsot.

Dedekindove vsote in reciprocitetna formula

Najprej dokažimo, da je funkcija dvojni oklepaj periodična in liha.

Trditev 1. *Za poljubno celo število n in poljubno realno število x velja:*

(a) $((x+n)) = ((x))$,

(b) $((-x)) = -((x))$.

Dokaz. (a) Za celo število x je $((x+n)) = 0 = ((x))$, sicer pa zaradi $[x+n] = [x]+n$ velja

$$((x+n)) = x+n-[x+n]-\tfrac{1}{2} = x+n-[x]-n-\tfrac{1}{2} = ((x)).$$

(b) Za $x \in \mathbb{Z}$ je dokaz trivialen, za $x \notin \mathbb{Z}$ pa rezultat sledi iz enakosti $[x]+[-x] = -1$. ∎

Sedaj se spomnimo pojma, ki ga bomo potrebovali v nadaljevanju.

Popolni sistem ostankov po modulu k je taka množica celih števil $P = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, da je $j_i \equiv i \pmod{k}$ za vsak $i = 1, 2, ..., k$.

Pri tem smo upoštevali, da velja $k \equiv 0 \pmod{k}$, zato bomo posledično za popoln sistem ostankov po modulu k venomer uporabljali množico $\{1, 2, \ldots, k\}$.

V primeru, ko je h tuj proti k, je potem tudi $hP = \{hj_1, hj_2, ..., hj_k\}$ popolni sistem ostankov po modulu k, saj je $hj_i \equiv hi \pmod{k}$ in je preslikava $i \mapsto hi \pmod{k}$ v tem primeru injektivna, torej permutacija množice $\{1, 2, ..., k\}$.

Trditev 2. *Naj bo P poljuben popolni sistem ostankov po modulu k. Tedaj velja:*

(a) $\displaystyle\sum_{j\in P}\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)=\sum_{j=1}^{k}\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)=0.$

(b) *Če je k naravno, h pa celo število, tuje proti k, je tudi*

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right)=0. \tag{4}$$

Dokaz. (a) Izberimo elemente iz popolnega sistema ostankov P in jih zapišimo v obliki:

$$j_1=1+k\cdot n_1,\quad j_2=2+k\cdot n_2,\quad \ldots$$
$$j_{k-1}=(k-1)+k\cdot n_{k-1},\quad j_k=k\cdot n_k,$$

kjer so $n_1,\ldots,n_k$ iz množice celih števil. Tedaj je po trditvi 1

$$\begin{aligned}\sum_{j\in P}\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)&=\left(\left(\frac{1}{k}+n_1\right)\right)+\left(\left(\frac{2}{k}+n_2\right)\right)+\ldots+\left(\left(\frac{0}{k}+n_k\right)\right)\\&=\sum_{j=1}^{k-1}\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right).\end{aligned}$$

To pa je po definiciji 1 in dejstvu $\left[\frac{j}{k}\right]=0$ za $1\le j<k$ naprej enako:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k-1}\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)&=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{k}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{k-1}{k}-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{k(k-1)}{2k}-\frac{k-1}{2}=0.\end{aligned}$$

(b) Dokaz sledi iz točke (a), saj je tudi hP popolni sistem ostankov po modulu k. ∎

Opomba 1. Opazimo, da je zadnji člen v vsoti $\sum_{j=1}^{k}\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)$ ali $\sum_{j=1}^{k}\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right)$ enak nič, zato je vseeno, ali v takih vsotah seštevamo do k ali do $k-1$. To bomo v nadaljevanju še večkrat upoštevali.

Dokažimo še nekaj **osnovnih lastnosti Dedekindovih vsot**.

Trditev 3. *Imejmo poljuben popolni sistem $P = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ ostankov po modulu k. Naj bo h poljubno celo, k pa naravno število, tuje s h. Tedaj velja:*

$$s(h,k) = \sum_{j \in P} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right).$$

Trditev pomeni, da je Dedekindova vsota $s(h,k)$ v primeru tujih si števil h, k neodvisna od izbire popolnega sistema ostankov po modulu k. Dokažemo jo na popolnoma enak način kot trditev 2, če le upoštevamo definicijo popolnega sistema ostankov po modulu k in periodičnost dvojnega oklepaja.

V posebnem primeru je od izbire popolnega sistema ostankov P neodvisna tudi vsota

$$s(1,k) = \sum_{j \in P} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right) = \sum_{j \in P} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)^2. \tag{5}$$

Računanje Dedekindovih vsot pa se da še nekoliko poenostaviti; zapišemo jih lahko samo z enim dvojnim oklepajem.

Trditev 4. *Za vsako celo število h in naravno število k, ki si je tuje s h, velja:*

$$s(h,k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k}\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right).$$

Dokaz. Zadnji člen v vsoti (2) je enak nič, tako da imamo:

$$s(h,k) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{j}{k} - \left[\frac{j}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right).$$

Upoštevajmo, da je $\left[\frac{j}{k}\right] = 0$, za $j < k$ in enakost (4), pa dobimo:

$$s(h,k) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{j}{k} - \frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k}\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k}\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right).$$

■

Najpomembnejša lastnost Dedekindovih vsot $s(h,k)$ je reciprocitetna formula. V literaturi zanjo obstaja več dokazov, enega bomo navedli sedaj.

Izrek 5 (Reciprocitetna formula). *Za poljubni tuji si naravni števili h in k velja naslednja enakost:*

$$12(s(h,k)+s(k,h)) = -3 + \frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk}. \tag{6}$$

Dokaz. Za $h = k = 1$ je enakost izpolnjena, saj sta obe strani enaki nič. V vseh drugih primerih pa lahko zaradi simetričnosti reciprocitetne formule predpostavimo, da je $k > 1$. Kot vemo, je zaradi tujosti števil h in k poleg $P = \{1, 2, ..., k\}$ tudi $P' = \{hj;\ j \in P\}$ popolni sistem ostankov po modulu k, zato zaradi (5) velja:

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right)^2 = \sum_{i \in P'} \left(\left(\frac{i}{k}\right)\right)^2 = \sum_{j=1}^{k} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)^2.$$

Torej po eni strani dobimo

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right)^2 &= \sum_{j=1}^{k} \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right)^2 = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{j}{k} - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{k-1} j^2 - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1} j + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k-1} 1,\end{aligned} \tag{7}$$

po drugi strani pa imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right)^2 &= \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{hj}{k} - \left[\frac{hj}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)^2 = \\ &= 2h\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k}\left(\frac{hj}{k} - \left[\frac{hj}{k}\right] - \frac{1}{2}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{hj}{k}\right]\left(\left[\frac{hj}{k}\right] + 1\right) - \\ &\quad - \frac{h^2}{k^2}\sum_{j=1}^{k} j^2 + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k-1} 1 = \\ &= 2h\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k}\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{hj}{k}\right]\left(\left[\frac{hj}{k}\right] + 1\right) - \frac{h^2}{k^2}\sum_{j=1}^{k} j^2 + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k-1} 1.\end{aligned} \tag{8}$$

Če primerjamo (7) in (8), dobimo

$$2h\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k}\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right) + \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{hj}{k}\right]\left(\left[\frac{hj}{k}\right] + 1\right) - \frac{h^2}{k^2}\sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{k-1} j^2 - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1} j$$

in z uporabo trditve 4 najdemo

$$2hs(h,k)+\sum_{j=1}^{k-1}\left[\frac{hj}{k}\right]\left(\left[\frac{hj}{k}\right]+1\right)=\frac{h^2+1}{k^2}\sum_{j=1}^{k-1}j^2-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}j. \tag{9}$$

V vsoti na levi strani imamo $0\leq\left[\frac{hj}{k}\right]\leq h-1$. Za lažje računanje označimo

$$\left[\frac{hj}{k}\right]=i-1,\quad \text{za neki}\quad i=1,2,\dots,h. \tag{10}$$

Skušajmo ugotoviti, za katere j doseže $\left[\frac{hj}{k}\right]$ vrednost $i-1$. Ker $\frac{hj}{k}$ ni celo število, je enakost (10) ekvivalentna pogoju

$$i-1<\frac{hj}{k}<i,$$

zato lahko zapišemo

$$\frac{k(i-1)}{h}<j<\frac{ki}{h}.$$

Če torej j teče od $\left[\frac{k(i-1)}{h}\right]+1$ do vključno $\left[\frac{ki}{h}\right]$, je za $i<h$ vrednost $\left[\frac{hj}{k}\right]$ enaka $i-1$. Če pa je $i=h$, je $\frac{ki}{h}=k$ in $\left[\frac{hj}{k}\right]=h-1$ natanko takrat, ko j zavzame vrednosti od $\left[\frac{k(h-1)}{h}\right]+1$ do vključno $k-1$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k-1}\left[\frac{hj}{k}\right]\left(\left[\frac{hj}{k}\right]+1\right)=\\
&=\sum_{i=1}^{h-1}(i-1)i\left\{\left[\frac{ki}{h}\right]-\left[\frac{k(i-1)}{h}\right]\right\}+(h-1)h\left\{(k-1)-\left[\frac{k(h-1)}{h}\right]\right\}=\\
&=\sum_{i=1}^{h-1}(i-1)i\left[\frac{ki}{h}\right]-\sum_{i=1}^{h}(i-1)i\left[\frac{k(i-1)}{h}\right]+(h-1)h(k-1).
\end{aligned}$$

Druga vsota na koncu je enaka vsoti $\sum_{i=1}^{h-1}i(i+1)\left[\frac{ki}{h}\right]$, zato lahko obe vsoti združimo in po krajšem računu dobimo:

$$\sum_{j=1}^{k-1}\left[\frac{hj}{k}\right]\left(\left[\frac{hj}{k}\right]+1\right)=\sum_{i=1}^{h-1}\left[\frac{ki}{h}\right](i(i-1)-i(i+1))+(h-1)h(k-1)=$$
$$=-2\sum_{i=1}^{h-1}i\left(\frac{ki}{h}-\left(\left(\frac{ki}{h}\right)\right)-\frac{1}{2}\right)+(h-1)h(k-1)=$$
$$=-\frac{2k}{h}\sum_{i=1}^{h-1}i^2+2h\sum_{i=1}^{h-1}\frac{i}{h}\left(\left(\frac{ki}{h}\right)\right)+\sum_{i=1}^{h-1}i+(h-1)h(k-1)=$$
$$=2hs(k,h)-\frac{2k}{h}\sum_{i=1}^{h-1}i^2+\sum_{i=1}^{h-1}i+(h-1)h(k-1). \qquad (11)$$

Pri tem smo v zadnji vrstici uporabili trditev 4.
Primerjava (9) in (11) nam sedaj pove:

$$2hs(h,k)+2hs(k,h)=$$
$$=\frac{h^2+1}{k^2}\sum_{j=1}^{k-1}j^2-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}j+\frac{2k}{h}\sum_{i=1}^{h-1}i^2-\sum_{i=1}^{h-1}i-(h-1)h(k-1) \qquad (12)$$

oziroma

$$2h(s(h,k)+s(k,h))=\frac{h^2+1}{k^2}\cdot\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}-\frac{1}{k}\cdot\frac{(k-1)k}{2}+$$
$$+\frac{2k}{h}\cdot\frac{(h-1)h(2h-1)}{6}-\frac{(h-1)h}{2}-(h-1)h(k-1).$$

Poenostavimo in dobimo:

$$12(s(h,k)+s(k,h))=-3+\frac{h}{k}+\frac{k}{h}+\frac{1}{hk}. \qquad \blacksquare$$

Kvadratni reciprocitetni zakon

Za izpeljavo splošnega kvadratnega reciprocitetnega zakona potrebujemo naslednjo lemo, ki jo navedimo brez dokaza.

Lema 6 (Posplošena Gaussova lema). *Naj bosta h in k tuji si naravni števili, pri čemer je k liho število. Naj pomeni m število najmanjših pozitivnih ostankov, večjih od $\frac{k}{2}$, pri deljenju števil hj, $j=1,2,\ldots,\frac{k-1}{2}$, s številom k. Tedaj velja:*

$$\left(\frac{h}{k}\right)=(-1)^m.$$

Dokaz je možno najti v knjigi [1], str. 144–148. Trditev je posplošitev Gaussove leme, ki je sestavni del dokaza klasičnega Gaussovega kvadratnega reciprocitetnega izreka (glej npr. [5]). Namesto lihega števila k, ki si je tuje s h, tam nastopa liho praštevilo p, ki ne deli h, ter Legendrov simbol namesto Jacobijevega.

Tudi naslednjo trditev navedimo brez dokaza.

Trditev 7. *Za liho naravno število k, naravno število h, ki si je tuje s k, in za Jacobijev simbol $\left(\frac{h}{k}\right)$ velja naslednja modularna enakost*

$$12ks(h,k) \equiv k + 1 - 2\left(\frac{h}{k}\right) \pmod 8. \tag{13}$$

Ideja dokaza je naslednja. Najprej lahko brez težav iz trditve 4 izpeljemo enakost

$$12ks(h,k) = 2h(k-1)(2k-1) - 12\sum_{j=1}^{k-1} j\left[\frac{hj}{k}\right] - 3k(k-1), \tag{14}$$

nato pa z uporabo posplošene Gaussove leme postopoma reduciramo desno stran po modulu 8 (podrobnosti dokaza glej npr. v [4], str. 30–35 ali v [7], str. 97–99).

Na podlagi predhodno zapisanega sedaj dokažimo izrek:

Izrek 8 (Kvadratni reciprocitetni zakon). *Naj bosta h in k lihi, tuji si celi števili. Tedaj za Jacobijeva simbola $\left(\frac{h}{k}\right)$ in $\left(\frac{k}{h}\right)$ velja:*

$$\left(\frac{h}{k}\right)\left(\frac{k}{h}\right) = (-1)^{\frac{h-1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}}.$$

Dokaz. Iz enakosti (13) v trditvi 7 sklepamo, da je

$$12hk(s(h,k) + s(k,h)) \equiv 2hk + h + k - 2\left(h\left(\frac{h}{k}\right) + k\left(\frac{k}{h}\right)\right) \pmod 8.$$

Po drugi strani pa po reciprocitetni formuli (6) velja

$$12hk(s(h,k) + s(k,h)) = -3kh + h^2 + k^2 + 1.$$

Ker pa sta h in k liha, je

$$h^2 \equiv 1 \pmod 8 \quad \text{in} \quad k^2 \equiv 1 \pmod 8$$

in zato

$$12hk(s(h,k) + s(k,h)) \equiv -3kh + 3 \pmod 8.$$

Po primerjavi dobimo:

$$5hk+h+k-3\equiv 2\left(h\left(\frac{h}{k}\right)+k\left(\frac{k}{h}\right)\right)\pmod 8.$$

To kongruenco preoblikujmo v obliko, ki jo zahteva kvadratni recipročnostni zakon. Za vrednosti k in h upoštevajmo več možnosti glede deljivosti s številom 4.

1. Naj bo k oblike $\boldsymbol{k=4m+1}$, $\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}$.

   Tako je

   $$5h(4m+1)+h+4m+1-3\equiv 2\left(h\left(\frac{h}{k}\right)+(4m+1)\left(\frac{k}{h}\right)\right)\pmod 8,$$

   kar lahko preuredimo v

   $$(h+1)(2m-1)\equiv h\left(\frac{h}{k}\right)+\left(\frac{k}{h}\right)\pmod 4.$$

   Ker pa je h lih, je $h+1$ sod in zato $2m(h+1)\equiv 0 \pmod 4$, dobimo

   $$-h-1\equiv h\left(\frac{h}{k}\right)+\left(\frac{k}{h}\right)\pmod 4$$

   oziroma

   $$h\left(1+\left(\frac{h}{k}\right)\right)+\left(1+\left(\frac{k}{h}\right)\right)\equiv 0\pmod 4. \tag{15}$$

   (a) Naj bo še $\boldsymbol{h\equiv 1 \pmod 4}$. Tedaj iz (15) izpeljemo kongruenco

   $$\left(\frac{h}{k}\right)+\left(\frac{k}{h}\right)\equiv 2\pmod 4.$$

   Ker lahko $\left(\frac{h}{k}\right)$ in $\left(\frac{k}{h}\right)$ zavzameta le vrednosti ± 1, mora nujno veljati

   $$\left(\frac{h}{k}\right)=\left(\frac{k}{h}\right).$$

   (b) Če pa je $\boldsymbol{h\equiv -1 \pmod 4}$, neposredno izpeljemo $\left(\frac{h}{k}\right)\equiv\left(\frac{k}{h}\right)\pmod 4$ oziroma $\left(\frac{h}{k}\right)=\left(\frac{k}{h}\right)$.

V obeh primerih je torej

$$\left(\frac{h}{k}\right)\left(\frac{k}{h}\right) = 1 = (-1)^{\frac{h-1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}}.$$

2. Naj bo k oblike $\boldsymbol{k = 4m - 1}$, $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$. Tedaj je

$$5h(4m-1)+h+4m-1-3 \equiv 2\left(h\left(\frac{h}{k}\right) + (4m-1)\left(\frac{k}{h}\right)\right) \pmod 8,$$

kar lahko preuredimo v

$$(h+1)(2m-2) \equiv h\left(\frac{h}{k}\right) - \left(\frac{k}{h}\right) \pmod 4.$$

Spet zaradi lihosti števila h velja $2m(h+1) \equiv 0 \pmod 4$ in zato

$$-2h - 2 \equiv h\left(\frac{h}{k}\right) - \left(\frac{k}{h}\right) \pmod 4$$

oziroma

$$h\left(2 + \left(\frac{h}{k}\right)\right) + \left(2 - \left(\frac{k}{h}\right)\right) \equiv 0 \pmod 4. \tag{16}$$

(a) V primeru $\boldsymbol{h \equiv 1 \pmod 4}$ iz (16) takoj dobimo $\left(\frac{h}{k}\right) \equiv \left(\frac{k}{h}\right) \pmod 4$ oziroma

$$\left(\frac{h}{k}\right) = \left(\frac{k}{h}\right).$$

(b) Če pa je $\boldsymbol{h \equiv -1 \pmod 4}$, velja $\left(\frac{h}{k}\right) + \left(\frac{k}{h}\right) \equiv 0 \pmod 4$, torej $\left(\frac{h}{k}\right) = -\left(\frac{k}{h}\right)$. V primeru (a) je rezultat produkta torej enak 1, v (b) pa -1, kar lahko v eni vrstici zapišemo kot

$$\left(\frac{h}{k}\right)\left(\frac{k}{h}\right) = (-1)^{\frac{h-1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}}.$$

Tako smo dokazali želeno. ∎

Sklep

Z Dedekindovimi vsotami se je kasneje ukvarjalo še veliko matematikov, ki so osnovno definicijo prilagajali svojim potrebam. Tako lahko Dedekindove vsote, poleg omenjene, zapišemo še v več drugih oblikah. Navedimo dva taka možna zapisa, veljavna za tuji si naravni števili h in k (izpeljavo najdemo npr. v [4]):

1. Trigonometrična oblika:

$$s(h,k) = \frac{1}{4k}\sum_{j=1}^{k-1} \cot\left(\frac{j\pi}{k}\right)\cot\left(\frac{jh\pi}{k}\right).$$

2. Kompleksna oblika:

$$s(h,k) = -\frac{1}{k}\sum_{\omega} \frac{1}{(1-\omega^h)(1-\omega)} + \frac{k-1}{4k},$$

   kjer seštevamo po vseh k-tih korenih enote ω, različnih od 1.

Dedekindove vsote so pomembne same zase kot posebne aritmetične funkcije s številnimi lepimi lastnostmi in prav tako tudi v povezavi z drugimi področji matematike, npr. s trigonometričnimi funkcijami, s številom celoštevilskih točk v poliedrih v geometriji števil, z Dedekindovo funkcijo *eta* v teoriji eliptičnih funkcij, s teorijo enakomerne porazdelitve, s teorijo particij itd. (primerjaj npr. [4]). Raziskovanje Dedekindovih vsot je še danes zelo živo, saj v matematični bazi podatkov MathSciNet od leta 2000 naprej obstaja več kot 200 člankov na to temo.

Za pomoč pri delu s tem člankom bi se želela zahvaliti dr. Urošu Milutinoviću in dr. Milanu Hladniku.

LITERATURA

[1] P. Bachmann, *Die Elemente der Zahlentheorie*, Teubner, Leipzig, 1892.

[2] R. Dedekind, *Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann* Riemann's Gesammelte Math. Werke (1892), 466–478, Dedekind's Gesammelte Math. Werke (1930), 159–173.

[3] E. Grosswald, *Topics from the Theory of Numbers*, Birkhäuser, Boston, 1984.

[4] H. Rademacher in E. Grosswald, *Dedekind sums*, Math. Association of America, 1972.

[5] T. Peklar, *Varianta dokaza kvadratnega recipročnostnega zakona*, Obzornik mat. fiz. **36** (1989), 129–133.

[6] B. Riemann, *Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen*, Gesammelte Math. Werke, Dover, New York, 1953.

[7] R. Renko, *Dedekindove vsote*, magistrsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko Maribor, Univerza v Mariboru, Maribor, 2008.

SPIM: MIKROSKOPIJA Z RAVNINSKO OSVETLITVIJO

MARUŠA VITEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 87.64.kv, 87.57.qp, 87.18.Nq

Mikroskopija z ravninsko osvetlitvijo je fluorescenčna metoda, pri kateri vzorec osvetljujemo pravokotno na os detekcije s tanko svetlobno plastjo. Bledenje vzorca je pri tem zelo majhno, metoda pa omogoča hitro zajemanje in dobro prostorsko ločljivost. Je pomembna na področju razvojne biologije, saj z njo lahko slikamo velike žive vzorce na različnih prostorskih in časovnih skalah.

SPIM: SELECTIVE PLANE ILLUMINATION MICROSCOPY

Selective plane illumination microscopy is a method in which the sample is illuminated by a thin light plane, perpendicular to the direction of detection. The method is fast and provides low photo-bleaching and high spatial resolution. It is important in the field of developmental biology.

Uvod

Mikroskopija z ravninsko osvetlitvijo (ang. selective plane illumination microscopy, SPIM) je nova metoda fluorescenčne mikroskopije [1]. Razvita je bila za potrebe eksperimentov na področju razvojne biologije, ki preučuje rast in diferenciacijo celic ter razvoj tkiv, organov in celotne anatomije živali.

Za opazovanje celotnega poteka razvoja moramo slediti številnim procesom na zelo različnih prostorskih in časovnih skalah. Prostorska skala se razteza od nekaj μm za procese znotraj celice do nekaj mm za procese na ravni zarodka, časovna skala pa se razteza od nekaj sekund do nekaj dni. Poleg široke prostorske in časovne skale je izziv za opazovanje še dejstvo, da imamo opravka s precej velikim, tridimenzionalnim, v idealnem primeru živim vzorcem, ki veliko svetlobe siplje ali absorbira. V raziskavah življenjskih procesov potrebujemo neinvazivne metode, ki vzorca ne uničijo. Le tako lahko opazujemo nespremenjene procese in njihov prispevek k celotnemu razvoju organizma.

Za opazovanje tridimenzionalnih bioloških vzorcev se v veliki meri uporabljajo fluorescenčne metode. Vzorci morajo zato vsebovati fluorofore, fluorescenčna barvila, ki se s kovalentno vezjo vežejo na makromolekule. Ob osvetljevanju se svetloba prave valovne dolžine absorbira in vzbudi molekulo v višje energijsko stanje. Z vibracijskimi prehodi molekula nato preide v nižje vzbujeno stanje, odkoder se z izsevanjem fotona vrne v osnovno stanje. Izsevana svetloba ima večjo valovno dolžino od vpadne, zato ju lahko ločimo (npr. z dikroičnim zrcalom) in na detektor spustimo le izsevano svetlobo. Tako dobimo sliko opazovanega vzorca.

Pomembna slabost fluoroforov je, da jih določena količina vpadle svetlobe uniči. Vzorec zato s časom bledi, saj zaradi uničevanja fluoroforov seva vedno manj fluorescentne svetlobe. Čas osvetljevanja mora biti čim krajši, saj obsežno osvetljevanje lahko poleg bledenja povzroči tudi poškodbe vzorca [2].

Pri metodi SPIM je čas osvetljevanja posameznega dela vzorca relativno kratek, osvetljujemo namreč le tisto plast vzorca, katere sliko zajemamo. Bledenje je zato zelo majhno, malo je tudi poškodb vzorca. Podatke je mogoče zajemati z veliko hitrostjo [1]. SPIM so razvili leta 2004, temu pa je sledil še razvoj sorodnih metod, ki so SPIM izboljšale in nadgradile.

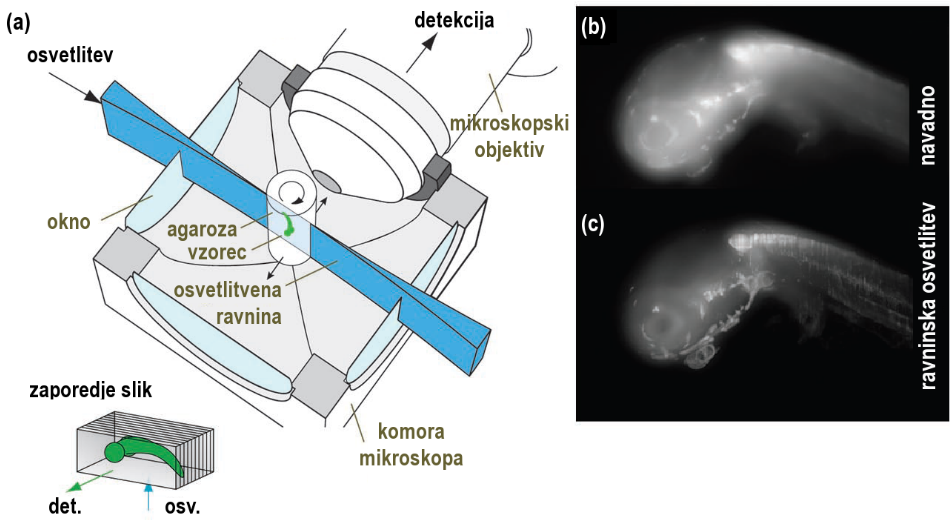
Mikroskopija z ravninsko osvetlitvijo

SPIM je metoda, pri kateri ločeno slikamo posamezne plasti vzorca. Optično ločevanje plasti poteka takole: vzorec od strani osvetlimo s tanko navpično svetlobno plastjo, imenovano osvetlitvena ravnina. Ta sovpada z goriščno ravnino mikroskopa in je pravokotna na vodoravno os detekcije (slika 1). Na presečišču osi detekcije in osvetlitvene ravnine je v napravo za mikropozicioniranje vpet vzorec v valju agaroze. Agarozni gel zagotavlja primerno okolje za živ vzorec, hkrati pa vzorec tudi fiksira. Naprava za mikropozicioniranje omogoča sukanje vzorca okoli navpične osi in premikanje vzdolž treh prostorskih osi.

Valj z vzorcem je potopljen v vodno okolje v komori mikroskopa. Večinoma za opazovanje uporabljamo imerzijski objektiv, ki je v stiku z vodnim okoljem v komori (slika 1), mogoča pa je tudi uporaba običajnega objektiva zunaj komore.

V vzorcu vpadna svetloba povzroči fluorescenco. S kamero detektiramo izsevano fluorescentno svetlobo iz poljubne navpične plasti vzorca. Če posnamemo slike dovolj gostega zaporedja plasti v eni smeri (ali v več smereh), lahko sestavimo tridimenzionalno sliko vzorca [1]. Tipični vzorci za opazovanje z metodo SPIM so zarodki rib medake (*Oryzias latipes*) in cebrice (*Danio rerio*) ter zarodki in odrasli osebki vinske mušice (*Drosophila melanogaster*). Vzorci so gensko spremenjeni, da vsebujejo fluorofore.

Svetlobno plast za osvetlitev vzorca dobimo tako, da kolimiran laserski snop primerno obrežemo, nato pa ga pošljemo skozi cilindrično lečo, ki snop v vodoravni smeri fokusira. V navpični smeri snop ostane kolimiran. Definirajmo koordinatni sistem, kjer je x-os vzporedna s smerjo detekcije, y-os navpična, z-os pa vzporedna s smerjo propagacije svetlobe v osvetlitveni plasti. Goriščna ravnina potemtakem leži v ravnini y-z. V tem koordinatnem sistemu lahko dobljeno svetlobno plast opišemo kot eno od rešitev



Slika 1. Mikroskopija z ravninsko osvetlitvijo. **(a)** Shema komore mikroskopa SPIM. Vzorec osvetljujemo s tanko svetlobno plastjo. Ta sovpada z goriščno ravnino in je pravokotna na os detekcije. Na presečišču osvetlitvene ravnine in osi detekcije je živ vzorec, denimo ribji zarodek, fiksiran v valju agaroze. Osvetlitev v plasti vzorca povzroči fluorescenco, ki jo zaznamo s kamero. Spodaj je prikazano zaporedje dvodimenzionalnih slik, ki jih lahko združimo v 3D sliko. **(b)** Projekcija tridimenzionalne slike zarodka ribe medake, posneta s konvencionalnim mikroskopom. **(c)** Projekcija tridimenzionalne slike istega vzorca, posneta z metodo SPIM. V tem primeru je kontrast bistveno boljši. Iz vira [1]. Ponatisnjeno z dovoljenjem AAAS.

paraksialne valovne enačbe, eliptičen Gaussov snop:

$$E(x,y,z) = \\ = E_0\sqrt{\frac{w_{x,0}}{w_x(z)}}\sqrt{\frac{w_{y,0}}{w_y(z)}}\cdot\exp\Big(-\frac{x^2}{w_x^2(z)}\Big)\cdot\exp\Big(-\frac{y^2}{w_y^2(z)}\Big)\cdot\exp(-i\varphi(x,y,z)), \tag{1}$$

kjer je E_0 amplituda, $w_{x,0}$ in $w_{y,0}$ širini grl v smeri x in y, $w_x(z)$ in $w_y(z)$ širini snopa pri z v smeri x in y in φ faza [3]. Grlo snopa je lega, v kateri je širina snopa najmanjša. V smeri y je grlo približno 200-krat širše od širine grla v smeri x. Valovna narava svetlobne plasti ni pomembna, intenziteta fluorescentne svetlobe je odvisna le od intenzitete osvetlitvene ravnine

$$I(x,y,z) = |E_0|^2\frac{w_{x,0}}{w_x(z)}\cdot\frac{w_{y,0}}{w_y(z)}\cdot\exp\left(-\frac{2x^2}{w_x^2(z)}\right)\cdot\exp\left(-\frac{2y^2}{w_y^2(z)}\right). \tag{2}$$

Laserski snop sestavlja svetloba iz modro-zelenega dela spektra z valovnimi dolžinami 488 nm in 514 nm, ki prihaja iz argonskega ionskega laserja, ter svetloba, ki prihaja iz dveh He-Ne laserjev in ima valovni dolžini 543 nm in 633 nm [4]. Debelina osvetlitvene plasti je tipično med 3 μm in 10 μm. Omejena je s pogojem, da mora biti plast približno enako debela na celotnem vidnem polju objektiva (lahko variira do 42 %) [1]. Objektiv z desetkratno povečavo in numerično aperturo 0.30 ima na primer vidno polje veliko 660 μm. Da bo na celotnem vidnem polju debelina osvetlitvene plasti variirala za manj kot 42 %, mora biti grlo plasti v x-smeri široko vsaj 6 μm.

Za detekcijo se uporabljajo CCD kamere. Hitrost zajemanja je od ene do štirih plasti na sekundo, pri čemer je slika ene plasti velika 1344×1024 pikslov. Vzorec se da vzdolž osi detekcije premikati po korakih velikosti od 0.5 do 5 μm [1].

Zaradi osvetlitve fluorofori v vzorcu izsevajo svetlobo v polni prostorski kot. Detektiramo le svetlobo, ki se izseva v smeri detektorja. Ker slikamo tridimenzionalne vzorce, govorimo o prečni ločljivosti v goriščni ravnini in o osni ločljivosti vzdolž osi detekcije. Prečno ločljivost σ_{xy} določa izraz

$$\sigma_{xy} = \frac{\lambda}{\sqrt{3 - 2\cos\theta - \cos 2\theta}}\,, \tag{3}$$

kjer je λ valovna dolžina svetlobe, θ pa polovica kota maksimalnega stožca, iz katerega lahko sistem sprejme svetlobo. Kot θ je povezan z numerično aperturo objektiva:

$$\mathrm{NA} = n\sin\theta\,, \tag{4}$$

kjer je n lomni količnik okoliškega medija objektiva.

Osna ločljivost metode je odvisna od osne ločljivosti detektorja in od debeline osvetlitvene plasti. Vedno je slabša od prečne ločljivosti.

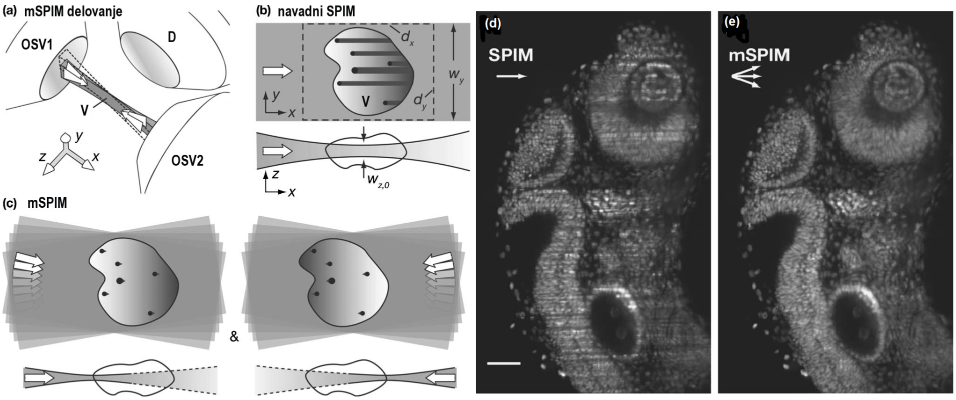
Izboljšave metode SPIM

Po letu 2004, ko so metodo SPIM prvič predstavili [1], je ta način slikanja doživel razcvet. Postal je eno glavnih orodij razvojne biologije, saj je primeren za opazovanje zelo različnih vzorcev: tankih, debelih, prozornih, delno neprozornih, različno sipajočih, in sicer na zelo različnih časovnih in prostorskih skalah. Za različne tipe vzorcev in za različne namene opazovanja je bilo mogoče metodo še izboljšati.

Največji problem pri metodi SPIM povzročata absorpcija in sipanje, saj imamo opravka z velikimi vzorci s specifično strukturo. Določeni deli vzorca svetlobo zelo močno absorbirajo. Ko se tak del vzorca znajde v osvetlitveni ravnini, za njim nastane senca, saj absorbira svetlobo, ki pride do njega. Prav tako določeni deli vzorca močno sipajo svetlobo. Ko svetloba pride do takega dela, se siplje v vse smeri. V goriščni ravnini objektiva za takšnim delom vzorca tako spet nastane senca, zaradi sipane svetlobe pa postanejo osvetljeni tudi bližnji deli vzorca, ki sicer niso v goriščni ravnini. Ta svetloba, ki ni v gorišču objektiva, prispeva le k ozadju slike in le-to zamegli. Tema problemoma se lahko delno izognemo z opazovanjem z več zornih kotov.

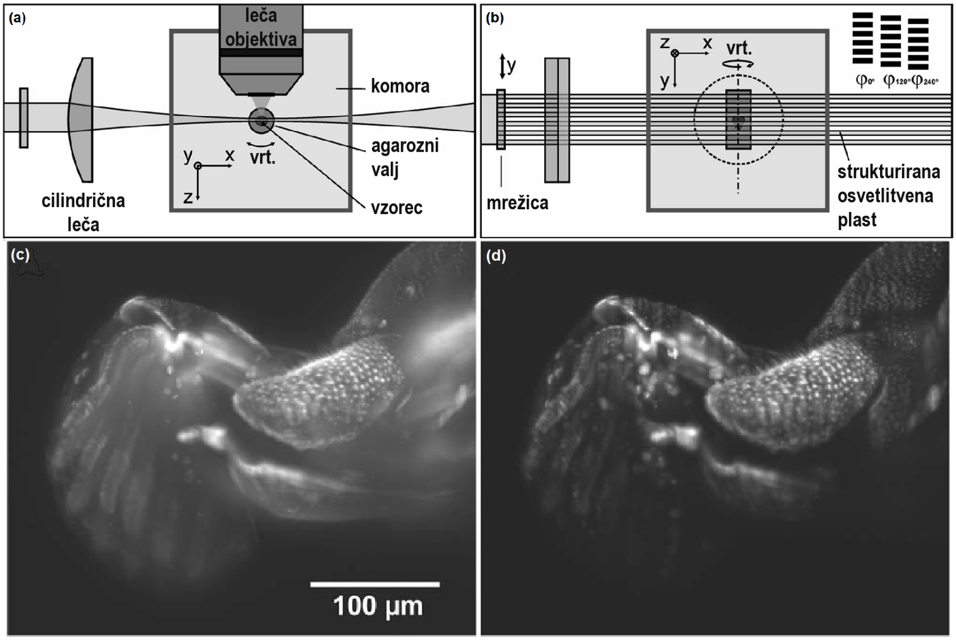
Večinoma vzorec slikamo iz štirih do osmih zornih kotov in pri vsakem kotu posnamemo 200–300 plasti [1]. Slikanje celotnega vzorca torej traja nekaj minut, kar omejuje časovno ločljivost mikroskopa. Kvaliteto slike lahko še dodatno povečamo z uporabo izboljšanih metod.

Pojava senc in zmanjševanja intenzitete svetlobe vzdolž osvetlitvene ravnine se med samim slikanjem lahko znebimo z večsmerno ravninsko osvetlitvijo mSPIM (ang. multidirectional SPIM, slika 2) [5]. Vzorec osvetljujemo z dveh nasprotnih strani hkrati. Poleg tega svetlobno plast v goriščni ravnini premikamo tako, da spreminjamo smer širjenja svetlobe med kotoma -10° in 10°. Zaradi spreminjanja tega kota se spreminja tudi kot senc za neprozornimi deli vzorca. Spreminjanje nagiba osvetlitvene plasti je hitro (1 kHz), čas zajemanja slike pa dovolj dolg (10–30 ms), da se sence v času zajemanja ene slike izpovprečijo (slika 2).



Slika 2. Delovanje metode mSPIM. **(a)** Shema mikroskopa mSPIM. Na shemi **(b)** vidimo, da pri navadni metodi SPIM za deli vzorca, ki absorbirajo, nastanejo sence. Shema **(c)** ilustrira, da sence pri metodi mSPIM izginejo, saj vzorec osvetljujemo z obeh strani in smer širjenja svetlobe spreminjamo med kotoma -10° in -10°. **(d, e)** Glava 35 ur starega zarodka cebrice. Na sliki **(d)**, posneti z metodo SPIM, so opazne proge, ki na sliki **(e)**, posneti z metodo mSPIM, zbledijo. Merilo na slikah je 50 μm. Iz vira [5]. Ponatisnjeno z dovoljenjem The Optical Society.

Druga izboljšava osnovne metode je mikroskopija s strukturirano ravninsko osvetlitvijo SPIM-SI (ang. SPIM with structured illumination, slika 3) [6]. Z njo lahko ločimo fluorescentno svetlobo, ki se je izsevala iz goriščne ravnine, od tiste, ki se je izsevala iz bližnjih delov vzorca, osvetljenih s sipano svetlobo. Pri tej metodi je pred cilindrično lečo, ki povzroči fokusiranje kolimiranega snopa v vodoravni smeri, postavljena mrežica, ki povzroči modulacijo svetlobne ravnine v navpični smeri. Perioda mrežice je 10–150 rež na mm, zato uklon nima pomembne vloge. Mrežico lahko premikamo v navpični smeri. Vsako plast vzorca posnamemo pri treh različnih položajih mrežice. To vsakič premaknemo za tretjino periode v navpični smeri. Za vsako plast tako posnamemo tri slike $I_{0^\circ}, I_{120^\circ}$ in I_{240°. Indeks se nanaša



Slika 3. Metoda SPIM-SI. Shema **(a)** prikazuje tlorisni pogled, ki je enak kot pri metodi SPIM. Razliko prikazuje shema **(b)**. Povsem na levi je mrežica, ki povzroča strukturiranost osvetlitvene plasti: namesto enotne plasti dobimo tanke pasove. Mrežico premikamo za tretjino periode mrežice v navpični smeri. Za vsako osvetljeno plast vzorca posnamemo tri slike pri različnih pozicijah mrežice, ustrezni osvetlitveni vzorci so prikazani desno zgoraj. Spodaj sta sliki rilčka vinske mušice. Slika **(c)** je posneta z navadno metodo SPIM, slika **(d)** pa z metodo SPIM-SI. Na njej so kontrasti bistveno boljši. Iz vira [6]. Ponatisnjeno z dovoljenjem The Optical Society.

na fazni zamik periodične strukture mrežice zaradi navpičnega premika.

Fluorescentna svetloba, ki izhaja iz goriščne ravnine, je vsa prostorsko modulirana, prispevki, ki ne prihajajo iz goriščne ravnine, pa so posledica sipanja in niso prostorsko modulirani. Ti prispevki so na vseh treh slikah iste plasti enaki. Iz treh slik ene plasti izboljšano sliko plasti izračunamo kot

$$I = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(I_{0^\circ} - I_{120^\circ})^2 + (I_{120^\circ} - I_{240^\circ})^2 + (I_{240^\circ} - I_{0^\circ})^2\right]}. \qquad (5)$$

Tako se znebimo prispevkov zaradi sipane svetlobe, ne da bi se pri tem spremenila ločljivost. Dobimo sliko z majhnim ozadjem in velikimi kontrasti. Čas snemanja treh slik ene plasti je med 0.3 s in 1 s, tako da za celoten vzorec, razdeljen na denimo 150 plasti, porabimo od 45 do 150 s [6].

Mikroskopija z digitalnim laserskim skeniranjem

Mikroskopija z digitalnim laserskim skeniranjem, DSLM (ang. digital scanned laser light sheet fluorescence microscopy) [7], je priredba metode SPIM. V tem primeru namesto osvetlitvene ravnine uporabimo približno 1 μm debel osvetlitveni žarek, ki ga premikamo v navpični smeri, se pravi vzdolž y-osi, in s tem skeniramo vzorec. Kamera integrira signal, ki ga dobiva, medtem ko laserski žarek skenira eno plast. Tako dobimo dvodimenzionalno sliko ene plasti. Vzorec nato enako kot pri metodi SPIM po korakih premikamo skozi goriščno ravnino, da posnamemo gosto zaporedje plasti. Ker skeniramo s konstantno hitrostjo, je osvetlitev celotne plasti vzorca enakomerna. Z uporabo fokusiranega laserskega žarka se močno izboljša izkoristek osvetlitve, saj se za osvetljevanje porabi kar 95 % svetlobe, ki pride iz laserja. Pri metodi SPIM se pri oblikovanju svetlobne ravnine izgubi velik del svetlobe. Izkoristek osvetljevanja je le 3 % [7]. Zaradi razlike v izkoristkih pri enakem laserskem izvoru in enakem času osvetljevanja vzorca dobimo pri metodi DSLM 30-krat več fluorescentne svetlobe kot pri metodi SPIM. To omogoča bistveno hitrejše zajemanje podatkov z metodo DSLM. Eno plast vzorca posnamemo v manj kot 1 ms, celoten vzorec torej slikamo v nekaj sekundah [7].

Tudi pri metodi DSLM se da prispevek zaradi sipanja zmanjšati s strukturiranim osvetljevanjem (DSLM-SI) [8]. Tu je prehod v strukturirano osvetlitev precej preprostejši kot pri metodi SPIM, saj strukturiranost osvetlitve dosežemo s sinusno modulacijo intenzitete laserskega žarka med skeniranjem. Frekvenco in fazo modulacije lahko hitro spreminjamo. Tudi tu sliko ene plasti posnamemo trikrat, pri fazah modulacije 0°, 120° in 240° in nato končno sliko sestavimo po enačbi (5). Pri tem se prispevki zaradi sipanja spet odštejejo in ostane nam slika z boljšim kontrastom. Pri zarodku ribe medake se kontrast z uporabo metode DSLM-SI v povprečju poveča za 80 %, pri zarodku vinske mušice, pri katerem je efekt sipanja zelo močan, pa kar za 260 % [8].

V primerjavi z metodo SPIM-SI ima DSLM-SI tri pomembne prednosti. Prva je, da je modulacija laserskega žarka lahko zelo hitra, kar omogoča hitro zajemanje slik s fazno zamaknjenimi strukturami osvetlitve. Druga prednost je izjemna stabilnost in kvaliteta osvetlitvenega vzorca v nasprotju z vzorcem, ki ga pri metodi SPIM-SI tvorimo z mrežico. Ta lahko rahlo drsi in spreminja lego, zato je manj primerna za dlje trajajoče slikanje vzorca. Tretja prednost metode DSLM-SI pa je možnost hitrega prilagajanja frekvence in faze modulacije intenzitete osvetljevanja, kar omogoča spreminjanje strukture osvetlitve v skladu s spreminjanjem sipalnih lastnosti opazovanega predmeta [8].

Sklep

Mikroskopija z ravninsko osvetlitvijo vzorca je nova metoda, pomembna predvsem v razvojni biologiji. Z metodo digitalnega laserskega skeniranja so denimo posneli tako imenovan „digitalni zarodek“ ribe cebrice. To je baza podatkov, ki vsebuje lege in hitrosti 92 % celičnih jeder zarodka vse od prve celične delitve do vzpostavitve bitja srca.

SPIM omogoča slikanje celotnih živih vzorcev, velikih do nekaj milimetrov. Je edina metoda, pri kateri je možno opazovanje celotnih živih organizmov s tako visoko ločljivostjo ($\sim \mu$m). Zelo pomembno je, da je nedestruktivna, tako da omogoča vpogled v življenjske procese in razvoj. Pri tovrstnih vzorcih zaradi absorpcije svetlobe in sipanja prihaja do težav, ki pa se jim lahko izognemo z večsmernim in s strukturiranim osvetljevanjem.

Zaradi uspešnosti metode SPIM v razvojni biologiji se je njena uporaba začela širiti tudi na druga področja. V fiziki razvijajo sorodno visokoločljivo metodo za optično sledenje nanodelcem.

SPIM je metoda z visoko ločljivostjo, hitrim zajemanjem, veliko penetracijsko globino ter odličnim razmerjem med signalom in šumom. Slabost metode pa je, da z njo lahko opazujemo samo vzorce, ki vsebujejo fluorofore. To navadno pomeni, da morajo biti vzorci gensko spremenjeni in torej niso več enaki izvornim. Leta 2011 je bil objavljen članek, ki predstavlja nizkokoherenčno mikroskopijo z ravninsko osvetlitvijo za slikanje bioloških vzorcev brez fluorescence [9]. V to smer bo verjetno tekel tudi nadaljnji razvoj, saj je končni cilj dobiti metodo, s katero bi lahko z visoko prostorsko in časovno ločljivostjo opazovali žive nespremenjene vzorce.

LITERATURA

[1] J. Huisken, J. Swoger, F. Del Bene, J. Wittbrodt in E. H. K. Stelzer, *Optical Sectioning Deep Inside Live Embryos by Selective Plane Illumination Microscopy*, Science **305**, 1007–1009 (2004).

[2] J. Huisken in D. Y. R. Stainier, *Selective plane illumination microscopy techniques in developmental biology*, Development **136**, 1963–1975 (2009).

[3] U. Kržič, *Multiple-view microscopy with light-sheet based fluorescence microscope*, Combined faculties for the natural Sciences and for Mathematics of the Ruperto-Carola University of Heidelberg, Germany, doktorska disertacija, 2009.

[4] K. Greger, J. Swoger in E. H. K. Stelzer, *Basic building units and properties of a fluorescence single plane illumination microscope*, Rev. Sci. Instrum. **78**, 023705 (2007).

[5] J. Huisken in D. Y. R. Stainier, *Even fluorescence excitation by multidirectional selective plane illumination microscopy (mSPIM)*, Opt. Lett. **32**, 2608–2610 (2007).

[6] T. Breuningen, K. Greger in E. H. K. Stelzer, *Lateral modulation boosts image quality in single plane illumination fluorescence microscopy*, Opt. Lett. **32**, 1938–1940 (2007).

[7] P. J. Keller, A. D. Schmidt, J. Wittbrodt in E. H. K. Stelzer, *Reconstruction of Zebrafish Early Embryonic Development by Scanned Light Sheet Microscopy*, Science **322**, 1065–1069 (2008).

[8] P. J. Keller, A. D. Schmidt, A. Santella, K. Khairy, Z. Bao, J. Wittbrodt in E. H. K. Stelzer, *Fast, high-contrast imaging of animal development with scanned light sheet-based structured-illumination microscopy*, Nat. Methods **7**, 637–642 (2010).

[9] Z. Xu in T. E. Holy, *Development of Low Coherence Light Sheet Illumination Microscope for Fluorescence-free Bioimaging*, Proc. SPIE **8129**, 812908 (2011).

O NAPAKAH V UČBENIKIH FIZIKE[1]

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.50.Zv

V učbenikih fizike naletimo na napake ali zavajajoče trditve. Nekatere so poučne in je vredno o njih poročati. Ali ponavljajoče se napake razkrivajo značilnosti poučevanja fizike?

ON ERRORS IN PHYSICS TEXTBOOKS

In physics textbooks errors or misleading statements are encountered. Some of them are instructive and it is worthwhile to report on them. Do repeated errors disclose characteristic traits of teaching?

Prispevki v poučevalskih revijah opozarjajo na nepravilnosti v učbenikih fizike od napak do zavajajočih trditev. Zaradi preglednosti jih po pojemajoči odgovornosti posameznika poskusimo razdeliti na tri skupine. V prvo štejemo ponavljajoče se resnejše napake, ki jih je treba popraviti, v drugo zgrešene trditve o razvoju fizike, ki se jim kaže izogibati, in v tretjo poimenovanje zakonov, ki ga ni smiselno spreminjati.

Napake

Najprej se spodobi pomesti pred lastnim pragom. V prvem delu *Fizike* [1] sta ostali dve napaki.

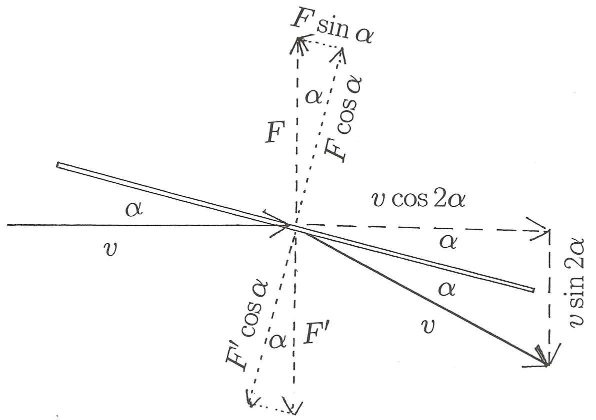
- Razlaga dinamičnega vzgona letalskega krila se je oprla na privzetek, da je zaradi krajše poti delov zraka ob spodnji ploskvi krila hitrost manjša in tlak večji kot ob zgornji. Po Bernoullijevi enačbi naj bi bil tlak zraka na spodnjo ploskev večji kot na zgornjo in bi rezultanta dala *dinamični vzgon*. Po ponavljajočih se ugovorih je razlaga, ki so jo vsebovale tudi nekatere znane knjige, prišla na slab glas. Albert Einstein je celo predlagal, da bi izboklina na zgornji strani krila poskrbela za dodatni vzgon. Po mnenju preizkusnega pilota je bilo letalo komaj mogoče voditi [2].

[1] Po prispevku na strokovnem srečanju DMFA 2012

Vzemimo, da se gostota zraka ρ ne spreminja in da del zraka ob gornji ploskvi krila potuje enak čas kot del ob spodnji ploskvi. Srednja hitrost ob zgornji ploskvi v_z je v enakem razmerju s srednjo hitrostjo ob spodnji v_s kot pot dela zraka ob zgornji ploskvi s_z s potjo dela ob spodnji s_s. Po Bernoullijevi enačbi bi bil dinamični vzgon:

$$F = \tfrac{1}{2}\rho(v_z^2 - v_s^2)S \approx \tfrac{1}{2}\rho v^2(s_z^2/s_s^2 - 1)S$$

s ploščino tlorisa krila S. Vzgon bi težo letala uravnovesil samo pri določeni hitrosti v. Z dosegljivim razmerjem s_z/s_s ne bi dobili dovolj velikega vzgona. Opazovanja v vetrovniku kažejo, da je privzetek o enakem času potovanja delov zraka zgrešen. Letalo lahko leti tudi na hrbtu in nekatera letala imajo simetrična krila s $s_z/s_s = 1$.



Slika 1. Odboj dela zraka na spodnjem delu nagnjene plošče.

Vzemimo ravno ploščo, ki je nagnjena za kot α, kot najpreprostejše simetrično krilo. V koordinatnem sistemu, v katerem miruje krilo, ima del zraka z maso m hitrost v v vodoravni smeri. Vzemimo, da se del na spodnji strani krila prožno odbije (slika 1). Sprememba komponente gibalne količine v vodoravni smeri je $mv\cos 2\alpha - mv = -mv(1-\cos 2\alpha)$ in v navpični smeri $-mv\sin 2\alpha - 0 = -mv\sin 2\alpha$. Po izreku o gibalni količini je navpična komponenta sunka sile F' krila na del zraka $F't = -mv\sin 2\alpha = -\rho vStv\sin 2\alpha$, tako da je $F' = -S\rho v^2\sin 2\alpha$. Sila zraka na krilo $F = -F'$ je usmerjena navzgor. Njeni komponenti pravokotno na krilo in tangentno nanj sta:

$$F_p = F\cos\alpha = \rho v^2 S\sin 2\alpha\cos\alpha \quad \text{in} \quad F_t = F\sin\alpha = \rho v^2 S\sin 2\alpha\sin\alpha. \tag{1}$$

Vodoravna komponenta sile zraka na krilo prispeva k uporu. Pri dani hitrosti je vzgon odvisen od hitrosti in od kota. Pri večji hitrosti je kot manjši, pri manjši večji. Vzgon je dovolj velik, da uravnovesi težo letala.

Merjenja pokažejo, da razlaga velja samo pri nadzvočni hitrosti [2]. Pri majhni hitrosti pa so pomembni pojavi na zgornji strani krila, ki jih nismo upoštevali. Tangentna komponenenta F_t požene zrak ob spodnji strani proti sprednjemu robu krila. Nastane tok zraka okoli krila s sklenjenimi tokovnicami. Tok se pridruži translacijskemu toku s tokovnicami, ki so v oddaljenosti vzporedne. Tokova obravnavamo kot laminarna. Podrobnejše pojasnilo ni preprosto.[2] V sestavljenem toku se na zgornji strani krila hitrosti delov zraka v translacijskem in v sklenjenem toku seštejeta, na spodnji strani pa se prva zaradi druge zmanjša. Hitrost delov zraka na spodnji strani krila je manjša kot na zgornji strani. Razlika kvadratov pa je večja, kot smo privzeli na začetku.

K razumevanju dinamičnega vzgona prispevajo slike tokovnic ob krilu [3]. Daleč pod krilom in daleč nad krilom so tokovnice preme in je tlak enak nemotenemu tlaku. Ob krilu pa se tokovnice ukrivijo navzdol. Tlak od nemotene vrednosti daleč pod krilom proti krilu narašča in je tik pod krilom večji od nemotenega tlaka. Tlak od nemotene vrednosti daleč nad krilom proti krilu pojema in je tik nad krilom manjši od nemotenega tlaka. Pri tem smo upoštevali, da se tlak spreminja prečno na ukrivljene tokovnice in narašča v smeri proč od krivinskega središča.[3] Tlak je pod krilom precej večji kot nad njim.

- Druga napaka zadeva površinsko napetost. Kapljevina 1 miruje na vodoravni trdni podlagi 3. Nad njima je para 2 v ravnovesju s kapljevino ali zrak. Površinska napetost na meji kapljevine in pare je γ_{12}, na meji pare in trdnine γ_{13} in na meji kapljevine in trdnine γ_{23}. Napetosti vzamemo za tangentne (slika 2 levo) in upoštevamo ravnovesje vodoravnih komponent:

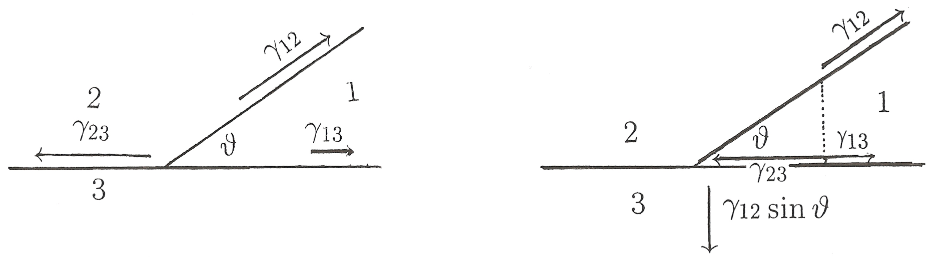
$$\gamma_{12}\cos\vartheta + \gamma_{13} = \gamma_{23} \quad \text{in} \quad \cos\vartheta = (\gamma_{23} - \gamma_{13})/\gamma_{12}.$$

Mejni kot ϑ leži med 0 in 90°, če kapljevina omoči trdnino, in med 90° in 180°, če je ne omoči. Enačba je prava, slika, ki jo vsebujejo tudi številni učbeniki, pa ni. Na njej navpične komponente sil niso uravnovešene.

Najprej se je treba dogovoriti, kateri sistem opazujemo. Izberemo prizmatični del kapljevine med mejnima ploskvama s paro in s trdnino ter z

[2] Nemški matematik Martin Wilhelm Kutta (1867–1944) je hitrostno polje okoli letalskega krila raziskal leta 1902 v doktorskem delu. Ruski fizik Nikolaj Jegorovič Žukovski (1847–1921) ga je neodvisno izpeljal leta 1906 [2].

[3] Nekateri menijo, da je v dinamični vzgon vpleten Coandov pojav (J. Strnad, *Presneti čaj*, Obzornik mat. fiz. **57** (2010) 176–182).

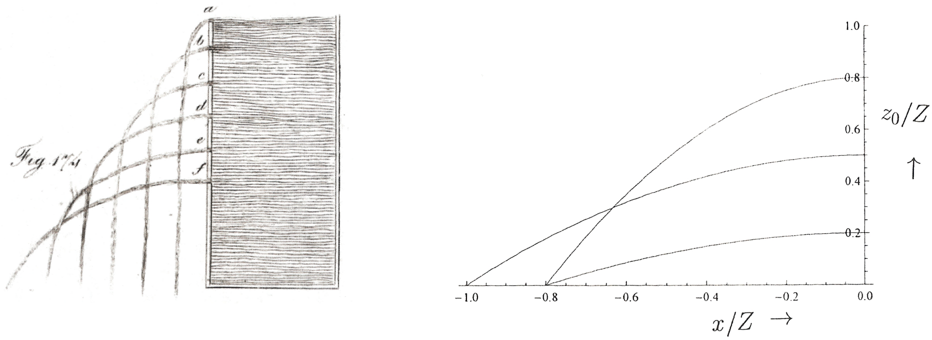


Slika 2. Sile pri mirujoči prizmatični kaplji na trdni podlagi niso uravnovešene (levo). Uravnovesimo jih tako, da dodamo komponento sile trdne podlage na kapljevino in premaknemo drugo komponento v kapljevino.

namišljeno mejo v kapljevini. Teže ne upoštevamo. Mejne ploskve sistema niso enakovredne. Trdnina deluje na kapljevino tudi s komponento sile, pravokotno na mejno ploskev, ki uravnovesi navpično komponento površinske napetosti $\gamma_{12}\sin\vartheta$. Vodoravna komponenta te sile prijemlje v kapljevini (slika 2 desno) [4], [5]. Opazovani del kapljevine mora biti dovolj velik, zato ne moremo opazovati samo roba, v katerem se stikajo vse tri faze. Razlaga je približna, ker smo sile, porazdeljene po ploskvi, nadomestili s silami, ki prijemljejo v črti [5].

• Razvpita napaka zadeva iztekanje kapljevine skozi odprtine v navpični steni [6], [7]. Leonardo da Vinci je mislil, da curek zadene tla tem dlje od posode, čim nižja je odprtina (slika 4). Evangelista Torricelli, ki se je razumel na tlak v kapljevini in hitrost iztekanja, je že leta 1640 zadevo spravil v red. Vodoravna komponenta hitrosti iztekanja je taka, kot da bi del kapljevine padel za višinsko razliko med gladino Z in višino odprtine z_0, torej $v_0^2 = 2g(Z - z_0)$. Del kapljevine se giblje po paraboli $z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$ in $x = v_0 t$, tako da velja $z - z_0 = -\frac{1}{2}gx^2/v_0^2$. Za $z = 0$ sledi $x = 2\sqrt{z_0(Z - z_0)}$. Doseg je največji pri $z_0 = \frac{1}{2}Z$. Okvirne razvrstitve dosegov v odvisnosti od višine odprtin ni težko opazovati. Odprtine v steni pa je treba skrbno izdelati, če naj se izid poskusa približa napovedi. Učbeniki so nekaj časa upoštevali Torricellijev račun, v 19. stoletju pa se je napaka zopet pojavila [7].

• V številnih učbenikih so entropijo pojasnili kot mero za nered. Menda je k temu prispevala Boltzmannova statistična pot. Predstava se je zdela posrečena, ker je abstraktno entropijo povezala z vsakdanjim pojmom. Vendar v splošnem nereda ni mogoče smiselno opredeliti. Po dobrih sto letih je predstava prišla na slab glas. Kos snovi s prostornino $2V$ ima dvakrat

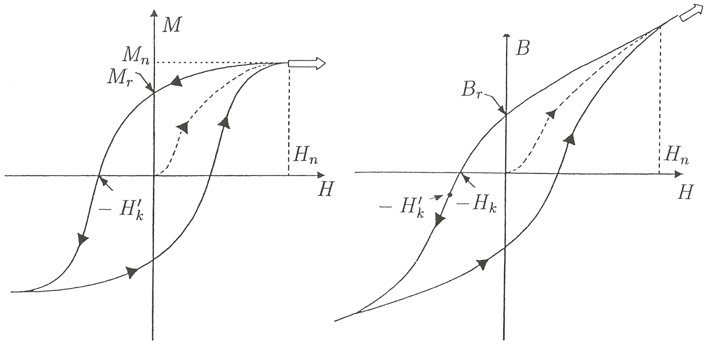


Slika 3. Curki pri iztekanju iz posode po Leonardu da Vinciju (levo) in po računu $z/Z = z_0/Z - (x/Z)^2/(4(1 - z_0/Z))$ (desno). Da Vincijevo delo *O gibanju in meri vode* je leta 1828 izdal Francesco Cardinali in ga je mogoče najti na spletu. Spodnji curki so podobni parabolam.

večjo entropijo kot kos iste snovi s prostornino V v enakih okoliščinah. Ali večjemu kosu ustreza večji nered? Težko je uvideti, da se pri reverzibilnih pojavih nered ne spremeni. Kako naj razumemo, „da je „nered“ v podhlajeni vodi manjši potem, ko ustrezni del vode ireverzibilno zmrzne?“ [8] Vzemimo, da pri navadnem zračnem tlaku vodo z maso m podhladimo do temperature T. V toplotno izoliranem sistemu del vode z maso m_l zmrzne in odda talilno toploto. Preostala voda se segreje do tališča T_0 in velja $m_l q_t = mc_p(T_0 - T)$. Delu vode, ki zmrzne, se entropija zmanjša za $m_l(q_t/T_0 - c_p \ln(T_0/T))$, delu vode, ki se segreje do tališča, pa poveča za $(m - m_l)c_p \ln(T_0/T)$. V celoti se entropija poveča za $mc_p(\ln(T_0/T) - 1 + T/T_0)$, ker je sprememba ireverzibilna. Podobno je pri rjavenju železa, ki je zgled za razpadanje. Pri navadnem zračnem tlaku in sobni temperaturi meri po enačbi $4Fe + 3O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3$ entropija začetnih snovi za 4 mole železa 725 J/K, končnih pa 176 J/K. Entropija se zmanjša za 549 J/K. Z njo se zmanjša „nered“. Zaradi oddane reakcijske toplote 168,4 kJ se v celoti entropija poveča za 1684 kJ/(298 K) = 5650 J/K [9],[10].

Predstava o neredu spregleda zvezo entropije z energijo. Predlagajo, da bi povečanje entropije povezali s širjenjem energije na večjo prostornino ali z dodatkom energije dani prostornini. Povezava entropije z razpršitvijo (dispersal) [10] ali širjenjem (spreading) [11] naj bi nadomestila povezavo z „neredom“. Morda se bo predlog uveljavil.

- Nekateri učbeniki ne upoštevajo, da se histerezna krivulja feromagnetne snovi za magnetizacijo $M = B/\mu_0 - H$ razlikuje od krivulje za gostoto magnetnega polja B [12]. Krivulja $M(H)$ ob nasičenju postane vodoravna, krivulja $B(H)$ pa ne (slika 3). Remanentna magnetizacija M_r pri jakosti $H = 0$ ustreza remanentni gostoti $B_r = \mu_0 M_r$. Koercitivna jakost H_k', pri kateri je $M(H_k') = 0$ in ji ustreza gostota $B_k' = \mu_0 H_k'$, pa se razlikuje od jakosti H_k, pri kateri je $B(H_k) = 0$ in ji ustreza magnetizacija $M_k = H_k$. Pri magnetno mehkih snoveh z ozko histerezno zanko so razlike majhne in jih na diagramih ne opazimo. Pri magnetno trdih snoveh s široko histerezno zanko pa jih kaže upoštevati. Del težav izvira tudi od nedoslednega poimenovanja. Nekateri H_k' imenujejo pripadajoča koercitivna jakost, drugi notranja koercitivna jakost, pogosto pa je ne razločijo od H_k.



Slika 4. Histerezni krivulji za magnetizacijo M (levo) in gostoto magnetnega polja B v odvisnosti od jakosti magnetnega polja (desno). Krivulji ustrezata magnetno trdi snovi [12].

• V učbenikih včasih še naletimo na „relativistično maso“ $m_r = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ [13]. Zares klasična gibalna količina mv preide v relativistično, če m zamenjamo z m_r. Toda relativistična kinetična energija $mc^2(1/\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1)$ se razlikuje od $\frac{1}{2} m_r v^2$. Einstein je zapisal: „Ne kaže uvajati pojma mase m_r gibajočega se telesa, ki je ni mogoče jasno definirati [...] bolje je omeniti izraz za gibalno količino in energijo gibajočega se telesa.“ Fiziki, ki se ukvarjajo z delci, uporabljajo samo lastno maso m [13]. Vendar so se celo ti včasih oprli na relativistično maso, ko so govorili ali pisali za nefizike. Namesto relativistične mase je veliko bolje izhajati od predstave, da čas vselej merimo z uro, ki se giblje skupaj z opazovanim delcem.

• Atomski model Nielsa Bohra iz leta 1913 se je dolgo časa obdržal v učbenikih, čeprav je vsaj od leta 1927 jasno, da elektronom ni mogoče prirediti tirnic. Tudi sicer je s kvantno mehaniko povezanih več zgrešenih trditev. Včasih valovno funkcijo poskusijo obravnavati kot klasično valovanje, čeprav to ni mogoče.

Zgrešene trditve

- Nekateri učbeniki zagotavljajo, da je Ole Rømer izmeril hitrost svetlobe. Ukvarjal se je z mrki Jupitrove lune Io, ki so jih na pariški zvezdarni zasledovali, da bi z njimi določili zemljepisno dolžino. Spoznali so neenakomernosti in pomislili, da bi utegnile biti povezane s končno hitrostjo svetlobe. Rømer je ugotovil, da časovni razmik med mrki narašča, ko se Zemlja oddaljuje od Jupitra, in zmanjšuje, ko se mu približuje. Leta 1676 je napovedal zakasnitev, ki so jo opazovanja podprla. Po tem je sklepal, da svetloba potuje s končno hitrostjo. Hitrosti pa ni navedel [14], čeprav bi jo z razpoložljivimi podatki lahko ocenil na 210 tisoč km/s.
- Pogosto zgrešijo vsebino Newtonove trditve o ohlajanju iz leta 1701 [15]: „Če vzamemo enake čase ohlajanja, bodo stopnje toplote v geometrijskem razmerju [. . .].“ To pomeni, da temperatura pojema eksponentno. Ni jasno, s kakšnim namenom je Newton delal poskuse, pri katerih je uporabil termometer na laneno olje. Morda mu je šlo le za vpeljavo „stopnje toplote“, naše temperature. Odvisnost velja le, če se telo ohlaja v stalnem toku zraka. Temperaturo telesa mora označevati en sam podatek in temperatura v toku daleč od telesa se ne sme spreminjati. Prav tako ne sme biti drugih izvirov toplote in sevanje mora biti zanemarljivo.
- Henry Cavendish ni ugotovil gravitacijske konstante. Leta 1798 je s torzijsko tehtnico izmeril gravitacijo med laboratorijskima telesoma in z dobljenim podatkom izračunal gostoto Zemlje [16]. Gravitacijsko konstanto so vpeljali pozneje. Iz dobljenih podatkov bi lahko izračunal gravitacijsko konstanto in maso Zemlje. Učbeniki pogosto zagotovijo, da je „izmeril gravitacijsko konstanto“ ali „stehtal Zemljo“. V tem se kaže razlika med „zgodovinarjevo zgodovino fizike“ in „fizikovo zgodovino“, v kateri pogosto nekdanje dosežke presojamo z današnjim znanjem. V naštetih in podobnih primerih ne kaže ponarejati razvoja. Zadostuje pripomba, da bi to in ono lahko naredili, pa niso.

Poimenovanje zakonov

Neustrezno poimenovanje zakonov, izrekov, enačb, konstant ni omejeno na učbenike in je povezano z vprašanjem prvenstva. V tej zvezi strezni *ničti izrek iz zgodovine naravoslovja* zgodovinarja naravoslovja Ernsta Petra Fischerja iz leta 2006: „Odkritja (pravila, zakona, spoznanja), ki nosi ime po kaki osebi, ni naredila ta oseba.“ Fizik Michael Berry je šel še dlje: „Nikoli ni nič odkrito prvič.“ Fischerjev izrek velja tudi zase. Že leta 1980 ga je navedel statistik Stephen Stigler kot *zakon o eponimih*: „Nobenega znanstvenega odkritja ne imenujemo po pravem odkritelju.“ [4] Do podobnega spoznanja so prišli večkrat že prej. Izjave te vrste nakazujejo težave, na katere lahko naletimo, ko bi radi odkritje poimenovali po eni sami osebi.

Nekatere zakone so odkrivali postopno. Nekdaj je bilo obveščanje težavno in je odkritje večkrat zašlo v pozabo, da so ga pozneje ponovno naredili. Značilen zgled je lomni zakon za svetlobo. Ibn Sahl ga je poznal že konec 10. stoletja, dolgo pred Snelom in drugimi na začetku 17. stoletja [17], [18]. Omeniti kaže še neodvisna odkritja. Na misel pridejo s konca 19. stoletja odkritja katodnih žarkov, rentgenske svetlobe in elektrona, pri katerih je sodelovalo več raziskovalcev. C. F. Bohren, sicer oster kritik učbeniških napak, je zapisal: „Če smo pošteni, je pogosto zelo težko ugotoviti, kdo je kaj naredil prvi, in zato navadno napačno pripišemo zakone, konstante, izreke in merjenja [...] Komu pripišejo zasluge, je v veliki meri odvisno od sreče, časovnega poteka, popularnosti in državne pripadnosti.“ [19] Pomembno je tudi, kako je svoje odkritje cenil in objavil odkritelj.

- Isaac Newton leta 1687 ni odkril *drugega Newtonovega zakona* [20]. Njegov zakon bi se glasil $\vec{F} \propto \Delta\vec{G}$, če bi ga zapisali z današnjimi znaki. Enačbo $\vec{F} = m\vec{a}$ je izpeljal Leonhard Euler leta 1752 v članku z naslovom *Odkritje novega načela mehanike.*

- James Clerk Maxwell ni odkril *Maxwellovih enačb.* Najbrž jih v današnji obliki ne bi prepoznal [19]. V tej obliki jih je zapisal Oliver Heaviside. Avogadrove konstante ni uvedel Amedeo Avogadro, Boltzmannove ne Ludwig Boltzmann, Diracovega delta ne Paul Dirac...

- Hubblovega zakona o širjenju vesolja ni odkril Edwin Hubble. Leta 1922 je Vesto Slipher izmeril relativni rdeči premik galaksij. Leta 1926 je Hubble po siju ugotovil oddaljenosti oddaljenih galaksij. Leta 1927 je Georges Lemaitre v Analih bruseljske naravoslovne družbe objavil članek *Homogeno vesolje s konstantno maso in naraščajočim polmerom pojasni radialno hitrost zunajgalaktičnih meglenic.* Navedel je rešitve enačb splošne teorije relativnosti, ki jih je Aleksander Friedmann objavil že leta 1922. Drugače od Friedmanna, ki ni upošteval astronomskih podatkov, je Lemaitre po Slipherjevih in Hubblovih podatkih hitrosti oddaljevanja povezal z oddaljenostjo: $v = Hd$. Ugotovil je, da se vesolje širi in za koeficient sorazmernosti, današnjo Hubblovo konstanto H, navedel 575 ali 670 km/(s·Mpc) glede na to, kako je razvrstil podatke. Leta 1929 je tudi Hubble spoznal sorazmernost in za H navedel 500 km/(s·Mpc) (današnja vrednost je (74,3 $\pm$ 2,1) km/(s·Mpc)). Uporabil je domala iste podatke kot Lemaitre, le po-

[4] Eponim je oseba, po kateri kaj imenujemo.

datke za oddaljenost galaksij je izboljšal z merjenji, ki sta jih on in Milton Humason naredila s kefeidami in novimi zvezdami. Širjenja vesolja ni omenil in ga menda tudi pozneje ni zagovarjal [21].

Angleški prevod Lemaitrovega dela je izšel leta 1931 v Mesečnih objavah Kraljeve astronomske družbe. V njem so manjkali odstavek o sorazmernosti, podatki o koeficientih in nekaj opomb. Nekateri so v tem videli zaroto. M. Livio pa je po pismih ugotovil, da je članek prevedel in spustil odstavke Lemaitre sam [22]. Ni mu šlo za prvenstvo in je skromno menil, da so Hubblovi podatki boljši.

Raziskovanje in poučevanje

Napakam v raziskovanju se godi drugače kot napakam v učbenikih: „Sprememba v raziskovanju je hitra, lahko jo je sporočiti in jo na široko upoštevajo. Sprememba v poučevanju pa rabi veliko časa, mogoče jo je slabo sporočiti in ji na splošno nasprotujejo razni posebni interesi v skupnosti poučevalcev fizike.“ [23] V raziskovanju se dokopljejo do novih spoznanj, medtem ko se zdi, da se poučevanje pogosto vrti v krogu: „Kaj dovoljuje, da gradimo znanje fizike tako, da se nabira, medtem ko se v poučevanju fizike zdi, da smo prekleti na večne kroge, [...] Zakaj nikoli ne moremo naslednjemu rodu izročiti, kar smo se naučili v poučevanju fizike.“ [24]

V tej zvezi razločujejo „kulturo raziskovanja“ in „kulturo poučevanja“ [7]. Za prvo naj bi bilo značilno širjenje novega znanja, iskanje osebnega uspeha in razvito ocenjevanje del, za drugo pa širjenje starega znanja, iskanje uspeha drugih in nerazvito ocenjevanje del. Razloček je zares opazen. Pri tem pa ni mogoče spregledati, da je fizika del naravoslovja, v katerem uporabljamo naravoslovni raziskovalni način. Trditev preizkusimo z opazovanjem in merjenjem in neustrezno zavržemo ali prilagodimo. Tako pridemo do enotnega ali vsaj do jasnega večinskega mnenja. Poučevanje pa zajema sestavine znanosti o ljudeh in družbi, v katerih ne uporabljajo naravoslovnega raziskovalnega načina. Pogosto obstaja več različnih mnenj, ki utegnejo biti odvisna od okolja in se spreminjati s časom. Tako ni mogoče pričakovati, da bi poučevanje fizike oblikovali povsem po kopitu raziskovanja. Pretirana težnja v tej smeri bi poučevanju utegnila škodovati.

Zagotovo je treba biti pozoren na napake, posebno v učbenikih. Na drugi strani ne gre spregledati, da mora pisec učbenika obvladati široko, čeprav morda ne globoko, znanje, ki mu čas ostre specializacije ni naklonjen. Zdi se, da so lahko zaradi napak v srednješolskih učbenikih fizike zaskrbljeni predvsem v Združenih državah. Pri nas osnovnošolski in srednješolski učbeniki ne zbujajo tolikšne skrbi, ker jih pišejo fiziki ali pri pisanju sodelujejo.[5] S tega stališča si je smiselno prizadevati, da bi se študij bodočih učiteljev fizike čim manj oddaljil od študija bodočih fizikov.

Na koncu se je smiselno vprašati, ali morebiti spodbuja nastanek napak to, da je na dani stopnji treba upoštevati zmožnost učencev ali dijakov. Tem pogosto zmanjka matematičnega ali fizikalnega znanja. Pri tem se je treba zadovoljiti z mislijo, da učbenik lahko vsebuje „resnico in samo resnico“, a ne more vsebovati „vse resnice“. Navsezadnje tudi fizika še nima odgovorov na vsa vprašanja.

LITERATURA[6]

[1] J. Strnad, *Fizika*, 1. del, DMFA–založništvo, Ljubljana 2011.

[2] S. Knez in R. Podgornik, *Modeli dinamičnega vzgona letalskih kril*, Obzornik mat. fiz. **52** (2005) 162–182, **53** (2006) 1–17.

[3] H. Babinsky, *How do wings work?*, Phys. Educ. **38** (2003) 497–503.

[4] M. V. Berry, *The molecular mechanism of surface tension*, Phys. Educ. **6** (1971) 70–84.

[5] A. Marchand, J. H. Weijs, J. H. Snoeijer in B. Andreotti, *Why is surface tension a force parallel to the interface*, Am. J. Phys. **79** (2011) 998–1008.

[6] G. Planinšič, Ch. Ucke in L. Viennot, *Holes in a bottle filled with water: which water-jet has the longest range?* http://education.epsdimensions.org/muse/.

[7] J. Slisko, *Repeated errors in physics textbook: what do they say about the culture of teaching?*, *Physics Community and Cooperation*, GIREP 2009, University of Leicester.

[8] I. Kuščer in S. Žumer, *Termodinamika*, DMFA, Ljubjana 1974, str. 33.

[9] D. Styer, *Entropy and rust*, Am. J. Phys. **78** (2010) 1077.

[10] H. S. Leff, *Removing the mystery of entropy and thermodynamics – part V*, Phys. Teacher **50** (2012) 274–276.

[5] Pred desetletji je bilo mogoče v učbeniku za nižjo gimnazijo zaslediti dvoumnost v zvezi s centrifugalno silo.

[6] Po navedenem izboru je mogoče priti do obsežne literature o napakah.

[11] F. L. Lambert, *The misinterpretation of entropy as „disorder“*, J. Chem. Educ. **89** (2012) 310.

[12] H. W. F. Sung in C. Rudowicz, *Physics behind the hysteresis loop – a survey of mis-conceptions in magnetism literature*, J. Magn. Magn. Mater. **260** (2003) 250–260.

[13] Lev B. Okun, *The concept of mass*, Phys. Today **42** (1989) 31–36 (6).

[14] A. Wroblewski, *De mora luminis: A spectacle in two acts with a prologue and an epilogue*, Am. J. Phys. **53** (1985) 620.

[15] C. T. O'Sullivan, *Newton's law of cooling – A critical assesment*, Am. J. Phys. **58** (1990) 957–960; C. F. Bohren, *Comment on „Newton's law of cooling“*, Am. J. Phys. 59 (1991) 1044–1045.

[16] J. Slisko in Z. Hadzibegovic, *Cavendish experiment in physics textbooks. Why do authors continue to repeat a denounced error?*, Eur. J. Phys. Ed. **2** (2011) 20–32.

[17] R. Rashed, *A pioneer in anaclastics. Ibn Sahl on burning mirrors and lenses*, Isis **81** (1990) 464.

[18] J. Strnad, *Deseterica do lomnega zakona*, Fizika v šoli **11** (2003) 9.

[19] C. F. Bohren, *Physics textbooks writing: Medieval, monasteric mimicry*, Am. J. Phys. **77** (2009) 101–103.

[20] B. Pourciau, *Is Newton's second law really Newton's?*, Am. J. Phys. **70** (2011) 1015–1022.

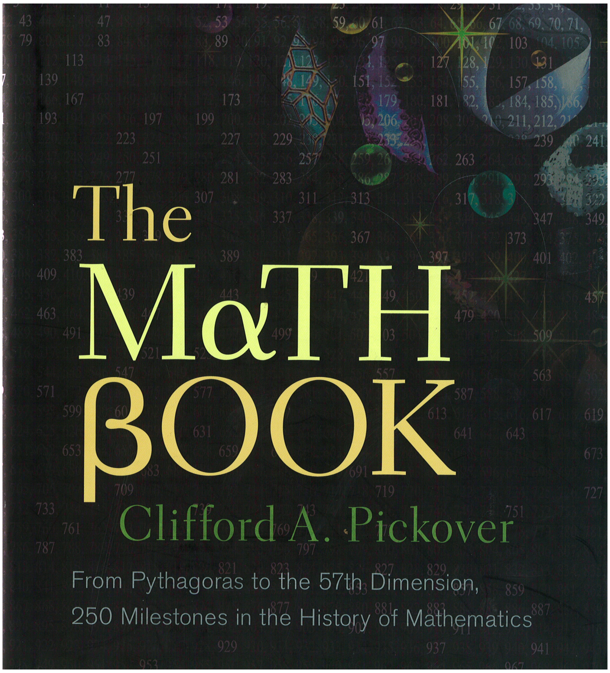
[21] M. Way in H. Nussbaumer, *Lemaitre's Hubble relationship*, Phys. Today **564** (2011) 8 (8).

[22] M. Livio, *Mystery of the missing text solved*, Nature **479** (2011) 121–123.

[23] J. M. Wilson, *Changing the introductory physics sequence to prepare the physics student of the 1990s*, *Proc. Conf. on Computers in Physics Instruction*, North Carolina, J. Risley (ur.), Addison-Wesley, Reading, Mass. 1988.

[24] E. F. Redish, *Millikan lecture 1998: Building a science of teaching physics*, Am. J. Phys. **67** (1999) 562–573.

C. A. Pickover, *The Math Book*, Sterling Publishing Co., Inc., New York, 2009, 528 strani.



Matematika je kot ogromen labirint, neznana dežela velikih čudes, v katerem se človek zlahka izgubi. Marsikdo za vedno obtiči v kakšnem slepem rokavu in noče videti širše slike. Za uspešno gibanje po tem labirintu pa potrebujemo dobrega vodnika, ki nas bo, podobno kot vodnik po umetnostni galeriji ali ogromni knjižnici, opozoril na najpomembnejše stvari, ob katerih se je vredno ustaviti in jih podrobneje spoznati.

Knjiga *The Math Book* je tak dober vodnik. Njen pisec, avtor več kot štiridesetih knjig, doktor molekularne biofizike in biokemije ter lastnik več kot 40 patentov v ZDA, v bogato ilustrirani in s fotografijami opremljeni knjigi zgoščeno in privlačno predstavlja 250 mejnikov v zgodovini matematike. Kot sam pravi, je bil njegov namen napisati knjigo, ki bo bralca hitro vpeljala v najzanimivejše matematične probleme, ne da bi se mu bilo treba mukoma prebijati skozi goščavo tehničnih podrobnosti. Delo je treba brati počasi ter v majhnih dnevnih količinah, nekako tako, kot se v slaščičarni ne gre zastrupiti z vsemi slaščicami naenkrat. Ko se seznanimo s problemom, predstavljenim v nekaj vrsticah, je najbolje, da knjigo odložimo in sami malce (a previdno!) zagrizemo v trde matematične orehe varljivo preprostega videza. Ob tem si razvijamo domišljijo, pogum in sposobnosti za soočanje s težjimi problemi, kot smo jih vajeni reševati iz standardnih učbenikov. Da ne gre za še eno poljudno knjigo, ki vzgaja k površnosti in plitkemu branju, poskrbi bogat seznam referenc s kratkimi povzetki del, ki zainteresiranemu bralcu olajša nadaljnje poglabljanje v tiste probleme, ki ga najbolj pritegnejo.

Knjiga tudi lepo prikazuje tesno prepletanje matematike in življenja, omenja nenavadne značajske poteze genialnih matematikov in oriše razmere, v katerih so živeli in ustvarjali. Marsikatero slavno ime, poznano študentom matematike zgolj po eni sami formuli, hipotezi ali izreku, tu oživi pred nami kot živ lik s svojo srečno ali tragično življenjsko zgodbo, kar daje knjigi dodatno humanistično, zgodovinsko in kulturno razsežnost, ob kateri se lahko marsikaj naučimo. Spoznamo nekatere osebnosti, ki so odločilno pripomogle k popularizaciji matematike (npr. Gardner), pa najbolj ustvarjalne avtorje (npr. Euler), pa tiste, ki so se zbirali v skrivne bratovščine in skupine (Bourbaki), pa takšne, ki so znali najbolje sodelovati z drugimi (Erdös), pa vizionarje, ki so prehiteli svoj čas za več stoletij (Grothendieck), pa takšne, ki so opozarjali na potrebo po strogosti in eksaktnih definicijah (npr. Cauchy). Naletimo tudi na matematike, ki so odkrili kaj pomembnega, kljub temu da so v nekaterih njihovih prejšnjih člankih našli napake in so jih drugi zato imeli za nekredibilne. Najdemo tudi takšne, ki so odklonili visoke nagrade za rešitev pomembnega problema. Ob vsem tem postopoma spoznamo, da lahko k napredku matematike pripomorejo ljudje najrazličnejših značajskih lastnosti in sposobnosti.

Knjiga pa daje misliti tudi v zvezi z najrazličnejšimi predsodki, ki so zavirali ali še vedno zavirajo razvoj matematike. Eden od njih je na primer, da so ustvarjalni le mladi matematiki. Drug tak predsodek oziroma odpor je bil v zgodovini uperjen proti genialnim ženskam v matematiki. Preganjali in izločali so tudi Jude. Še en predsodek, ki se počasi razblinja, je, da dokazi izrekov, pridobljenih s pomočjo računalnikov (npr. Appel-Hakenov dokaz izreka 4 barv), niso vredni toliko kot tisti, dobljeni brez njih. Danes, ko računalnike uporabljajo že tudi za oblikovanje in testiranje hipotez, so takšni predsodki samo še ovira razvoju, ki pa gre nezadržno svojo pot. Ob branju knjige začenjamo razumeti, da se matematika, pa naj nam je to všeč ali ne (delno tudi zaradi Gödlovih, Turingovih in Chaitinovih spoznanj, iz katerih sledi, da bo tisto, kar lahko spoznamo z deduktivno metodo, vedno le majhno otočje v oceanu neznanega), počasi spreminja iz deduktivne, aksiomatsko zasnovane znanosti v induktivno, eksperimentalno znanost, utemeljeno na oblikovanju in verificiranju hipotez s pomočjo računalnikov! Kjer ni mogoče dobiti eksaktnih rezultatov ali formul, se moramo zadovoljiti z aproksimacijami in konkretnimi številkami; kjer niso možne natančne napovedi prihodnjih stanj sistema, se moramo zadovoljiti z verjetnostnimi in statističnimi ugotovitvami. Svet (in to velja tudi za matematiko), je mnogo bolj zapleten, kot smo verjeli še pred 100 leti. Zdaj že spoznavamo, da se neskončnosti matematike ne da ujeti v nobeno končno aksiomatsko mrežo.

Ob branju knjige se nam počasi izoblikuje tudi vse jasnejša predstava o tem, kakšne lastnosti imajo tista odkritja v matematiki, ki jim upravičeno lahko rečemo *mejniki*. Gre npr. za izrek, iz katerega sledi cela kopica drugih izrekov. Če se kdo domisli takega temeljnega izreka (oziroma ustrezne hipoteze), je to zelo pomembno za nadaljnji razvoj matematike. Spomnimo se samo, kako velik napredek se je začel v matematiki, ko je Descartes povezal geometrijo in algebro, ki sta bili pred njim ločeni disciplini. V današnji dobi specializacije v matematiki postajajo potrebe po povezujočih izrekih, metodah, formulah, teorijah, konceptih itd. še toliko pomembnejše. Nekdo, ki obvlada veliko orodij iz različnih matematičnih vej, ima večje možnosti, da odkrije kaj pomembnega ali da reši kak težji problem, ali da spodbudi povsem novo smer v matematičnem raziskovanju. Mejnik je tudi nekaj, kar poenostavi prejšnje zapletene postopke, npr. računske. Mejnik je lahko tudi napredek v matematični notaciji ali pa iznajdba v komunikaciji (npr. Erdösevo intenzivno sodelovanje z drugimi pri pisanju člankov, ali izviren način predajanja znanja drugim), izum nove matematične teorije, ali zasnovanje pomembnega matematičnega programa ali nabora pomembnih problemov, ki lahko začrta smer razvoja matematike za nekaj sto let naprej. Mejnik je lahko tudi problem, ki je ostal nerešen dolga stoletja ali celo tisočletja. Mejnik je lahko premik k strogosti od naivne formulacije nekega pojma ali računskega postopka ali teorije. Mejniki so lahko tudi zanimivi geometrijski objekti (krivulje, ploskve, vzorci, poliedri, tlakovanja, konfiguracije, fraktali) ali razni aritmetični vzorci (Pascalov trikotnik, magični kvadrati).

Ta knjiga lahko nekoga, ki je za to pripravljen, navdihne k pisanju podobnih matematičnih del ali zbudi v njem odločenost, da v matematiki odkrije nekaj novega, ali da izkoplje iz pozabe stoletij kaj starega, še vedno zanimivega, ali da začne intenzivneje sodelovati z drugimi matematiki, ali da začne poučevati matematiko na privlačnejši način kot doslej … Možnosti je neskončno. V labirintu matematike je prostora dovolj za vse – tako kot v Hilbertovem neskončnem hotelu.

Jurij Kovič

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 59 (2012)
številke 1–6, strani 1–240

Članki — Articles

Šola — School

Vprašanja in odgovori — Questions and Answers

Nove knjige — New books

http://www.obzornik.si/

Vesti — News

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 2012[1]

V letu 2012 se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 35 novih članov:

2362. Matej Aleksandrov
2363. Maja Alif
2364. Helena Bezgovšek Vodušek
2365. Urška Bobnar
2366. Janez Bonča
2367. Mojca Gavez
2368. Andreja Gomboc
2369. Uroš Hekić
2370. Vesna Iršič
2371. Dominik Jan
2372. Andreja Kardoš
2373. Milan Kardoš
2374. Jure Kop
2375. Igor Košak
2376. Uroš Kovač
2377. Jurij Kovič
2378. Filip Kozarski
2379. Marino Samardžija Marinko
2380. Matjaž Maučec
2381. Gašper Mekiš
2382. Tomaž Mohorič
2383. Anja Petković
2384. Katja Prezelj
2385. Ana Reberc
2386. Nejc Rosenstein
2387. Blanka Savšek
2388. Jaka Špeh
2389. Jan Šuntajs
2390. Jana Vidrih
2391. Maša Vizovišek
2392. Ira Vučko
2393. Nikola Vukovič
2394. Sara Sabrina Zemljič
2395. Marinka Žarn
2396. Mateja Žnidarič

[1] Novi člani DMFA Slovenije za leto 2011 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **58** (2011) 6, stran 231.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, NOVEMBER 2012
Letnik 59, številka 6

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Zarodek Drosophile melanogaster slikan z večsmernim SPIM. Slika celičnih membran (Gap43-mCherry, zarodek v celičnem ciklu št. 14) je odvita, tako da se vidi slika celičnih jeder (H2Av-mCherry, zarodek v celičnem ciklu 12). Avtor slike je Uroš Kržič, EMBL Heidelberg (www.spim.me), več podrobnosti v publikaciji Krzic et al., Nature Methods **9** (2012) 730–733.