

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

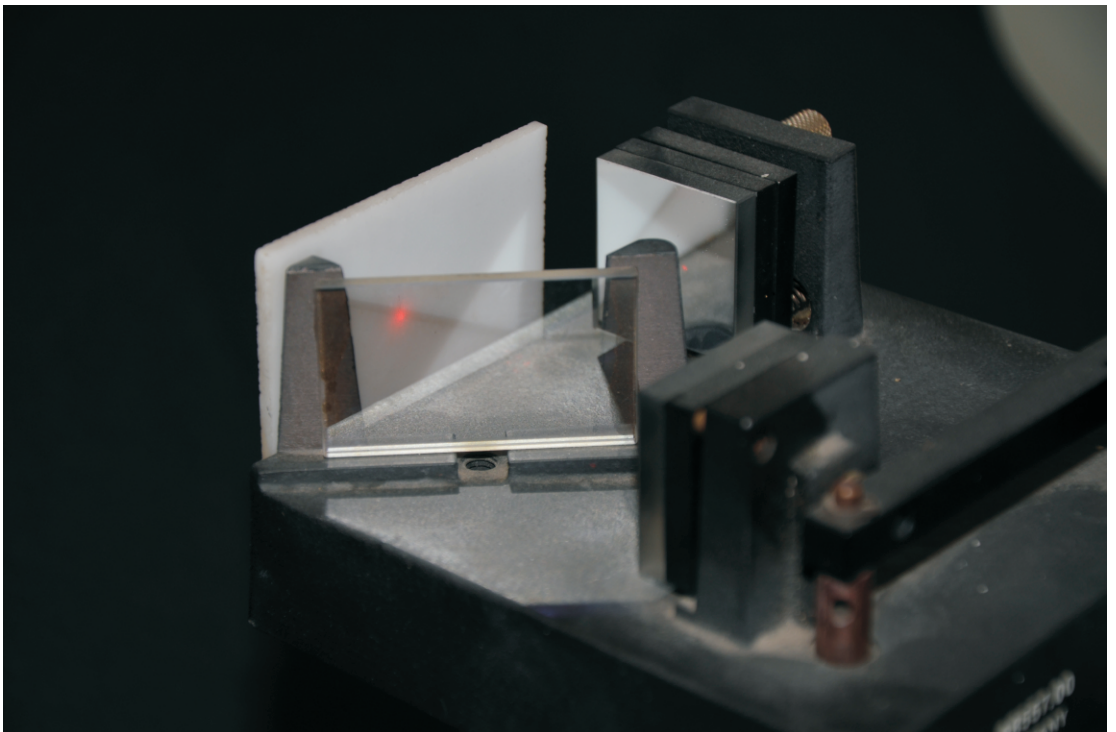
ISSN 0473-7466

2012

Letnik 59

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2012, letnik 59, številka 5, strani 161–200

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešič, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije.

© 2012 DMFA Slovenije – 1886

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov \TeX oziroma \LaTeX , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

NEKA VERIŽNICA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 34A05, 49J05, 49S05, 53A04

V prispevku dokažemo, da obstajajo v polarni obliki zapisane ravninske krivulje, katerih dolžina med polarno osjo in poljubno točko je enaka produktu polarnega kota in polarnega polmera te točke. Zgleda za take krivulje sta krožnica in posebna vrsta prave verižnice.

A CATENARY

In the article it is proved that there exist planar curves whose length between the polar axis and any point is equal to the product of the polar angle and polar radius of this point. Examples of such curves are the circle and a special kind of the catenary.

Uvod

Pozorni bralec v članku [2], ki obravnava tako imenovane *prave verižnice*, med vsemi njenimi primeri opazi krivuljo, ki ima v polarnih koordinatah precej preprosto obliko. Izraža se namreč kar z racionalno funkcijo polarnega kota, medtem ko v preostalih nastopajo transcendentne funkcije. Verižnica, ki jo v prispevku obravnavamo, pa ima še neko posebno lastnost. Njen naravni parameter $s(\varphi)$ je namreč enak produktu polarnega kota φ in polarnega polmera $r(\varphi)$ za vsak φ z nekega intervala $(-\omega, \omega)$. Tako lastnost ima tudi krožnica, če pol polarnega sistema postavimo v njeno središče. Ogledali si bomo, kako poiščemo še druge take krivulje. Nekaj več o pravi verižnici je napisanega v zadnjem delu prispevka, podrobnosti pa najdemo v [2, 5].

Ravninske krivulje pogosto podajamo analitično v polarni obliki. Potem ko smo v ravnini izbrali točko O za pol in polarno os p , to je poltrak s krajiščem v O , je točka na krivulji določena s polarnim kotom φ in polarnim polmerom r , ki je vselej nenegativno število. Polarni polmer je razdalja točke na krivulji od pola, polarni kot pa merimo od polarne osi do polarnega polmera v pozitivni ali negativni smeri. V polarni obliki podana krivulja je določena z nenegativno odsekoma zvezno odvedljivo funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$ na intervalu $[\alpha, \beta]$. Pri tem je seveda $\alpha < \beta$. Ločno dolžino $\sigma[\alpha, \beta]$, ki ustreza spreminjanju kota φ po intervalu $[\alpha, \beta]$, izrazimo (glej npr. [6]) z integralom

$$\sigma[\alpha, \beta] = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)} d\phi.$$

Če vpeljemo za poljuben kot φ nekega intervala, ki vsebuje 0, tako imenovani *naravni parameter*

$$s(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)} d\phi, \quad (1)$$

ki je pozitiven za pozitivne φ , negativen za negativne φ in enak 0 za $\varphi = 0$, potem smo na krivulji definirali naravni koordinatni sistem z izhodiščem v točki T , ki ustreza kotu $\varphi = 0$. Točki P , ki ustreza kotu φ , priredimo na krivulji naravno koordinato $s(\varphi)$. Po loku krivulje je P oddaljena od T za $|s(\varphi)|$. Za pozitivne φ imajo ustrezne točke pozitivno naravno koordinato s , za negativne φ pa negativno.

Nenavadna krivulja

Za krožnico, ki ima središče v polu O , je $r(\varphi) = r_0$, kjer je r_0 pozitivna konstanta, polmer krožnice. Za lok seveda dobimo tedaj po znani formuli $\sigma[\alpha, \beta] = r_0(\beta - \alpha)$ in za naravni parameter $s(\varphi) = r_0\varphi$. Za krožnico torej lahko zapišemo

$$s(\varphi) = \varphi r(\varphi). \quad (2)$$

Ali ima še kakšna krivulja, ki je dana v polarni obliki, lastnost (2)? Pri katerih krivuljah je naravni parameter $s(\varphi)$ enak produktu kota φ in polarnega polmera $r(\varphi)$ za vsak φ z nekega intervala $(-\omega, \omega)$, na katerem je funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ nenegativna in zvezno odvedljiva? Spoznali bomo, da obstaja poleg krožnice še ena taka krivulja, obstaja pa tudi zlepek, ki ima lastnost (2). Če pa vztrajamo le pri zveznosti funkcije $\varphi \mapsto r(\varphi)$ in se odpovemo zveznosti njenega odvoda v končno mnogo točkah, pa je takih krivulj nešteto. Po potrebi v takih primerih v krajših intervalov jemljemo za odvod ustrezni stranski odvod (levi, desni).

Poiščimo tako nenegativno zvezno odvedljivo funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$, za katero velja (2). Veljati mora enakost

$$\varphi r(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)} d\phi$$

na nekem intervalu $(-\omega, \omega)$. Iz te zahteve dobimo diferencialno enačbo

$$r(\varphi) + \varphi r'(\varphi) = \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}. \quad (3)$$

Pridružimo ji še začetni pogoj $r(0) = r_0 > 0$. V poštev pridejo rešitve $r(\varphi)$, za katere je izpolnjen pogoj

$$r(\varphi) + \varphi r'(\varphi) = [\varphi r(\varphi)]' \geq 0.$$

Po kvadriranju in preurejanju členov dobimo iz (3) diferencialno enačbo

$$r'(\varphi)[(1 - \varphi^2)r(\varphi)]' = 0, \quad (4)$$

ki jo bomo reševali pri začetnem pogoju $r(0) = r_0 > 0$. V enačbi sta faktorja funkciji kota φ in njun produkt je lahko nič, čeprav faktorja nista identično enaka nič na intervalu $(-1, 1)$. Enačba pri začetnem pogoju ima zvezno odvedljivi rešitvi

$$r(\varphi) = r_0 \quad \text{in} \quad r(\varphi) = \frac{r_0}{1 - \varphi^2}$$

na intervalu $(-1, 1)$, ki pa nista edini. Zvezno odvedljiva rešitev je na primer tudi funkcija, dana s predpisom

$$r_1(\varphi) = \begin{cases} r_0, & -1 < \varphi < 0, \\ \frac{r_0}{1 - \varphi^2}, & 0 \leq \varphi < 1. \end{cases}$$

Taka rešitev je tudi funkcija $\varphi \mapsto r_1(-\varphi)$. Interval $(-1, 1)$ lahko ali na levo ali na desno stran tudi podaljšamo, če izraz $1/(1 - \varphi^2)$ to dopušča. S tem morda nismo našli vseh rešitev. Kolobar vseh zvezno odvedljivih funkcij na intervalu $(-1, 1)$ ima namreč delitelje nič. To pomeni, da v njem obstajata funkciji f_1 in f_2 , ki nista na $(-1, 1)$ identično enaki 0, pa vendar je na $(-1, 1)$ njun produkt identično enak 0. Celo kolobar poljubno mnogokrat odvedljivih funkcij na vsej realni osi je tak. Funkciji g_1 in g_2 , dani s predpisoma

$$g_1(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi \leq 0, \\ e^{-1/\varphi^2}, & \varphi > 0, \end{cases} \quad \text{in} \quad g_2(\varphi) = \begin{cases} e^{-1/\varphi^2}, & \varphi < 0, \\ 0, & \varphi \geq 0, \end{cases}$$

sta definirani na vsej realni osi, neničelni in imata povsod vse odvode, njun produkt pa je povsod nič.

Rešitev enačbe (4) bi bila potem tudi funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$, ki bi pri začetnem pogoju $r(0) = r_0$ hkrati rešila enačbi

$$r'(\varphi) = f_1(\varphi) \quad \text{in} \quad [(1 - \varphi^2)r(\varphi)]' = (1 - \varphi^2)r'(\varphi) - 2\varphi r(\varphi) = f_2(\varphi),$$

pri čemer sta f_1 in f_2 poljubni zvezni funkciji, ki nista na intervalu $(-1, 1)$ identično enaki 0, toda njun produkt je tam identično enak 0. Z integracijo sicer takoj izračunamo:

$$r(\varphi) = r_0 + \int_0^\varphi f_1(\phi) d\phi \quad \text{in} \quad r(\varphi) = (1 - \varphi^2)^{-1} \left(r_0 + \int_0^\varphi f_2(\phi) d\phi \right).$$

Ker pa je $r'(0) = f_1(0) = f_2(0)$ in $f_1(0)f_2(0) = 0$, mora veljati $f_1(0) = f_2(0) = 0$, kar je v nasprotju s poljubnostjo funkcij f_1 in f_2 .

Če bi za f_1 in f_2 izbrali vnaprej poljubni prej opisani funkciji, za kateri sicer velja $f_1(0) = f_2(0) = 0$, bi ugotovili, da obstaja tak interval \mathcal{J} , ki leži ali na intervalu $(-1, 0)$ ali na intervalu $(0, 1)$, tako da je na \mathcal{J} ena od funkcij f_1 in f_2 različna od nič, ena pa identično enaka nič. Reševanje nas spet pripelje v nasprotje s poljubnostjo funkcij f_1 in f_2 .

Da bi se izognili nadaljnjim zapletom, bomo zvezno odvedljive rešitve enačbe (4) iskali med funkcijami, ki so analitične v točki 0, ker nas rešitve naloge zaradi začetnega pogoja $r(0) = r_0$ zanimajo ravno v okolici te točke.

Po [1, 3] je realna ali kompleksna funkcija $\varphi \mapsto f(\varphi)$ (realno) analitična v točki φ_0 , če je definirana na odprtem intervalu, ki vsebuje točko φ_0 , in če jo lahko na intervalu $(\varphi_0 - \omega, \varphi_0 + \omega)$ za neki $\omega > 0$ zapišemo kot konvergentno potenčno vrsto

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\varphi - \varphi_0)^n.$$

Taka funkcija ima na intervalu $(\varphi_0 - \omega, \varphi_0 + \omega)$ odvode poljubnega reda, ki so tudi analitične funkcije, in za koeficiente a_n , ki so realna ali kompleksna števila, velja formula:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\varphi_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pravimo, da je funkcija $\varphi \mapsto f(\varphi)$ analitična na odprtem intervalu \mathcal{I} , če je analitična v vsaki točki φ_0 tega intervala. Temu dodajmo še pomembno lastnost. Če je funkcija $\varphi \mapsto f(\varphi)$ analitična v točki φ_0 , potem je analitična tudi na nekem dovolj majhnem odprtem intervalu, ki vsebuje φ_0 . Analitična funkcija, ki ima vse koeficiente a_n enake 0, je ničelna funkcija. Identično je enaka 0 na poljubnem odprtem intervalu, ki vsebuje φ_0 .

Vse funkcije, ki so analitične na odprtem intervalu \mathcal{I} , sestavljajo komutativen kolobar, ki nima deliteljev nič, kar je dokazano na primer v [1]. Tak kolobar imenujemo celi kolobar ali integritetno polje. To pomeni, da je produkt dveh funkcij tega kolobarja ničelna funkcija samo takrat, ko je vsaj ena od teh funkcij ničelna funkcija.

Če v točki 0 analitična funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ reši naš problem iskanja krivulje z lastnostjo (2), potem sta oba faktorja v enačbi (4) očitno tudi analitični funkciji v točki 0 in enačba razpade na dve:

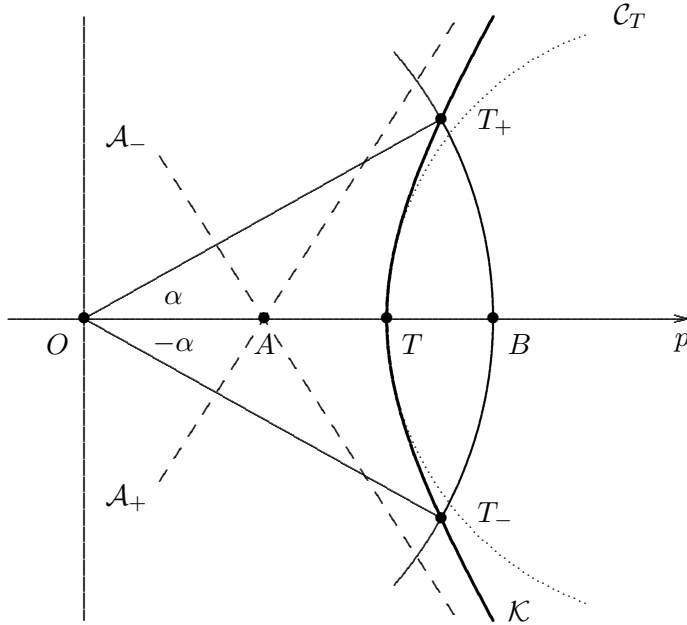
$$r'(\varphi) = 0 \quad \text{in} \quad [(1 - \varphi^2)r(\varphi)]' = 0.$$

Njuni v točki 0 analitični rešitvi, ki zadoščata začetnemu pogoju $r(0) = r_0$, sta

$$r(\varphi) = r_0 \quad \text{in} \quad r(\varphi) = \frac{r_0}{1 - \varphi^2} = r_0(1 + \varphi^2 + \varphi^4 + \dots), \quad -1 < \varphi < 1. \quad (5)$$

Prva rešitev, $r(\varphi) = r_0$, predstavlja krožni lok s središčem v polu, kar smo pričakovali, druga rešitev, $r(\varphi) = r_0/(1 - \varphi^2)$, pa da bolj zapleteno krivuljo \mathcal{K} , ki ima asimptoto z naklonskim kotom ± 1 glede na polarno os (slika 1).

Neka verižnica



Slika 1. Prava simetrična verižnica.

Krivulja \mathcal{K} (slika 1), ki ima v polarnih koordinatah drugo enačbo v (5), je lep zgled, pri katerem se nam posreči izračunati ločno dolžino neposredno z uporabo formule (1). Dobimo namreč

$$\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} = r_0 \frac{1 + \varphi^2}{(1 - \varphi^2)^2} = r_0 \left(\frac{\varphi}{1 - \varphi^2} \right)'$$

Zato je za (5):

$$\sigma[\alpha, \beta] = r_0 \left(\frac{\beta}{1 - \beta^2} - \frac{\alpha}{1 - \alpha^2} \right), \quad -1 < \alpha \leq \beta < 1.$$

V posebnem primeru je

$$\sigma[-\alpha, \alpha] = \frac{2r_0\alpha}{1 - \alpha^2} = 2r(\alpha)\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

kar pomeni, da je ločna dolžina na krivulji \mathcal{K} med točkama T_- in T_+ enaka dolžini najkrajšega krožnega loka polmera $r(\alpha)$ s središčem v polu O med tema dvema točkama.

Polu O je na krivulji \mathcal{K} najbližja točka T , ki ima polarni polmer r_0 . Ploščino $S(\alpha)$ izseka, ki je omejen s poltrakovima $\varphi = -\alpha$, $\varphi = \alpha$ in

krivuljo \mathcal{K} , izračunamo s splošno formulo

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Če upoštevamo sodost funkcije pod integralnim znakom, dobimo najprej

$$S(\alpha) = r_0^2 \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{(1 - \varphi^2)^2},$$

nato pa z razvojem na delne ulomke in integracijo še

$$S(\alpha) = r_0^2 \left[\frac{\varphi}{2(1 - \varphi^2)} - \frac{1}{4} \ln \frac{1 - \varphi}{1 + \varphi} \right] \Big|_0^{\alpha}.$$

Rezultat še nekoliko preoblikujemo in nazadnje dobimo:

$$S(\alpha) = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} - \ln \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right), \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Ukrivljenost $\kappa(\varphi)$ polarno podane krivulje je v točki, ki ustreza polarnemu kotu φ , dana s splošnim izrazom (podrobnosti so npr. v [6], stran 448)

$$\kappa(\varphi) = \frac{r(\varphi)r''(\varphi) - r^2(\varphi) - 2r'^2(\varphi)}{\sqrt{(r^2(\varphi) + r'^2(\varphi))^3}}.$$

Po daljšem računu dobimo za obravnavano krivuljo \mathcal{K} razmeroma preprost izraz

$$\kappa(\varphi) = \frac{(1 - \varphi^2)^3}{r_0(1 + \varphi^2)^2},$$

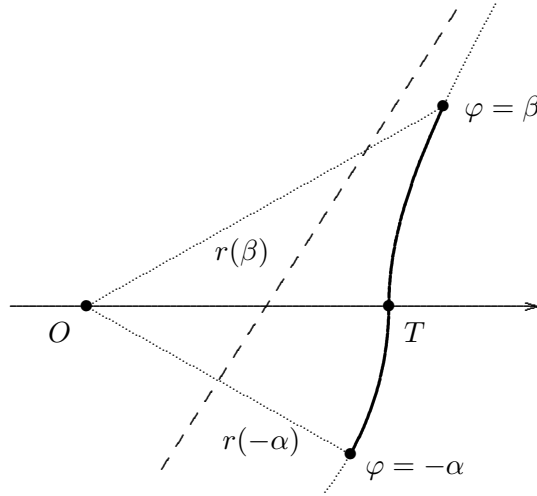
za krivinski polmer v temenu T pa $\varrho(0) = 1/\kappa(0) = r_0$. Pritisnjena krožnica \mathcal{C}_T na \mathcal{K} v temenu T ima torej polmer r_0 . Krivulja \mathcal{K} ima asimptoti \mathcal{A}_{\pm} , ki sekata polarno os pod kotoma ± 1 v točki A s polarnim polmerom $r_0/(2 \sin 1)$.

Iz rešitev $r(\varphi) = r_0$ in $r(\varphi) = r_0/(1 - \varphi^2)$, $-1 < \varphi < 1$, diferencialne enačbe (3) lahko sestavimo zvezno odvedljive funkcije, ki ustrezajo lastnosti (2), pa tudi samo odsekoma zvezno odvedljive funkcije. Poglejmo zgleda!

Zgled 1. Vzemimo najprej funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$, ki je za $-\alpha < 0 < \beta < 1$, kjer je $0 < \alpha < 2\pi - \beta$, dana s predpisom:

$$r(\varphi) = \begin{cases} r_0, & -\alpha \leq \varphi < 0, \\ \frac{r_0}{1 - \varphi^2}, & 0 \leq \varphi \leq \beta. \end{cases}$$

Neka verižnica



Slika 2. Krožni lok se gladko nadaljuje v lok prave verižnice.

Ustrezna krivulja je sestavljena iz krožnega loka polmera r_0 med kotoma $-\alpha$ in 0 ter loka krivulje \mathcal{K} med kotoma 0 in β (slika 2). Funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ je zvezna na intervalu $[-\alpha, \beta]$ in njen naravni parameter je za $-\alpha \leq \varphi \leq 0$ enak

$$s(\varphi) = r_0\varphi$$

in za $0 \leq \varphi \leq \beta$ enak

$$s(\varphi) = \frac{r_0\varphi}{1 - \varphi^2}.$$

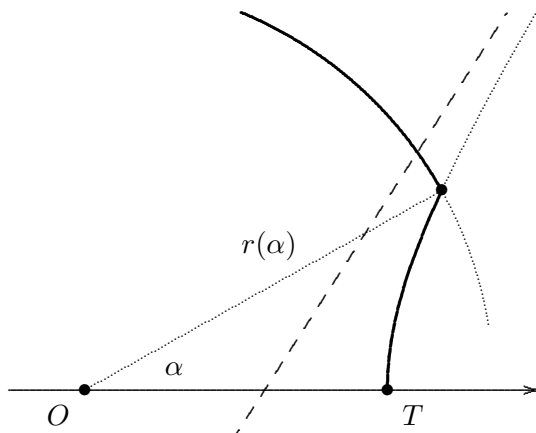
Zato lahko zapišemo:

$$s(\varphi) = \begin{cases} r_0\varphi, & -\alpha \leq \varphi \leq 0, \\ \frac{r_0\varphi}{1 - \varphi^2}, & 0 \leq \varphi \leq \beta. \end{cases}$$

Funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ očitno ustreza tudi lastnosti (2).

Zgled 2. Omejimo se na $\varphi \geq 0$. Vzemimo še funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$, ki je za $0 < \alpha < 1$ dana s predpisom:

$$r(\varphi) = \begin{cases} \frac{r_0}{1 - \varphi^2}, & 0 \leq \varphi \leq \alpha, \\ \frac{r_0}{1 - \alpha^2}, & \alpha \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$



Slika 3. Lok prave verižnice se nadaljuje v krožni lok.

Ustrezna krivulja je sestavljena iz loka krivulje \mathcal{K} , ki se nadaljuje s krožnim lokom (slika 3). Funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ je zvezna na intervalu $[0, 2\pi)$ in njen naravni parameter je za $0 \leq \varphi \leq \alpha$ enak

$$s(\varphi) = \frac{r_0\varphi}{1 - \varphi^2}$$

in za $\alpha \leq \varphi$ enak

$$s(\varphi) = \frac{r_0\alpha}{1 - \alpha^2} + \frac{r_0(\varphi - \alpha)}{1 - \alpha^2}.$$

Zato lahko zapišemo:

$$s(\varphi) = \begin{cases} \frac{r_0\varphi}{1 - \varphi^2}, & 0 \leq \varphi \leq \alpha, \\ \frac{r_0\varphi}{1 - \alpha^2}, & \alpha \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Funkcija $\varphi \mapsto r(\varphi)$ ustreza lastnosti (2).

Po opisanem vzorcu lahko sestavimo tudi zglede v več točkah neodvedljivih, sicer zveznih funkcij, ki ustrezajo lastnosti (2).

Prava verižnica

Krivulja \mathcal{K} , ki ima v polarnih koordinatah enačbo $r(\varphi) = r_0/(1 - \varphi^2)$ (slika 1), je poseben primer prave verižnice, o čemer se sedaj lahko hitro prepričamo. Na splošno, obliko prave verižnice v gravitacijskem polju, ki ga

ustvarja točkasta masa v točki O , zavzame v stacionarnem stanju idealna veriga (homogena, neraztegljiva, gibka, tanka), obešena v dveh točkah. Krivulja \mathcal{K} , kot bomo videli, je poseben primer, pri katerem sta to točki T_- in T_+ , ki sta od O oddaljeni za r_1 , daljici OT_- in OT_+ oklepata kot 2α , dolžina verige pa je enaka $2r_1\alpha$, kar je enako dolžini krožnega loka polmera r_1 pri središčnem kotu $2\alpha < 2$ (slika 1). Do konstantnega faktorja je potencialna energija verige

$$\mathcal{F}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{r} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi \quad (6)$$

pri pogojih

$$\mathcal{P}[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = 2r_1\alpha, \quad r(\pm\alpha) = r_1. \quad (7)$$

V stacionarnem stanju je tedaj integral (6) minimalen. V izrazih (6) in (7) nastopajočo funkcijo $\varphi \mapsto r(\varphi)$ poiščemo z metodami variacijskega računa (glej npr. [4, 7, 8]). Kot je pokazano v [5], rešitev ustreza diferencialni enačbi

$$r(\varphi)(\lambda r(\varphi) - 1) = c\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}, \quad (8)$$

kjer sta c in λ konstanti. Sedaj je treba pogledati, kdaj $r(\varphi) = r_0/(1 - \varphi^2)$ zadošča enačbi (8) za vsak kot φ na intervalu $(-\alpha, \alpha)$ pri pogoju (7). Iz prve zahteve dobimo enačbo

$$\lambda r_0 - (1 - \varphi^2) = c(1 + \varphi^2),$$

iz katere sledi $c = 1$ in $\lambda = 2/r_0$. Dolžina iskane krivulje je $2r_0\alpha/(1 - \alpha^2) = 2r_1\alpha$, iz česar dobimo $r_0 = (1 - \alpha^2)r_1$. Tako imamo nazadnje enačbo posebne prave verižnice: $r = r_1(1 - \alpha^2)/(1 - \varphi^2)$.

LITERATURA

- [1] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Pariz, 1975.
- [2] J. Denzler, A. M. Hinz, *Catenaria Vera – The True Catenary*, Expo. Math. **17** (1999), 117–142.
- [3] S. G. Krantz, H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser Verlag, Basel in drugje, 1992.
- [4] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana, 1974.
- [5] M. Razpet, *Prava simetrična verižnica*, Obzornik mat. fiz. **57** (2010), št. 4, 121–133.
- [6] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1994.
- [7] I. Vidav, *Višja matematika III*, DZS, Ljubljana, 1976.
- [8] E. Zakrajšek, *Analiza III*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2002.

ATOMSKI INTERFEROMETER

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

PACS: 32.80.Pj, 07.60.Ly

Atomski interferometri uporabljajo valovanje, ki ga priredimo delcem, kot starejši interferometri uporabljajo svetlobo. Članek opiše pojave, na katerih so osnovani atomski interferometri z gručami hladnih alkalijskih atomov, in natančna merjenja z njimi.

ATOM INTERFEROMETER

Atom interferometers use waves, attributed to particles, as older interferometers use light. In the article phenomena are described on which atom interferometers with clouds of cold alkali atoms are based as well as precise measurements with them.

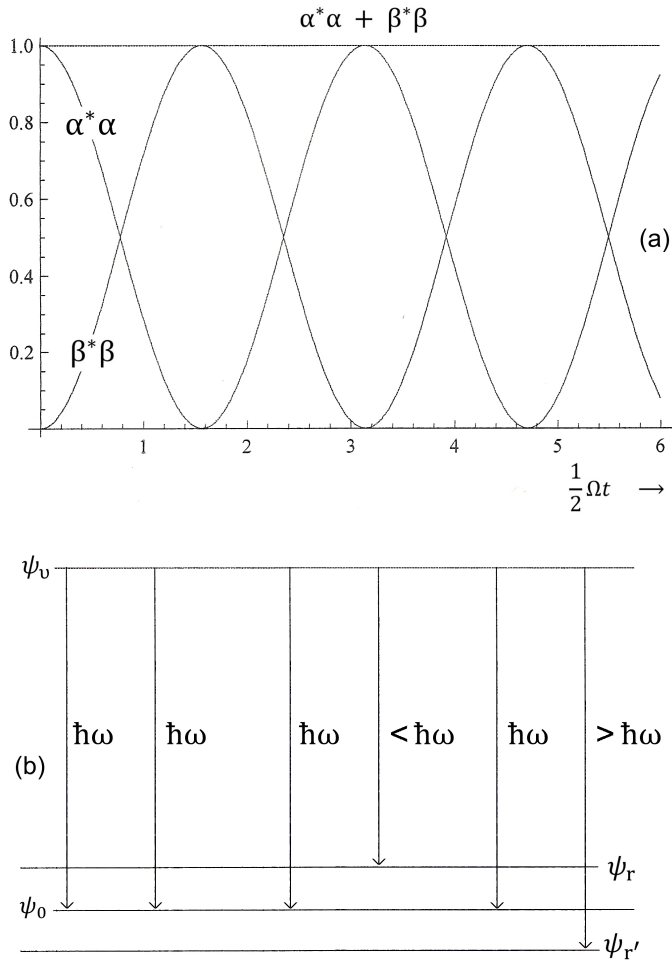
Interferenčni poskusi s curki delcev, pri katerih delci kažejo lastnosti valovanja, zbujaajo pozornost, odkar so pred petinosemdesetimi leti izvedli prvi poskus z elektroni. Odtlej so naredili take poskuse s številnimi delci od nevtronov in atomov do molekul z veliko maso. Valovanje, ki ga opiše kvantnomehantična valovna funkcija, se ukloni na atomih v kristalu, umetnih mrežicah ali stoječem elektromagnetnem valovanju. Že nekaj časa uporabljajo to valovanje v interferometrih.

Interferometri s svetlobo

Interferometri s svetlobo so v rabi veliko dlje. Tak interferometer ima izvir, naprave, ki valovanje razdelijo na delna valovanja in jih vodijo po različnih poteh, ter sprejemnik za zaznavanje interferenčne slike. Kot izvir v zadnjem času navadno uporabimo laser, ki seva enobarvno svetlobo. Valovanje razdelimo na delna valovanja na primer z uklonsko mrežico ali s polprepustno ploščico. Delna valovanja, ki potujejo po različnih poteh, na primer z zrcali ali lečami sestavimo in opazujemo interferenčne proge. Vzemimo, da valovanje razdelimo na dve delni valovanji, od katerih prvo prepotuje razdaljo z_1 in drugo razdaljo z_2 . K jakosti električnega polja v valovanju, v katero se delni valovanji sestavita, v danem trenutku prispevata obe delni valovanji:

$$E = E_0 \exp(ikz_1) + E_0 \exp(ikz_2) = E_0 \exp(ikz_1) (1 + \exp(i\phi)). \quad (1)$$

Atomski interferometer



Slika 1. Rabijsve oscilacije v sistemu z dvema stanjema (a) in prehodi med stanji pri Ramanovem pojavu (b).

Gostota energijskega toka v sestavljenem valovanju je sorazmerna z:

$$E^* E = 2E_0^2(1 + \cos \phi) \quad (2)$$

in kaže značilne interferenčne proge. Pri tem je $k = 2\pi/\lambda$ velikost valovnega vektorja, λ valovna dolžina in $\phi = k(z_2 - z_1) = 2\pi(z_2 - z_1)/\lambda$ fazna razlika.

Rabijevo nihanje

Svetloba sodeluje z atomi. Njihovo stanje opišemo z lastnimi energijami in lastnimi valovnimi funkcijami. Omejimo se na dve stanji, na osnovno stanje z energijo W_0 in valovno funkcijo ψ_0 ter prvo vzbujeno stanje z energijo W_1 in valovno funkcijo ψ_1 . Razliki energij $W_1 - W_0 = \hbar\omega_{01}$ ustrežata krožna frekvenca ω_{01} in frekvenca $\nu_{01} = \omega_{01}/(2\pi)$. Električno polje v valovanju deluje na atom. V *polklasičnem približku* atome obravnavamo kvantno, svetlobo pa klasično.¹ Delovanje jakosti električnega polja \vec{E} na atom zajamemo z energijo električnega dipola $\vec{p} = e\vec{r}$ v polju: $\vec{p} \cdot \vec{E}$. Atom v osnovnem stanju ψ_0 iz valovanja absorbira energijo $\hbar\omega_{01}$ in preide v prvo vzbujeno stanje. Prehod opišemo s sestavljenim stanjem $\alpha(t)\psi_0 + \beta(t)\psi_1$. Verjetnost $\alpha^*\alpha$, da naletimo na atom v osnovnem stanju, najprej s časom pojema, verjetnost $\beta^*\beta$, da naletimo na atom v prvem vzbujenem stanju, pa narašča. Atom v prvem vzbujenem stanju v valovanju stimulirano seva in iz prvega vzbujenega stanja preide v osnovno stanje. Potem atom zopet absorbira, zopet seva, in igra se ponavlja (slika 1a). Verjetnosti se spreminjata periodično:

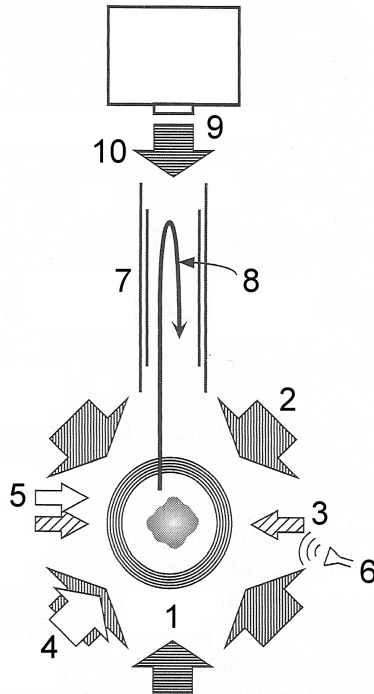
$$\alpha^*\alpha = \cos^2 \frac{1}{2}\Omega t \quad \text{in} \quad \beta^*\beta = \sin^2 \frac{1}{2}\Omega t, \quad \frac{1}{2}\Omega = \vec{p}_{01} \cdot \vec{E}_0/\hbar. \quad (3)$$

To so *Rabijeve oscilacije*.² Pojav spominja na nihanje sklopljenih nihalo, pri katerem najprej niha samo prvo nihalo, nato začne nihati drugo nihalo, prvo pa niha vse šibkeje, in igra se ponavlja. *Rabijeva krožna frekvenca* Ω meri vpliv električnega polja z amplitudo \vec{E}_0 na atom. Pri tem je $\vec{p}_{01} = \int \psi_1^* \vec{p} \psi_0 d^3r$ *matrični element* električnega dipolnega momenta za prehod med stanjema. Z laserskim sunkom, s katerim obsevamo atom, je mogoče vplivati na stanje atoma. Tako na primer lahko dosežemo, da je atom po obsevanju v sestavljenem stanju z $\alpha = \beta$.

¹Tako se izognemo kvantni elektrodinamiki. Pri tem bi se morali odpovedati pojmu fotona. Vendar tudi v polklasičnem približku omenjajo fotone. S tem mislijo le na energijo, ki jo seva ali absorbira atom.

²Isidor Isaac Rabi (1898–1988) je dobil Nobelovo nagrado za fiziko leta 1944 za merjenja s curki atomov.

Atomski interferometer

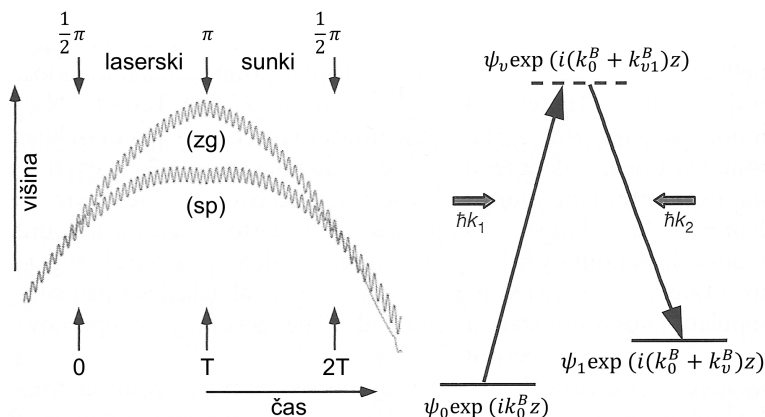


Slika 2. Shematična risba glavnih sestavnih delov interferometra z atomi cezija [3, 4]. 1 tuljavi magneto-optične pasti, 2 para laserjev magneto-optične pasti, 3 merilna laserja, 4 laser, s katerim spravijo atome v zeleno stanje, 5 laser, katerega curek odpihne atome v nepravem stanju, 6 mikrovalovi, 7 magnetna zaščita, 8 gruča cezijejih atomov, 9 zrcalo, ki niha v navpični smeri, 10 odbiti laserski curek.

Ramanov pojav

Pri *Ramanovem pojavu*³ molekule obsevamo z enobarvnim valovanjem s krožno frekvenco ω . Molekule so v stanju ψ_0 ali v bližnjem nihajnem ali vrtilnem stanju ψ_r z malo večjo ali v stanju $\psi_{r'}$ z malo manjšo energijo. Svetloba se na molekulah prožno sipa, tako da ima sipana svetloba enako krožno frekvenco kot vpadna. Pri takem sipanju molekula energijo iz valovanja absorbira, preide v vzbujeno stanje ψ_v , nato energijo izseva in se vrne v začetno stanje. Pri tem je ψ_v *virtualno stanje*, v katerem molekula preživi zelo kratek čas, in ne njeno lastno stanje. Tako Ramanov pojav ni vezan na

³Pojav je leta 1923 napovedal Adolf Smekal, odkril pa ga je leta 1928 Chandrasekhara Venkata Raman (1888–1970). Za odkritje je Raman dobil Nobelovo nagrado za fiziko leta 1930.



Slika 3. Pregledna risba glavnih prehodov atoma cezija v interferometru. Valoviti črti nakazujejo fazo v laserskem curku na obeh poteh delnih valovnih funkcij. Laserska sunka $\frac{1}{2}\pi$ delujeta kot polprepustna ploščica, laserski sunek π pa kot zrcalo (levo). Ramanova prehoda med stanjema $\psi_0 \exp(i k_0^B z)$ in $\psi_1 \exp(i(k_0^B + k_v^B)z)$ potekata prek virtualnega vzbujenega stanja $\psi_v \exp(i(k_0^B + k_{v1}^B)z)$ (desno) [7].

resonanco.

V redkih primerih, denimo v enem primeru na sto milijard, molekula iz virtualnega vzbujenega stanja s sevanjem ne preide v stanje ψ_o , ampak v stanje ψ_r z večjo energijo. Tedaj seva valovanje z manjšo krožno frekvenco. V spektru se poleg izrazite črte s frekvenco vpadne svetlobe pojavi šibka črta, premaknjena proti rdečemu delu (slika 1b). V drugem primeru molekula z absorpcijo preide v virtualno stanje in iz njega s sevanjem v stanje ψ_r z manjšo energijo od začetnega stanja. V tem primeru seva valovanje z večjo krožno frekvenco. V spektru se pojavi šibka črta, premaknjena proti modremu delu. Ramanov pojav je pomemben v kemiji. Spekter, ki nastane, ko spreminjamo krožno frekvenco vpadne svetlobe, razkrije zgradbo molekule.

Pri *stimuliranem Ramanovem sevanju* Ramanovemu pojavu sledi stimulirano sevanje. Najprej atom, ki ima v smeri curka gibalno količino $\hbar k_0^B$, v stanju $\psi_0 \exp(i k_0^B z)$ iz laserskega curka absorbira energijo $\hbar \omega_{v1} = c \hbar k_{v1}$, prevzame gibalno količino $\hbar k_{v1}^B$ in preide v stanje $\psi_v \exp(i(k_0^B + k_{v1}^B)z)$. Prvi faktor valovne funkcije opiše notranje stanje atoma, eksponentni faktor pa gibanje atoma kot celote. Zaradi preglednosti količine, ki zadevajo atom, se pravi valovno funkcijo ali tako imenovano Broglievo valovanje, opremimo z znakom B . Ko atom prevzame gibalno količino sevanja, je $k_{v1} = k_{v1}^B$. Drugi

laserski curek je usmerjen v nasprotno smer kot prvi. S stimuliranim sevanjem atom izseva energijo $\hbar\omega_{v2} = c\hbar k_{v2}$, prevzame odzivno gibalno količino $-\hbar k_{v2}^B$ in preide v stanje $\psi_1 \exp(i(k_0^B + k_v^B)z)$ s $k_v^B = k_{v1}^B + k_{v2}^B$. Gibanje atomov smo opisali z ravnim valovanjem z določeno gibalno količino. V rešnici gibalna količina, ki ustreza delni valovni funkciji, ni natanko določena. Vendar račun obvelja, ker faza ni odvisna od gibalne količine. Stimulirano Ramanovo sevanje notranje stanje atoma poveže z njegovim gibanjem.

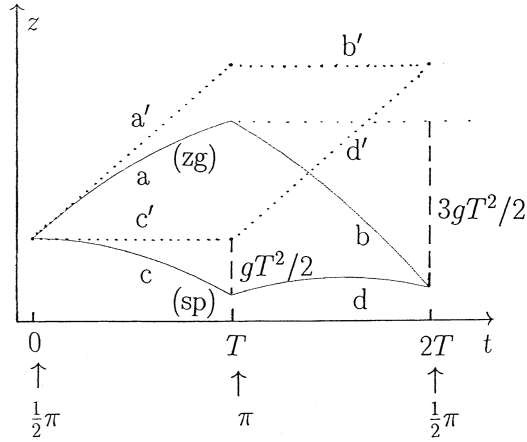
Z izbiro lastnosti laserskih sunkov je mogoče doseči, da je pri določeni Rabijski krožni frekvenci Ω čas trajanja sunka t_0 tolikšen, da je $\Omega t_0 = \frac{1}{2}\pi$. Po enačbi (3) je po sunku atom v sestavljenem stanju, v katerem sta dela valovne funkcije enako zastopana. Tak *sunek* $\frac{1}{2}\pi$ po učinku ustreza polprepusni ploščici. S sunkom $\frac{1}{2}\pi$ radiofrekvenčnega polja na primer pri jedrski magnetni resonanci preklopijo spine atomov pravokotno na ravnino magnetnega polja. Deloma valovne funkcije v sestavljenem stanju ustrezata gibanju z različnima hitrostma. Dela se oddaljujeta drug od drugega s hitrostjo $v_o = \hbar k_v^B / m$, če je m masa atoma. Nenavadno je, da delni valovni funkciji, ki ustrezata delnima valovanjema, zadevata isti atom.

Interferometri z gručami hladnih alkaljskih atomov

V zadnjem času se kot natančno merilno orodje uveljavlja interferometer z gručami hladnih alkaljskih atomov.⁴ Zasluge za njegov razvoj gredo v veliki meri raziskovalni skupini S. Chuja [1–7].⁵ Najprej so uporabljali gruče natrijevih atomov, nato so prešli h gručam cezijevih atomov. Osnovno stanje alkaljskega atoma je razcepljeno na stanji ψ_0 in ψ_1 zaradi hiperfine sklopitve spinov zunanjega elektrona in jedra. Pri natriju sta to stanji $3S_{1/2}, F = 2, m_F = 0$ in $3S_{1/2}, F = 3, m_F = 0$, pri ceziju pa stanji $6S_{1/2}, F = 3, m_F = 0$ in $6S_{1/2}, F = 4, m_F = 0$. Kvantno število F podaja velikost skupnega spina zunanjega elektrona in jedra, kvantno število m_F pa njegovo komponento v smeri zunanjega magnetnega polja.

⁴Pri poskusih z molekulami z veliko maso so uporabili atomski interferometer z umetnimi mrežicami, *Obzornik mat. fiz.* **51** (2004) 88–93.

⁵Steven Chu (rojen 1948) je leta 1997 skupaj s Claudom Cohen-Tannoudijem in Williamom D. Phillipsom dobil Nobelovo nagrado za razvoj laserskega hlajenja atomov. Leta 1987 je iz Bellovih laboratorijev, v katerih je njegova skupina opravila večino nagrajenega dela, prešel na univerzo Stanford. Leta 2004 je postal direktor Državnega Lawrenceovega laboratorija v Berkeleyju in profesor na oddelkih za fiziko in biologijo kalifornijske univerze v Berkeleyju. Od leta 2009 je minister za energijo v ameriški vladi.



Slika 4. Klasični poti obeh delnih valovnih funkcij brez gravitacije (pikčasto) in z gravitacijo (neprekinjeno). Če ni gravitacije, je pot $a'-b'$ popolnoma enakovredna poti $c'-d'$. Gravitacija to spremeni. V časovnem razmiku $0 < t < T$ velja za zgornjo pot $z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ (a) in za spodnjo $z = -\frac{1}{2} g t^2$ (c), v razmiku $T < t < 2T$ pa za zgornjo pot $z = v_0 T - \frac{1}{2} g t^2$ (b) in za spodnjo $z = v_0(t - T) - \frac{1}{2} g t^2$ (d). Ob $t = T$ se spremeni na zgornji poti hitrost $v_0 - gT$ v $-gT$ in na spodnji poti hitrost $-gT$ v $v_0 - gT$. Na zgornji poti pade delna valovna funkcija na odseku c za $\frac{1}{2} g T^2$, na spodnji pa na odseku b za trikrat toliko. Na risbi smo zaradi preglednosti za začetno gibalno količino atoma $\hbar k_0^B$ izbrali 0 in težni pospešek 350-krat pomanjšali.

Za virtualno stanje ψ_v izberejo stanje malo pod prvim višje vzbujenim stanjem $P_{3/2}$. Pri prehodih iz stanja $P_{3/2}$ v osnovno stanje atom cezija seva temnordečo črto z valovno dolžino 852 nm, ki ji ustreza energija 1,46 eV. Virtualno stanje mora biti dovolj pod lastnim stanjem $P_{3/2}$, da atomi ne bi prešli v to stanje in iz njega s spontanym sevanjem v osnovno stanje ter bi bili za stimulirano Ramanovo sevanje izgubljeni.

Prehodu med stanjema ψ_0 in ψ_1 , na kateri je zaradi hiperfine sklopitve razcepljeno osnovno stanje atoma cezija, ustrezajo frekvenca 9 192 631 770 s^{-1} – z njo je določena sekunda –, valovna dolžina 3,26 cm in energija $3,81 \cdot 10^{-5}$ eV. Energijska razlika med stanjema ψ_0 in ψ_1 je veliko manjša od energijske razlike med stanjem $P_{3/2}$ in osnovnim stanjem. V približnem računu smemo zato k_{v1}^B in k_{v2}^B vzeti za enaka in postaviti $k_v^B = 2k_{v1}^B$.

V interferometru z atomi cezija iz pare pri majhnem tlaku zberejo kakih petsto milijonov atomov v magneto-optični pasti med paroma nasprotnih laserskih curkov v prostoru med tuljavama (slika 2) [3, 4]. Potem zmanjšajo gostoto magnetnega polja v pasti in naravnajo frekvenco laserjev ter s tem

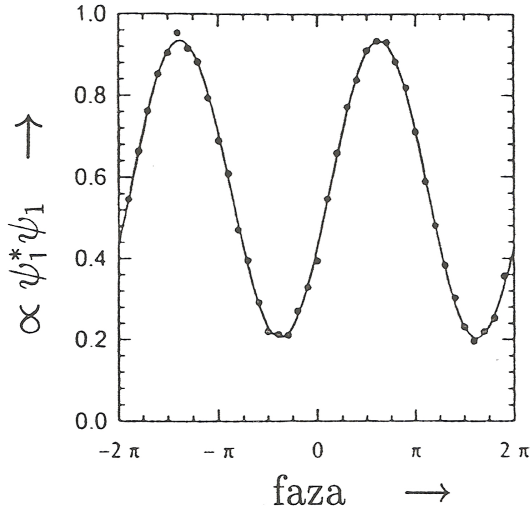
ohladijo atome do efektivne temperature $1,5 \cdot 10^{-6}$ K. Z obsevanjem z mikrovalovi in nasprotnima laserskima curkoma še dodatno ohladijo atome in s stranskim laserskim curkom odpihnejo atome, ki nimajo smeri in velikosti hitrosti na želenem območju. Tako pripravijo gruče s po tremi milijoni atomov cezija, ki se počasi gibljejo navzgor, medtem ko hitrost znotraj gruče ustreza efektivni temperaturi 10^{-8} K. Gruče s polmerom dobrega milimetra vstopijo v prostor, zaščiten pred magnetnim poljem, se prosto dvigajo in nato prosto padajo kot kaplje vode v vodometu.

V začetnem trenutku $t = 0$ atome obsevajo s sunkom $\frac{1}{2}\pi$. Valovna funkcija $\psi_0 \exp(ik_0^B z)$ se razcepi na dela $\psi_0 \exp(ik_0^B z)$ in $\psi_v \exp(i(k_0^B + k_v^B)z)$. V trenutku $t = T$ prvemu sunku sledi sunek π drugega para laserjev. Čas trajanja t'_0 je tolikšen, da je $\Omega t'_0 = \pi$ (3). Tak sunek π po učinku ustreza odboju na zrcalu in valovno funkcijo $\psi_0 \exp(ik_0^B z)$ prevede v $\psi_v \exp(i(k_0^B + k_v^B)z)$, valovno funkcijo $\psi_v \exp(i(k_0^B + k_v^B)z)$ pa v $\psi_1 \exp(ik_0^B z)$ (slika 3). Dela valovne funkcije, ki sta se pred sunkom π oddaljevala, se po njem približujeta z enako veliko hitrostjo. V trenutku $t = 2T$ sledi še tretji sunek, to pot sunek $\frac{1}{2}\pi$. Po tem sunku sta dela valovne funkcije, ki sta se krajevno sestala, enako usmerjena in interferirata. Atom je tedaj v stanju ψ_0 ali v stanju ψ_1 . Padajoče gruče atomov obsevajo z nasprotnima curkoma merilnih laserjev. V prostoru z magnetnim poljem curka resonančno ionizirata atome v stanju ψ_1 in te štejejo.

Fazna razlika

Delež atomov v stanju ψ_1 je odvisen od fazne razlike. Na fazo vpliva dvoje. Prvič: delni valovni funkciji potujeta po različnih poteh. Po Richardu P. Feynmanu fazo gibajočega se delca določa akcija, časovni integral Lagrangeeve funkcije $L = \frac{1}{2}mv^2 - mgz$, to je razlike kinetične in potencialne energije, deljene s \hbar . Računamo jo lahko za klasično pot, če je integral $\int L dt$ velik v primerjavi s \hbar . V našem primeru je razlika $\int_{zg} L dt - \int_{sp} L dt = 0$. Indeks zg zadeva zgornjo, indeks sp pa spodnjo pot (slika 4).

Drugič: na fazo vpliva delovanje svetlobe na atom. V kratkem močnem sunku laserske svetlobe jakost električnega polja vsili svojo fazo delni valovni funkciji. Pri prvem prehodu iz stanja atoma v stanje z večjo energijo dobi valovna funkcija dodaten eksponentni faktor s trenutno fazo svetlobe. Pri prehodu iz stanja ψ_0 v stanje ψ_1 , na primer, je to $(1/\sqrt{2})\exp(-i(kz_1 - \omega t_1 +$



Slika 5. Značilna interferenčna vrhova številka 588 538 in 589 539. Na navpično os je nanosen delež atomov v stanju ψ_1 , na vodoravno pa fazna razlika svetlobe. Po krivulji, ki so jo prilagodili izmerkom, so ugotovili težni pospešek na $3 \cdot 10^{-9}$ natančno [3, 4].

ϕ_1). Podobno je treba tudi pri drugih prehodih upoštevati lego atoma ob času, ko ga zadene laserski curek, in fazo laserske svetlobe. Pri prehodu iz stanja z večjo energijo v stanje z manjšo se spremeni znak pred imaginarno enoto. Tako sestavimo valovno funkcijo atoma zaradi vpliva svetlobe na zgornji poti:

$$\psi_{(\text{zg})} = (1/\sqrt{2})\exp(-i(kz_1 - \omega t_1 + \phi_1)) \cdot (1/\sqrt{2})\exp(i(kz_2^{(\text{zg})} - \omega t_2 + \phi_2)) \quad (4)$$

in na spodnji poti:

$$\psi_{(\text{sp})} = (1/\sqrt{2})\exp(-i(kz_2^{(\text{sp})} - \omega t_2 + \phi_2)) \cdot (1/\sqrt{2})\exp(i(kz_3 - \omega t_3 + \phi_3)). \quad (5)$$

$z_2^{(\text{zg})}$ zadeva zgornjo in $z_2^{(\text{sp})}$ spodnjo pot. Delov valovne funkcije, ki opišejo stanje atoma, nismo upoštevali, ker smo ugotovili, da ne prispevajo k fazni razliki.

Interferenčno sliko pokaže gostota verjetnosti $|\psi_{\text{zg}} + \psi_{\text{sp}}|^2$. Če ne bi bilo gravitacije, bi bilo $z_2^{(\text{zg})} = z_2^{(\text{sp})} = z_2$ in bi veljalo $z_1 - z_2 = z_2 - z_3 = \Delta z$ ter $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = T$. Po zgledu (1) in (2) bi dobili fazno razliko $(\phi_1 - \phi_2) - (\phi_2 - \phi_3) = \phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3$. Vpliv gravitacije upoštevamo kot motnjo. Zaradi nje je $z_1 - z_2^{(\text{zg})} = \Delta z - \frac{1}{2}gT^2$, a $z_2^{(\text{sp})} - z_3 = \Delta z - \frac{3}{2}gT^2$

(slika 4). Tako je skupna fazna razlika:

$$\Delta\phi = \phi_1 - 2\phi_2 + \phi_3 + kgT^2. \quad (6)$$

Fazna razlika ni odvisna od začetne gibalne količine $\hbar k_0^B$.

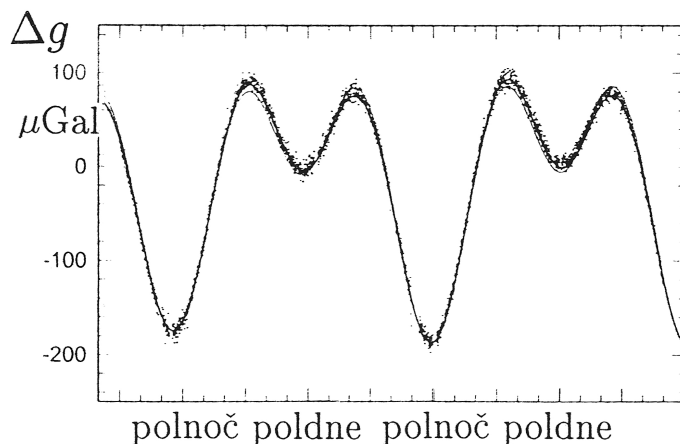
Člen s težnim pospeškom je sorazmeren s kvadratom T . Merjenje je tem natančnejše, čim daljši je ta čas. Z gručami hladnih cezijevih atomov so dosegli $T = 0,16$ s, preden sta zaradi zunanjih motenj delni valovni funkciji prenehali biti koherentni. Atomi so se 0,32 s gibali prosto in sta se dela valovne funkcije v času T oddaljila za $v_o T = 0,12$ mm. Hitrost ob odzivu v_o izračunamo iz $\hbar k_v^B = mv_o$ in dobimo $v_o = \hbar k_v^B / m = 2\hbar(2\pi/\lambda)/m = 7 \cdot 10^{-3}$ m/s. Vstavili smo $k_{v1}^B = k_{v1} = 2\pi/\lambda$ z valovno dolžino $\lambda = 852$ nm. Pri tem smo spregledali, da virtualnemu stanju ustreza malo manjša energija kot stanju $P_{3/2}$. Zaradi težnega pospeška se v času T faza v celoti spremeni za $kgT^2 = mvgT^2/\hbar = 3,8 \cdot 10^6$ radianov ali za $3,8 \cdot 10^6/(2\pi) = 6,0 \cdot 10^5$ valov. Faza v delnih valovnih funkcijah po obeh poteh $\int Ldt/\hbar = m(\frac{8}{3}g^2T^3 - 2v_o gT^2 + \frac{1}{2}v_o^2T)/\hbar$ je enaka $2,22 \cdot 10^9$ radianov ali $3,53 \cdot 10^8$ valov.

Predstavljamo si, da bi mimo mirujočega atoma v času T šlo $\omega T/(2\pi)$ valov. Mimo atoma, ki se v smeri svetlobnega curka premakne za Δz , gre v tem času $k\Delta z/(2\pi)$ valov manj. Interferometer torej primerja fazno razliko pri gibanju v časovnem razmiku od 0 do T s fazno razliko pri gibanju v razmiku od T do $2T$. Prednost takega diferencialnega merjenja je, da so motnje, na primer Starkov pojav v svetlobnem električnem polju, manj izrazite.

Merjenje

Fazno razliko zasledujejo s svetlobo. Relativni fazi prvih dveh svetlobnih sunkov sta, na primer, enaki in lahko postavimo $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Spreminjajo pa fazo ϕ_3 . V odvisnosti od nje zaznavajo spreminjajoči se tok atomov v stanju ψ_1 . Ob tem spreminjajo tudi frekvenco svetlobe, da ostane v resonanci s prehodom med stanjema $\psi_v \exp(i(k_0^B + k_v^B)z)$ in $\psi_0 \exp(ik_0^B z)$. Razliko frekvenc laserjev v prvih dveh sunkih določa stabiliziran radiofrekvenčni izvir. S tem natančno nadzirajo frekvenco in fazo svetlobe.

To so glavne značilnosti atomskega interferometra. Omenimo še nekaj podrobnosti. Pri zelo natančnem merjenju so morali upoštevati, da se težni pospešek spreminja z višino. Namesto dveh parov navpičnih laserjev



Slika 6. Težni pospešek se spreminja s časom. Spremembe 8. in 9. decembra 1996 so nastale v glavnem zaradi plimovanja. $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$, tako da je $1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ m/s}^2 = 10^{-9} g$ [3, 4].

so uporabili dve laserski diodi. Njuna curka sta se odbila od vodoravnega zrcala na vrhu merilnega prostora. Zrcalo so v navpični smeri nihali z določeno frekvenco in izboljšali kontrast interferenčnih prog, ko so upoštevali spreminjanje s to frekvenco. Posebno skrb so posvetili stabilnosti laserjev. Izkoristili so Dopplerjev pojav, zaradi katerega se je za padajoči atom frekvenca svetlobe razlikovala od frekvence za dvigajoči se atom. Posebej so si prizadevali poiskati najugodnejše razmere in kolikor mogoče zmanjšati šum. Tako so od objave do objave merjenja postajala vse natančnejša.

Z relativno natančnostjo $3 \cdot 10^{-9}$ so izmerili frekvenco radijskih valov pri prehodu med stanjema ψ_0 in ψ_1 atoma natrija [5]. Iz curka atomov natrija so izbrali atome, katerih hitrost je bila določena na $30 \mu\text{m/s}$ natančno, za dve velikostnji stopnji natančneje kot dotlej [6]. Potem so izdelali atomski interferometer na curek atomov cezija. Z interferometrom so natančno izmerili težni pospešek (sliki 5, 6) [1–4]. Na istem kraju so izmerili težni pospešek tudi s posebnim Michelsonovim interferometrom. V njegovem navpičnem kraku je v vakuumu padal ogel optične prizme, ki je svetlobo odbil natanko v navpični smeri. Oba merilnika sta dala na $7 \cdot 10^{-9}$ natančno enaki vrednosti. S tolikšno natančnostjo torej atomi padajo enako kot makroskopska telesa.

Z atomskim interferometrom so izmerili rdeči premik spektralne črte v

gravitacijskem polju in z relativno natančnostjo $7 \cdot 10^{-9}$ podprli splošno teorijo relativnosti [7]. Član skupine Achim Peters se je vrnil na Humboldtovo univerzo v Berlinu in tam s sodelavci razvil prenosni interferometer za merjenje težnega pospeška z atomi rubidija. Druga raziskovalna skupina je merila gravitacijsko konstanto [8]. Upajo, da bodo po tej poti izboljšali natančnost, s katero je znana ta konstanta. Z interferometrom so ugotavljali, ali se konstanta fine strukture spreminja s časom [9].

V zadnjih letih se je atomska interferometrija močno razmahnila. Naraslo je število raziskovalnih skupin, ki se ukvarjajo z atomskimi interferometri, in število člankov o merjenjih z njimi. Razvili so številne vrste atomskih interferometrov in izpopolnili merilne načine [10]. Z interferometrom, v katerem delni valovanji potujeta v vodoravni smeri po različnih poteh, je mogoče meriti kotno hitrost pri vrtenju. V tem primeru fazna razlika ni enaka kgT^2 , ampak je zaradi Coriolisovega pospeška sorazmerna s $\vec{S} \cdot \vec{\omega}$. Pri tem je \vec{S} ploščina ploskve, ki jo oklepata poti, in $\vec{\omega}$ kotna hitrost. To je Sagnacov poskus v malem.

Profesorju Martinu Čopiču se zahvaljujem za koristne razprave.

LITERATURA

- [1] M. Kasevich in S. Chu, *Atomic interferometry using stimulated Raman transitions*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 181–184; *Measurement of the gravitational acceleration of an atom with a light-pulse atom interferometer*, Applied Physics B **54** (1991), 321–332.
- [2] A. Peters, K. Y. Chung, B. Young, J. Hensley in S. Chu, *Precision atom interferometry*, Philosophical Transactions of the Royal Society London **355** (1997) 2223–2233.
- [3] A. Peters, K. Y. Chung in S. Chu, *Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms*, Nature **400** (1999) 849–852.
- [4] A. Peters, K. Y. Chung in S. Chu, *High-precision gravity measurements using atom interferometry*, Metrologia **38** (2001) 25–61.
- [5] M. A. Kasevich, E. Riis in S. Chu, *Rf spectroscopy in an atomic fountain*, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 612–615.
- [6] M. Kasevich, D. S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi in S. Chu, *Atomic velocity selection using stimulated Raman transitions*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2297–2300.
- [7] H. Müller, A. Peters in S. Chu, *A precision measurement of the gravitational redshift by the interference of matter waves*, Nature **463** (2010) 926–9929.
- [8] J. B. Fixler, G. T. Foster, J. M. McGuirk in M. A. Kasevich, *Atom interferometer measurement of the Newtonian constant of gravity*, Science **315** (2007) 74–77.
- [9] T. M. Fortier in drugi, *Precision atomic spectroscopy for improved limits on variation of the fine structure constant and local position invariance*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 070801-1-4.
- [10] A. D. Cronin, J. Schmiedmayer, D. E. Pritchard, *Optics and interferometry with atoms and molecules*, Reviews of Modern Physics **81** (2009) 1051–1129.

REŠEVANJE TREH VELIKIH STAROGRŠKIH PROBLEMOV

MARJAN JERMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A20, 12F05, 97H40

Trije klasični starogrški problemi, podvojitve kocke, kvadratura kroga in trisekcija kota, niso rešljivi samo z uporabo neoznačenega ravnila in šestila. V prispevku so opisane nekatere zanimive antične nestandardne rešitve teh treh problemov.

SOLVING THE THREE CLASSICAL GREEK PROBLEMS

The three classical ancient Greek problems, doubling the cube, squaring the circle and trisecting an angle cannot be solved using ruler and compass only. Some interesting ancient non-standard solutions of these problems are described.

Uvod

Teon iz Smirne¹ je med komentarji izgubljene Eratostenove² knjige *Platonica* zapisal zgodbo, ki je kasneje postala znana kot *problem z Delosa*. Okrog leta 430 pr. Kr. je približno četrtino prebivalcev grškega otoka Delosa pomorila kuga. Kot je bilo takrat običajno, so šli predstavniki otoka po nasvet k oraklju v Apolonov tempelj v Delfe. Odgovoril jim je, da se bodo kuge znebili, če podvojijo prostornino Apolonovega oltarja [v obliki kocke]. Različne zgodbe govorijo o tem, da so rokodelci najprej nad oltarjem zgradili še en enak oltar, tako podvojili prostornino, a s tem pokvarili njegovo obliko. Ko so nato poskusili s podvojitvijo vseh stranic, so prostorino povečali za osemkrat. Po dolgotrajnih neuspešnih poskusih so za pomoč prosili Platona.³ Ta jim je povedal, da si orakelj v resnici ni želel večjega oltarja, je pa želel s to nalogo osramotiti Grke zaradi njihovega zanemarjanja matematike in prezira do geometrije.

Zgodbo s podobno matematično vsebino najdemo tudi v Evtocijevem⁴ komentarju Arhimedove⁵ razprave *O sferi in valju*. V sicer ponarejenem

¹Teon iz Smirne (75–135), grški matematik, ki je v večini svojih del komentiral dela starejših matematikov in filozofov, predvsem pitagorejcev in Platona.

²Eratosten iz Kirene (276–195 pr. Kr.), grški matematik, geograf, pesnik, astronom in atlet.

³Platon (424–348 pr. Kr.), Sokratov študent, grški filozof in matematik.

⁴Evtocij iz Aškalona (480–540), grški matematik.

⁵Arhimed iz Sirakuze (287–212 pr. Kr.), grški matematik, fizik in astronom.

pismu, ki naj bi ga Eratosten pisal kralju Ptolemaju, je zapisan mit o užaloščenem kralju Krete Minosu.⁶ Njegov sin Glavk je med lovljenjem miši padel v vrč medu in se utopil. Ko je kralj videl, da je vsaka stranica sinove grobnice dolga le 100 čevljev, se mu je zdela premajhna za zadnje počivališče kraljevskega potomca. Zato je obrtnikom naročil, naj ohranijo njeno obliko, prostornino pa podvojijo.

Druga dva velika problema, kvadratura kroga in trisekcija kota, nimata tako slikovitega izvora, sta pa zagotovo zelo stara in razvpita. Že v Rhindovem papirusu,⁷ ki je bil napisan leta 1650 pr. Kr., je zastavljena naloga, kako konstruirati stranico kvadrata, ki je ploščinsko enak danemu krogu. Iz Aristofanove⁸ igre *Ptiči* iz leta 414 pr. Kr. celo izvira poimenovanje "kvadratura kroga" za neplodne poskuse doseči nemogoče. Tudi trisekcija kota je zelo star problem. Antični matematiki, med njimi tudi Hipokrat⁹ in Nikomed,¹⁰ so se intuitivno zavedali, da problema ni mogoče rešiti samo z ravnilom in šestilom, zato so se reševanja lotili s pomočjo dodatnih orodij. Izumili so mehanične naprave in nove krivulje, s pomočjo katerih je bila trisekcija mogoča.

Da je samo z neoznačenim ravnilom in šestilom v splošnem nemogoče konstruirati stranico kocke, ki ima dvakratno prostornino, je ob obilni zlorabi opija in kofeina pokazal šele Pierre Wantzel¹¹ leta 1837. V istem delu je tudi dokazal, da ni možna trisekcija kota, in karakteriziral vse pravilne večkotnike, ki se dajo narisati samo z ravnilom in šestilom.¹² Problem kvadrature kroga je bil dokončno dokazan kot nerešljiv šele leta 1882, ko je Carl Lindemann¹³ pokazal, da je število π transcendentno.

Poenostavljeno rečeno, konstruktibilna števila so rešitve sistema dveh enačb, od katerih je lahko vsaka linearna (enačba premice skozi že konstruirani točki) ali kvadratna (enačba krožnice s središčem v že konstruirani točki, ki ima za polmer razdaljo med že narisanimi točkama), za koeficiente pa imata konstruktibilna števila, ki smo jih dobili v prejšnjih korakih. Tako je 1 konstruktibilno število, vsa preostala pa so dobljena s smiselnim končnim zaporedjem štirih osnovnih računskih operacij in kvadratnih kore-

⁶Glede na arheološke najdbe v Knososu je morda v zgodbi nekaj resnice.

⁷Rhindov papirus je prepis dokumenta iz leta 1850 pr. Kr., verjame pa se celo, da njegova vsebina izvira iz let približno 3400 pr. Kr.

⁸Aristofan (446–386 pr. Kr.), pisec komedij. Še danes je v celoti ohranjenih 40 njegovih del.

⁹Hipokrat s Hiosa (470–410 pr. Kr.), grški matematik (in ne znani zdravnik).

¹⁰Nikomed (280–210 pr. Kr.), grški matematik, ki je izumil *konhoido*, s pomočjo katere je mogoča trisekcija kota.

¹¹Pierre Wantzel (1814–1848), francoski matematik.

¹²Samo z ravnilom in šestilom je možno konstruirati natanko tiste pravilne večkotnike, katerih število stranic je produkt dvojk in Fermatovih praštevil. Nekateri štejejo konstrukcijo pravilnega sedemnajstkotnika za četrti veliki starogrški problem. Drugače od prejšnjih treh ga je rešil C. F. Gauss (1777–1855) leta 1796. Rešitev je v skladu z Wantzlovo ugotovitvijo: $17 = 2^{2^2} + 1$ je praštevilo.

¹³Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939), nemški matematik.

nov. V jeziku moderne algebre pravimo, da imajo konstruktibilna števila minimalni polinom z racionalnimi koeficienti in stopnjo 2^n .

Število $\sqrt[3]{2}$ je ničla v $\mathbb{Q}[x]$ nerazcepnega polinoma $x^3 - 2 = 0$, število π pa ni ničla nobenega polinoma z racionalnimi koeficienti. Nekatere kote se seveda da tretjiniti, možna je recimo trisekcija pravega kota, običajno pa pokažemo, da ni možna trisekcija kota 60° . Če bi bila trisekcija možna, bi lahko s pomočjo pravokotne projekcije narisali tudi daljico dolžine $\cos 20^\circ$. Zaradi enakosti

$$\frac{1}{2} = \cos(60^\circ) = \cos(3 \cdot 20^\circ) = 4 \cos^3(20^\circ) - 3 \cos(20^\circ)$$

je $\cos 20^\circ$ ničla polinoma $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Lahko je videti, da je ta polinom v $\mathbb{Q}[x]$ nerazcepen, zato trisekcija kota 60° ni možna.

V nadaljevanju prispevka bodo navedene nekatere zanimive nestandardne rešitve teh treh problemov. Bralca vabim, naj pri vsaki od njih ugotovi, zakaj ni izvedljiva le z ravnilom in šestilom.

Podvojitve kocke

Že Hipokrat je spoznal, da je za podvojitve kocke dovolj najti daljici dolžin x in y v vmesnem sorazmerju: če je

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

potem je

$$\left(\frac{y}{b}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b}.$$

V primeru, ko izberemo $a = 2b$, velja $y^3 : b^3 = 2 : 1$.

Daljici v iskanem vmesnem sorazmerju je na najbolj impresiven način našel Arhitas.¹⁴ Rešitev najdemo med Evtocijevimi komentarji, kjer morda citira Evdemovo¹⁵ *Zgodovino geometrije*. Arhitas si je pri rešitvi genialno pomagal z gibanjem in s tretjo razsežnostjo prostora. Plutarh¹⁶ piše, da je ta nekonvencionalna rešitev zelo ujezila idealističnega Platona, ki je dovoljeval le ravninsko uporabo ravnila in šestila.

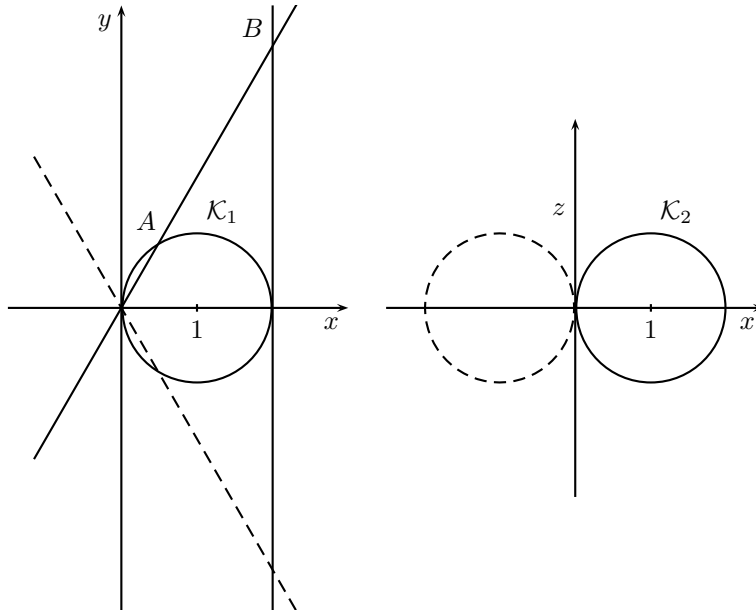
Zaradi lažjega opisa in utemeljitve pravilnosti Arhitove rešitve si bomo pomagali z analitično geometrijo. Zavedati pa se je treba, da je koordinatni sistem, ki je učinkovita povezava med evklidsko geometrijo in algebro, odkril šele René Descartes¹⁷ v 17. stoletju. Zgodovinsko je pomembno, da lahko celotni analitični račun nadomestimo z dobro geometrijsko predstavo

¹⁴Arhitas (428–347 pr. Kr.), pripadnik pitagorejcev, začetnik mehanike.

¹⁵Evdem z Rodosa (370–300 pr. Kr.), Aristotelov učenec.

¹⁶Plutarh (46–120), zgodovinar, biograf in esejist.

¹⁷René Descartes (1596–1650), francoski filozof in matematik.



Slika 1. Arhitova podvojitve kocke.

in nekaterimi elementarnimi geometrijskimi premisleki, ki so zapisani že v Evklidovih Elementih. Večkrat je treba zvito uporabiti podobnosti trikotnikov in potenco točke na krog.

Vsi opisi bodo potekali v običajnem kartezičnem koordinatnem sistemu v \mathbb{R}^3 . Pokazali bomo, kako podvojiti kocko s prostornino 1.

V ravnini $z = 0$ imejmo krožnico \mathcal{K}_1 s središčem $(1, 0, 0)$ in polmerom 1. Ploskev \mathcal{V} je pokončni valj, ki ima krožnico \mathcal{K}_1 : $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ na svojem plašču,

$$\mathcal{V}: x^2 + y^2 = 2x.$$

Krožnico \mathcal{K}_2 dobimo z vrtežem krožnice \mathcal{K}_1 okrog abscisne osi za pravi kot. Leži v ravnini $y = 0$. Če krožnico \mathcal{K}_2 zavrtimo okrog osi z , dobimo torus \mathcal{T} brez sredinske luknje. Kot je običajno pri rotacijskih telesih, enačbo za \mathcal{T} najlažje napišemo v cilindričnih koordinatah. Pri vsakem polarnem kotu dobimo enako krožnico:

$$(r - 1)^2 + z^2 = 1, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

zato je enačba torusa

$$\mathcal{T}: x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Točka $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ leži na krožnici \mathcal{K}_1 in je od izhodišča $O(0, 0, 0)$ oddaljena za 1. Premica

$$p: x = 2, \quad z = 0,$$

ki je tangenta na krožnico \mathcal{K}_1 , seka poltrak z začetkom v O in skozi A v točki B . Če zavrtimo OB okrog abscisne osi, dobimo del plašča stožca z enačbo $x\sqrt{3} = \sqrt{y^2 + z^2}$, ki leži na neskončnem dvojnem stožcu

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2.$$

Točka $C(x, y, z)$ naj bo presečišče vseh treh ploskev \mathcal{V} , \mathcal{T} in \mathcal{S} v prvem oktantu, točka $D(x, y, 0)$ pa njena pravokotna projekcija na ravnino $z = 0$.

Enačba torusa \mathcal{T} pove, da za koordinate točke C velja

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2 \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

iz enačbe valja \mathcal{V} in stožca \mathcal{S} pa dobimo

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2x)^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Tako smo našli iskano vmesno sorazmerje med OC in OD :

$$\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1}.$$

Če pomnožimo zgornje tri ulomke, namreč dobimo

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 = 2,$$

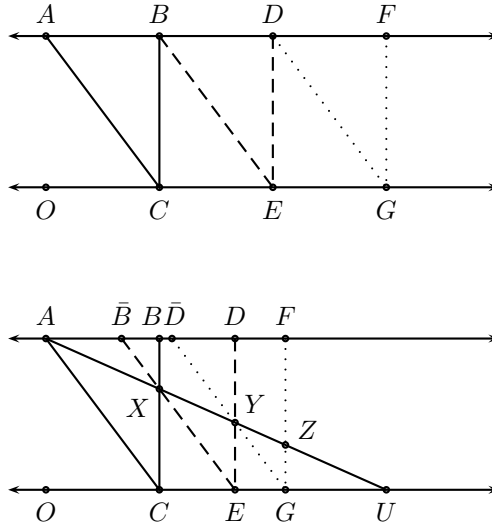
kar pomeni, da je OD stranica podvojene kocke s prostornino 2.

Še bolj nezadovoljen bi bil Platon z Eratostenovo mehanično napravo, imenovano *mesolab*,¹⁸ prav tako namenjeno podvojitvi kocke.

Naprava je sestavljena iz dveh vzporednih vodil in treh skladnih pravokotnih trikotnikov (slika 2). Trikotnik ACB je fiksni, trikotnika BED in DGF pa se lahko premikata levo in desno po vodilih. Na spodnjem delu slike je primer premaknjenih trikotnikov $\bar{B}ED$ in $\bar{D}GF$. Z O označimo pravokotno projekcijo točke A na spodnje vodilo.

Na stranici FG si izberimo točko Z tako, da bo $ZG = \frac{1}{2}OA$. Z X označimo presečišče stranice BC s stranico $\bar{B}E$ premaknjenega trikotnika $\bar{B}ED$, z Y pa presek stranice DE premaknjenega trikotnika $\bar{B}ED$ in stranice $\bar{D}G$

¹⁸Napravo je prvič omenil veliki grški matematik Papos iz Aleksandrije (290–350).



Slika 2. Eratostenova naprava.

premaknjenega trikotnika $\bar{D}GF$. Trikotnika BDE in DGF je treba pomakniti v levo, tako da bodo točke A, X, Y in Z ležale na isti premici p .¹⁹ Naj bo U presek premice p s spodnjim vodilom po zahtevanem premiku trikotnikov.

Najprej po Talesovem izreku o razmerjih v trikotniku AOU velja

$$\frac{AO}{XC} = \frac{OU}{CU} = \frac{AU}{XU}.$$

Razmerja v trikotnikih ACU in XCU nam zaporedoma povejo, da je

$$\frac{AU}{XU} = \frac{CU}{EU} = \frac{XC}{YE}.$$

Z enakim premislekom dobimo $\frac{XC}{YE} = \frac{YE}{ZG}$. Tako smo našli vmesno sorazmerje

$$\frac{AO}{XC} = \frac{XC}{YE} = \frac{YE}{ZG}$$

in $AO : XC = \sqrt[3]{2} : 1$. V primeru, ko vzamemo $AO = 2$ in $ZG = 1$, je $YE = \sqrt[3]{2}$ stranica podvojene kocke.

¹⁹Bralci se lahko z napravo poigrajo na spletni strani [demonstrations.wolfram.com/-TheEratosthenesMachineForFindingTheCubeRootOfTwo/](https://demonstrations.wolfram.com/TheEratosthenesMachineForFindingTheCubeRootOfTwo/). Simulacijo je prispeval slovenski matematik dr. Izidor Hafner.

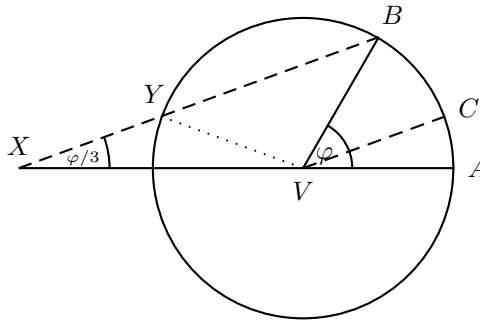
Eratosten je še dodal, da lahko napravi dodamo nove skladne trikotnike in s tem dobimo dodatna vmesna sorazmerja.²⁰ Prav tako je svetoval, da se zaradi enostavnosti njegove naprave ni vredno mučiti z Arhitovimi zapletenimi preseki ploskev.

S podvojitvijo kocke so se ukvarjali tudi drugi veliki matematiki. Menajhmos²¹ si je pomagal s presekom parabole in hiperbole. Nikomed²² je v ta namen izumil novo krivuljo *konhoido*,²³ Diokles²⁴ pa *cisoido*.²⁵ Apolonij²⁶, Heron²⁷ in Filon²⁸ pa so izumili metodo, pri kateri je treba ravnilo zasukati tako, da so določene daljice, ki jih ravnilo odreže, enako dolge.

Trisekcija kota

Veliko bolj enostavna in mehanično lažje izvedljiva je antična trisekcija kota, skicirana na sliki 3. Zelo verjetno jo je izumil Arhimed, zanjo pa vemo iz Tabitovega²⁹ arabskega prevoda *Knjige lem*, ki jo s pridržki štejejo za Arhimedovo delo.

Naj bo φ kot z vrhom V , ki ga želimo razdeliti na tri dele. Če je kot φ top, ga lahko razrežemo na pravi kot in ostri kot. Pravi kot se da enostavno razdeliti na tri dele, zato lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je kot φ oster.



Slika 3. Arhimedova trisekcija kota.

²⁰To se enostavno vidi iz zadnje izpeljave.

²¹Menajhmos (380–320 pr. Kr.), grški matematik in geometer.

²²Nikomed (280–210 pr. Kr.), grški matematik.

²³Parametrična enačba konhoide je $x = a + b \cos t$, $y = a \operatorname{tg} t + b \sin t$, $a \neq 0$.

²⁴Diokles (240–180 pr. Kr.), grški matematik in geometer.

²⁵Cisoido lahko podamo z enačbo $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.

²⁶Apolonij iz Perge (262–190 pr. Kr.), grški geometer in astronom.

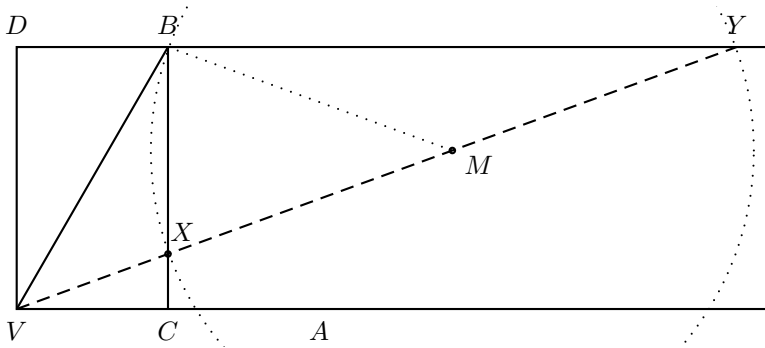
²⁷Heron iz Aleksandrije (10–70), grški matematik in inženir.

²⁸Filon (pribl. 4. stoletje pr. Kr.), grški arhitekt.

²⁹Tabit Ibn Kora (826–901), arabski matematik, fizik, astronom in prevajalec.

Najprej narišimo krožnico s središčem V in poljubnim polmerom. Krožnica naj seka kraka kota φ v točkah A in B . Levo od V potegnimo poltrak iz V , ki leži na isti premici kot polmer VA . Sedaj vzemimo ravnilo in ga fiksirajmo v točki B . Ravnilo naj odreže poltrak v točki X in seka krožnico v točkah Y in B . Vrtimo ga okrog B , dokler razdalja XY ne postane enaka polmeru krožnice. Na koncu narišemo poltrak iz V , ki leži v notranjosti kota φ in je vzporeden ravnilu. Če poltrak seka krožnico v točki C , trdimo, da je kot $\angle CVA$ tretjina kota φ .

Najprej zaradi izmeničnih kotov velja $\angle CVB = \angle VBY$. Trikotnik BVY je enakokrak, zato je $\angle VBY = \angle BYV$. Zunanji kot $\angle BYV$ trikotnika XVY pri oglišču Y je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov $\angle YXV + \angle YVX$, ki pa sta zaradi našega izbora $XY = YV$ enaka. Tako zaradi vzporednosti ravnila in daljice VC dobimo $\angle CVB = 2\angle YXV = 2\angle CVA$, to pa smo želeli pokazati.



Slika 4. Hipokratova trisekcija kota.

Na sliki 4 je skicirana še ena simpatična metoda za trisekcijo kota, ki jo je poznal že Hipokrat. Naj bo φ kot z vrhom V in krakoma VA in VB . Narišimo pravokotnik $VCBD$ z diagonalo VB in osnovnico VC na kraku VA . Iz točke D potegnimo poltrak v smeri B . Ravnilo, ki ga fiksiramo v V , naj seka stranico CB v X in poltrak iz D v Y . Vrtimo ga okrog V , dokler ne postane razdalja XY dvakratnik razdalje VB . Trdimo, da je kot $\angle XVA$ tretjina kota φ .

To vidimo recimo takole: Najprej s točko M razpolovimo daljico XY . Glede na lego ravnila je $XM = MY = VB = BM$. Zadnja enakost velja, ker je trikotnik XYB pravokoten in je po Talesovem izreku MB polmer njegove očrtane krožnice. Zato sta trikotnika VMB in BMX enakokraka. Velja:

$$\angle BVM = \angle VMB = \angle MBY + \angle MYB = 2\angle MYB = 2\angle YVA,$$

to pa je bilo treba pokazati.

Trisekcija kota je možna tudi z Nikomedovo *konhoido* in s Hipijevo³⁰

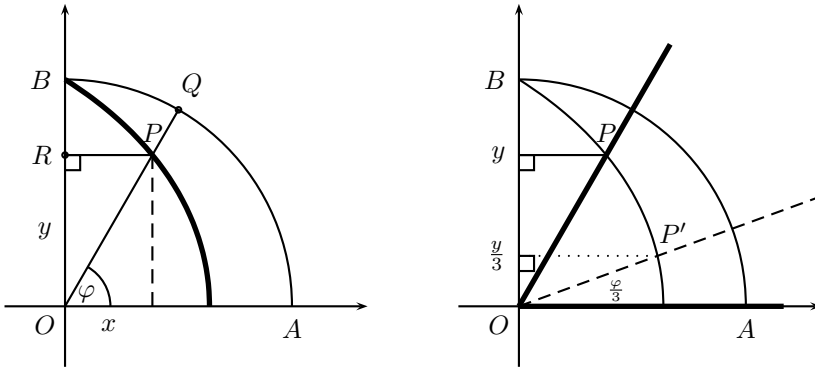
³⁰Hipija (živel v 5. stoletju pr. Kr.), sofist.

kvadratrisko, ki je bila prvotno namenjena kvadraturi kroga.

Kvadratura kroga

Okrog leta 420 pr. Kr. je grški sofist Hipija izumil novo krivuljo, za katero je kasneje Dinostrat³¹ pokazal, da omogoča kvadraturu kroga, zato so jo poimenovali *kvadratriska*.

Vzemimo pravokotni krožni izsek OAB z vrhom O in polmerom 1. Točka Q naj z enakomerno hitrostjo potuje po loku AB , točka R pa po kraku OB . Točki Q in R naj začneta potovati istočasno proti točki B , R iz točke O in Q iz točke A , premikata pa naj se tako hitro, da hkrati prispeta v točko B . Kvadratriska je krivulja, ki jo sestavljajo preseki daljice OQ s pravokotnico na OB v točki R v vsakem trenutku tega gibanja.



Slika 5. Na levi sliki je skicirana definicija Hipijeve kvadratrise. Desna skica pa kaže, kako si s kvadratrisko pomagamo pri tretjinjenju kota.

Kvadratrisko najlažje opišemo, če postavimo krožni izsek v pravokotni koordinatni sistem takole: $O(0,0)$, $A(1,0)$ in $B(0,1)$. Presek daljice OQ in pravokotnice v $R(0,y)$ označimo s P , kot $\angle AOQ$ pa s φ . Po definiciji kvadratrise je $y : \varphi = 1 : \frac{\pi}{2}$. Zato koordinati točke $P(x,y)$ na kvadratriski za $y \in (0,1]$ zadoščata enačbi

$$x = y \operatorname{ctg} \varphi = y \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2}.$$

V primeru $y = 0$ kvadratrisko zvezno razširimo:

$$x(0) = \lim_{y \searrow 0} y \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2} = \lim_{y \searrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}} = \lim_{y \searrow 0} \frac{\cos^2 \frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Tako bi s pomočjo kvadratrise lahko narisali število $\frac{2}{\pi}$. Z uporabo podobnosti je možno z ravnilom in šestilom risati produkte in kvociente že konstruiranih števil, s pomočjo Talesovega izreka pa se da risati tudi korene. Zato

³¹Dinostrat (390–320 pr. Kr.), grški matematik in geometer, Menajhmov brat.

bi lahko v nekaj korakih iz števila $\frac{2}{\pi}$ dobili tudi število $\sqrt{\pi}$, ki je stranica kvadrata s ploščino π .

Antifon³² je poskušal priti do kvadrature kroga z zaporednim včrtovanjem pravih večkotnikov s čedalje več stranicami, Arhimed si je pomagal s spiralo, Apolonij pa je za kvadraturu izumil novo krivuljo, ki se je žal izgubila skozi zgodovino.³³

S kvadratrisko je možna tudi trisekcija kota. Spet se lahko omejimo na primer, ko je kot, ki ga želimo tretjiniti, oster. Kot φ postavimo tako, da se eden od krakov pokriva z nosilko daljice OA , drugi krak pa seka kvadratrisko v točki $P(x, y)$. Po definiciji kvadratriske je $\varphi = y \cdot \frac{\pi}{2}$. Naj bo $R(0, y)$ pravokotna projekcija točke P na ordinatno os. Daljico OR lahko tretjinimo samo s šestilom in ravnilom, naj bo $R'(0, \frac{y}{3})$. Pravokotnica na OB iz R' seka kvadratrisko v točki $P'(x', \frac{y}{3})$. Ponovno uporabimo definicijo kvadratriske in dobimo

$$\angle P'OA = \frac{y}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\varphi}{3}.$$

Zanimivo je, da v zapuščini grške antične matematike ne najdemo prav nobenega napačnega dokaza o možnosti rešitve katerega od opisanih treh problemov z ravnilom in šestilom. To priča o idealistični naravi starogrških matematikov, ki so skušali strogo slediti Platonovi viziji matematike. Praktične zemljemerske, davčne in celo verske potrebe pa so skozi zgodovino prinesle kar nekaj približnih rešitev. Prispevek končajmo z egipčansko in indijsko aproksimacijo kvadrature kroga.

Naloga številka 50 v Rhindovem papirusu sprašuje po ploščini krožnega polja s premerom 9 khetov.³⁴ Pisar Ahmes je napisal odgovor takole: Odvzemi devetino premera, dobiš 8. Sedaj število 8 pomnoži samo s sabo. Ploščina je 64.

Egipčani še niso poznali simboličnega zapisa in so splošne formule razlagali s primeri. Danes bi egipčansko formulo za ploščino napisali takole:

$$p = \left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2 = \frac{256}{81}r^2.$$

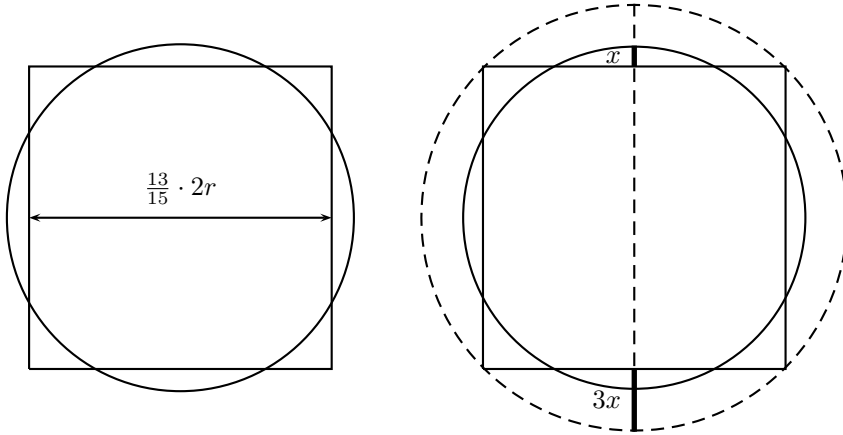
Od tod vidimo, da so za π uporabljali približek $\frac{256}{81} \doteq 3,16$. Stranica kvadrata, ki je ploščinsko enak danemu krogu, pa je približno $a = \frac{16}{9}r$.

Indijsko rešitev najdemo v *Sulbasutrah*, dodatku k indijskim *Vedam*, ki izvirajo iz let med 15. in 5. stoletjem pr. Kr. Vede opisujejo žrtvovalne rituale, ki so bili pomemben del tedanje vere, Sulbasutre pa vsebujejo navodila za konstrukcije oltarjev. Veliko konstrukcij, ki so izvedene z vlečenjem vrvi, je popolnoma korektnih. Zelo navdušujoča je na primer metoda, ki poišče kvadrat, ki je ploščinsko enak danemu pravokotniku.

³²Antifon (konec 5. stoletja pr. Kr.), sofist.

³³O krivulji je ostal le podatek, da je „sestra“ kohloide.

³⁴1 khet = 100 kubitov, 1 kubit = 6 dlani, 1 dlan = 4 prste, 1 prst = 1,88 cm.



Slika 6. Indijska kvadratura kroga.

Njihova metoda za kvadraturu kroga pa ni točna. Za stranico ustreznega kvadrata so vzeli $\frac{13}{15}$ premera danega kroga. To ustreza približku

$$\pi \doteq \frac{676}{225} \doteq 3.$$

V istem delu obravnavajo tudi obraten problem. Krog, ki naj bi bil ploščinsko enak danemu kvadratu, najdejo takole: Najprej kvadratu očrtaj krog. Nato skozi središče kroga potegni pravokotnico na eno od stranic kvadrata. Del pravokotnice zunaj kvadrata in v notranjosti kroga razdeli na tri enake dele. Iskani krog gre čez prvo tretjino, ki je bližja kvadratu, torej

$$r = \frac{1}{3} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} \right) + \frac{a}{2} = \frac{a}{6} (2 + \sqrt{2}).$$

Zanimivo je, da nam konstrukcija tokrat da drugačen približek za

$$\pi \doteq \left(\frac{6}{2+\sqrt{2}} \right)^2 \doteq 3,088.$$

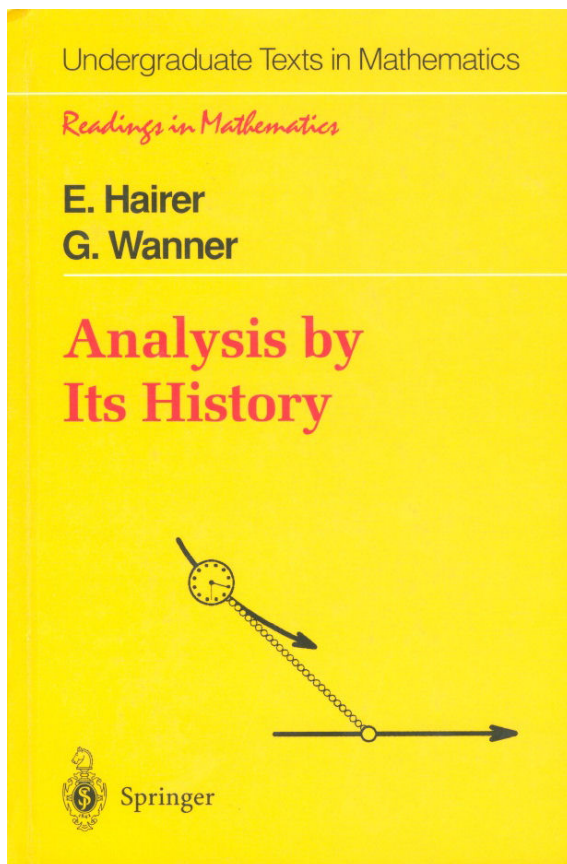
LITERATURA

- [1] J. J. O'Connor in E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*, <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk>
- [2] E. W. Hobson, „*Squaring the circle*“, a history of the problem, Cambridge University Press, 1913.
- [3] L. Houghtalin in S. Sumner, *Lessons for classics from the history of mathematics*, The Classical Journal **104** (2009) 4, 315–362.
- [4] C. A. Huffman, *Archytas of Tarentum: Pythagorean, philosopher and mathematician king*, Cambridge University Press, 2005.
- [5] T. W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1974.
- [6] Stanford encyclopedia of philosophy, *Archytas*, <http://plato.stanford.edu/entries/archytas>

NOVE KNJIGE

E. Hairer, G. Wanner, Analysis by Its History, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995, 374 strani.

Sijajno komponirana knjiga predstavi postopen razvoj idej analize od začetnih pogumnih, a nezadostno dokazanih metod računanja z neskončno majhnimi količinami prek postopnega izčiščevanja pojmov ob pomembnih problemih, primerih in protiprimerih do formulacije njenih načel v strogi obliki in razširitve njenega dometa na probleme z več spremenljivkami. Številni originalni citati in primeri nalog tvorcev analize (Eulerja, Newtona, Bernoullijev itd.) bralcu še dodatno omogočijo globlje vživetje v duha analize, kot ga prinese zgolj premočrtno obvladovanje njenih že izdelanih postopkov.



Knjiga je razdeljena na štiri poglavja. Prvo poglavje z naslovom Uvod v analizo neskončnosti obravnava izvor elementarnih funkcij in pojasni prelomni vpliv, ki ga je imela Descartesova *Geometrija* (1637) na njihovo izračunavanje. Descartesa je navdihnil eden od nerešenih problemov starogrške geometrije, Pappusov problem, ki ga je rešil z vpeljavo koordinatnega sistema, v katerem pa se osi ne sekata pod pravim kotom (kar običajno povežemo s pojmom kartezičnega koordinatnega sistema). Samo idejo prevesti geometrijski problem na sistem enačb, v katerih znane in neznanne količine

označimo s črkami, ki je pri Descartesu doživela poln razcvet, je formuliral že François Viète v delih *In artem analyticam isagoge* (1591) in *Algebra nova* (1600). Nadaljnja prelomna ideja je bila namesto algebraičnih enačb tipa $f(x) = g(x)$ iskati ničle polinoma $y = p(x)$. Avtorja zelo jasno prikažeta zveze med interpolacijskim polinomom, Newtonovo diferenčno shemo, Pascalovim trikotnikom in binomskim izrekom (pri dokazu katerega je Pascal podal enega prvih dokazov z indukcijo) ter posplošenim binomskim izrekom. Predstavitava tudi ključno vlogo, ki jo je odigral Euler pri definiciji in izpeljavi osnovnih formul v zvezi z eksponentno, logaritemsko in trigonometrijskimi funkcijami ter kompleksnimi števili (npr. $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$). Na primeru računanja logaritmov ter iskanja približkov za π spoznamo ogromen napredek, ki so ga prinesle neskončne vrste, neskončni produkti ter verižni ulomki (s pomočjo katerih je bilo mogoče npr. dokazati, da je $\pi/4 = \arctan 1$ iracionalno število). Avtorja posvečata veliko pozornost primerjavi konvergence različnih vrst (npr. Mercatorjeve (1668) za $\ln(1+x)$ in Gregoryjeve (1668) za $\frac{1+x}{1-x}$). Konvergenco različnih vrst nazorno prikažeta tudi s številnimi slikami.

Drugo poglavje, naslovljeno Diferencialni in integralni račun, prikaže nastanek diferencialnega in integralnega računa (ki je precej starejši, saj je računanje ploščin, površin in volumnov zaposlovalo največje matematike od antike dalje – npr. Arhimeda, Keplerja, Cavalierija, Vivianija, Fermata). Predstavljene so osnovne formule v zvezi z odvodom, višjimi odvodi, obravnavan je Fermatov problem o maksimumih in minimumih, Fermatovo načelo lomljenja svetlobe, Taylorjeve vrste, Newtonova metoda iskanja ničel, ovojnice in ukrivljenost krivulj. Poudarjen je prelomen pomen, ki ga je imelo odkritje Newtona, Leibniza in Johanna Bernoullija, ki so neodvisno drug od drugega spoznali, da je integracija *inverzna* operacija od diferenciranje, kar je omogočilo, da se reševanje nalog s tega področja prevede na nekaj preprostih pravil. Avtorja predstavita še uvedbo nove spremenljivke, integracijo po delih, Taylorjevo formulo z ostankom, integracijo racionalnih funkcij in numerične metode računanja integralov. Obravnavo navadnih diferencialnih enačb uvajajo Leibnizeva izohrona, traktrisa (katere iskanje je spodbudil Claude Perrault), Bernoullijeva verižnica, ter brahistohrona. Predstavljena

je tudi Eulerjeva (1768) metoda iskanja rešitev enačb s t. i. Eulerjevimi poligoni ter Euler-MacLaurinova sumacijska formula.

V tretjem poglavju, Temelji klasične analize, je predstavljeno obdobje, ki je sledilo Eulerjevi smrti 1783, ko se je zdelo, da je Euler na 30 000 straneh svojega dela odkril že vse, kar je bilo vrednega odkriti. Novo obdobje, ki je prekinilo to stagnacijo, so napovedale Lagrangeeva „*Theorie des fonctions analytiques*“ (1797), Gaussova disertacija (1799) o „Osnovnem izreku algebre“ ter študij konvergence hipergeometrijske vrste (Gauss 1812). Cauchy je (1821) v svojem slavnem „*Cours de analyse*“ zastavil naslednja vprašanja: Kaj so v resnici odvod, integral, neskončna vrsta? Odgovor na vsa ta vprašanja je bil: limite. In kaj je limita? Število. In kaj je število? Na to vprašanje so odgovorili Weierstrass in sodelavci okrog 1870–1872. Razjasnili so pojme enakomerne konvergence, enakomerne zveznosti ter odvajanja in integriranja neskončnih vrst po členih.

Četrto poglavje, Diferencialni in integralni račun v več spremenljivkah, se začne z obravnavo topologije n -razsežnega prostora, potem pa obravnava večkratne integrale in mnoge pojave, ki pri funkcijah ene spremenljivke sploh ne nastopajo (npr. Jacobijevo (1834) produktno formulo za gama funkcijo). Med drugim srečamo tudi slavno Cantorjevo množico (1883), pa trikotnik in kvadrat Sierpinskega (1915, 1916) in krivuljo Peano-Hilberta (1890, 1891).

Knjiga je vredna branja, saj prikaže znane teme iz analize v zgodovinski perspektivi, z zanimivim prikazom in številnimi izvornimi citati ter netrivialnimi nalogami pa bralca še dodatno motivira za nadaljnji poglobljen študij analize.

Jurij Kovič

VESTI

POROČILO O STROKOVNEM SREČANJU IN 64. OBČNEM ZBORU DMFA SLOVENIJE

Vsakoletno srečanje članov našega društva je letos potekalo 19. in 20. oktobra 2012 v Rimskih Toplicah. Dvodnevni strokovni program je prinesel vrsto zanimivih prispevkov, ki so jih pripravili avtorji z različnih ustanov – med drugimi so na srečanju sodelovali predavatelji z vseh štirih slovenskih



Slika 1. Hotelski kompleks Rimske Terme

univerz. Kljub občutno manjši udeležbi kot še pred nekaj leti in nekaterim zapletom s hotelskimi dvoranami je srečanje potekalo v prijetnem ozračju v čudovitih prostorih in okolici prenovljenega hotelskega kompleksa Rimske Terme.

Predavanja in drugi strokovni prispevki

Ob stoletnici rojstva Alana Turinga, pionirja sodobne teorije algoritmov, smo pripravili niz predavanj z naslovom **Algoritmi in pouk matematike**. V njem smo osvežili znanje, ki bi ga moral imeti o algoritmih vsak učitelj matematike. Uvodno predavanje *Kaj imajo skupnega linearna funkcija, urejanje in hanojski stolpi?* je pripravil Andrej Brodnik, UL FRI in UP FAMNIT, letošnji prejemnik nagrade Republike Slovenije za izjemne dosežke na področju visokega šolstva. Sledila so predavanja *Izvor besede algoritem* (Marko Razpet, UL PeF), *Optimalni vzpon na goro* (Gašper Jaklič, UL FMF in UP IAM), *Kako išče Google?* (Marjeta Kramar, UL FGG), *Polinomski algoritmi za iskanje praštevil* (Miha Vuk, Adacta) in *Evklidov algoritem 2500 let kasneje* (Marjan Jerman, UL FMF). Niz je z odličnim predavanjem *Hilbert, Gödel, Turing: Matematika in algoritmi* vsebinsko zaokrožil Marko Petkovšek, UL FMF, eden mednarodno najuglednejših strokovnjakov za to področje v Sloveniji.

Samostojno eksperimentalno delo dijakov in učencev postavlja pred učitelja fizike vedno znova nove izzive in od njega zahteva sveže ideje. Predavatelji s fakultet in drugi aktivni člani društva so zato predstavili vrsto

zanimivih prispevkov v sklopu z naslovom **Preprosti fizikalni poskusi**, ki ga je vodila Nada Razpet (UL PeF). Prispevki so imeli naslednje naslove: *O napakah v fizikalnih učbenikih* (Janez Strnad, UL FMF), *Razmisli in poskusi – nekaj zgledov iz statike* (Mitja Rosina, UL FMF), *Pot h kvalitativnemu razumevanju fizike s preprostimi poskusi* (Tomaž Kranjc, UL PeF), *Mehurčki za nizke tone* (G. Planinšič, UL FMF), *Uporaba skenerja za preučevanje pojavov, ki so posledica elektronskega zavesnega zaklopa* (Bor Gregorčič, UL FMF), *Preprosti eksperimenti z elastičnimi trki* (Andrej Likar, UL FMF), *Toplotni stroj in skrivnostni skodelici* (Tine Golež, ŠKG Ljubljana), *Poskusi z IR kamero* (R. Repnik, UM PeF in FNM), *Inovativni materiali pri pouku fizike* (Jaka Banko, ZRSS) in *Fizikalni poskus – bo uspel, ne bo uspel?* (Dalibor Šolar, SŠ Jesenice). Predstavljeni prispevki so tudi izhodišče za zimski strokovni seminar iz fizike, ki ga pri DMFA Slovenije načrtujemo 1. in 2. februarja 2013 in bo poleg predavanj omogočal tudi aktivnejše sodelovanje udeležencev v delavnicah.

Ob omenjenih sklopih je bila na srečanju v petek in soboto predstavljena še **vrsta drugih strokovnih prispevkov** s področja matematike (J. Bone, ZRSS: *Poznavanje računskih algoritmov in uporaba žepnega računalnika pri pouku matematike*, D. Felda, UP PeF: *Izkrivljena matematika*, M. Razpet, UL PeF: *Pravilni petkotnik*, N. Razpet, UL PeF: *Geometrijski magični kvadrati*, M. Milanič, UP FAMNIT: *FAMNIT-ovi izleti v matematično veselje in poletni tabor Matematika je kul*), fizike (B. Ketiš, OŠ Šmartno ob Paki: *Naravoslovni dan s fizikalnimi vsebinami*, P. Prelog: *Igrica: ko ure ne kažejo enako*) in astronomije (A. Guštin, ERSŠ Ljubljana: *Kako izkoristiti višek Sončeve aktivnosti za popestritev pouka fizike in astronomije*, B. Kham, GJP Ljubljana: *Ujemi krivuljo sončevega vzhoda, kulminacije in zahoda – PINHOL kamera*, K. Šmigoc: *Obeležje poldnevnikarja srednjeevropskega časa v naselju Vrhtrebnje*). Vzporedno s petkovim strokovnim programom je ves dan potekala tudi *8. konferenca fizikov v osnovnih raziskavah*, svojo bogato ponudbo strokovne literature pa je na stojnici oba dneva predstavljalo tudi *DMFA-založništvo*.

Petkovo popoldne je sklenilo spominsko predavanje Milene Strnad, posvečeno lani preminulemu *Jožetu A. Čibeju*, ki je zapustil izjemen prispevek k poučevanju statistike, verjetnosti in finančne matematike v slovenskih srednjih in visokih šolah. V večernem programu pa sem podpisani predstavil animirani film *Kaos* francoskih avtorjev in mednarodno pobudo *Matematika planeta Zemlja 2013*, ki jo podpirajo organizacije UNESCO, IMU in ICIAM. Med razmišljanjem o možnih aktivnostih našega društva smo se posebej navdušili nad predlogom Tineta Goleža, da bi slovenski dijaki v sodelovanju z dijaki šol z druge zemeljske poloble merili razdaljo do Lune

s pomočjo paralakse. Več o načrtovanih aktivnostih bomo predvidoma do konca koledarskega leta objavili na društveni spletni strani.

Vabljeni znanstveni predavanja

V skladu z dolgoletno tradicijo društvenih srečanj smo v soboto dopoldne poslušali dve vabljeni znanstveni predavanji. Prvega je predstavil *Valerij Romanovskij*, matematik ruskega rodu, ki že dobro desetletje deluje v Sloveniji in je v letu 2011 prejel Zoisovo priznanje Republike Slovenije za pomembne znanstvene dosežke na področju matematike. Raziskovalec, ki dela na Centru za uporabno matematiko in teoretično fiziko (CAMTP) Univerze v Mariboru, nam je v predavanju z naslovom **Nekateri problemi teorije navadnih diferencialnih enačb** med drugimi predstavil problem stabilnosti, Poincaréjev problem centra, problem izohronosti ter 16. Hilbertov problem. Zahtevno vsebino je učinkovito ilustriral s preprostimi modeli realnih pojavov, ki jih lahko opišemo z diferencialnimi enačbami, omenil pa je tudi številne lastne rezultate, na podlagi katerih je skupaj z R. Shafferjem objavil znanstveno monografijo o problemih centra in cikličnosti pri založbi Birkhäuser (2009).



Slika 2. Valerij Romanovskij in Danilo Zavrtanik

Predavanje o eni najzanimivejših nerešenih ugank sodobne fizike z naslovom **Meritve kozmičnih žarkov ekstremnih energij** pa je pripra-

vil *Danilo Zavrtanik*, sicer rektor Univerze v Novi Gorici in raziskovalec na Institutu Jožef Stefan. Kozmični žarki ekstremnih energij so izjemno redki, saj na Zemljo pade le kakšen delec na kvadratni kilometer na stoletje. Dr. Zavrtanik je sodeloval pri nastajanju največjega observatorija za njihovo detekcijo na svetu, katerega atmosferski kalorimeter meri 50 000 kubičnih kilometrov, postavljen pa je v provinci Mendoza v Argentini. V predavanju se je dotaknil razlik pri meritvah v fiziki osnovnih delcev in astrofiziki osnovnih delcev ter predstavil nekaj izbranih rezultatov o spektru kozmičnih žarkov, potencialnih astronomskih izvorih in identifikaciji primarnih delcev. Svoje predavanje je prof. Zavrtanik posvetil akad. prof. dr. Gabrijelu Kernelu, prejemniku Zoisove nagrade Republike Slovenije za življenjsko delo v letu 2011, ki se letošnjega srečanja žal ni mogel udeležiti.

64. občni zbor DMFA Slovenije

Občni zbor DMFA je potekal po tradicionalnem dnevnem redu in se je zares pričel šele z drugim sklicem po odmoru za kavo. Sejo je vodil delovni predsednik Mitja Rosina. Poročila o izvedenih aktivnostih v zadnjem letu so bila zbrana in natisnjena v biltenu, ki so ga udeleženci prejeli že pred tem, zato o njih ni bilo daljše razprave. Za posebej slovesne trenutke sta poskrbela imenovanje novega častnega člana Milana Hladnika in podelitev društvenih priznanj Tinetu Goležu in Lucijani Kračun – Berc, o katerih poročamo v posebnem prispevku.

Občni zbor je v nadaljevanju razrešil dosedanjega predsednika DMFA Slovenije Sandija Klavžarja in za novega predsednika v mandatu november 2012 – november 2014 izvolil Andreja Likarja, rednega profesorja za področje fizike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Hkrati je potrdil tudi predlagano sestavo upravnega odbora, v kateri ni večjih sprememb v primerjavi s prejšnjim mandatom. Omembo pa si na tem mestu zasluži še novica, da je društvo na pobudo članov ustanovilo študentsko sekcijo, ki načrtuje nekaj aktivnosti, namenjenih študentom in dijakom, vodila jo bo Maja Alif, študentka Fakultete za matematiko in fiziko. Upamo, da se bodo tako v delovanje društva aktivneje vključevali študentje zadnjih letnikov matematičnih in fizikalnih smeri z vseh slovenskih univerz.

Okrogla miza o dijaških raziskovalnih nalogah

Strokovno srečanje smo sklenili v soboto popoldne z **okroglo mizo o uva-
janju nadarjenih dijakov v raziskovalno delo**, ki sem jo vodil podpisani. Na njej smo predstavili nekaj uspešnih primerov raziskovalnega dela

dijakov predvsem na področju matematike ter razglabljali o možnih temah in učinkovitih pristopih k tovrstnim aktivnostim tudi na področjih fizike in astronomije. Za uvod v razpravo je David Gajser (IMFM), vodja priprave projektov na letošnjem srednješolskem raziskovalnem taboru MARS, na kratko predstavil način dela in letošnje marsovske projekte. Nato je študent Rok Gregorič predstavil raziskovalno nalogo Parakompleksna analiza, ki jo je izdelal v minulem šolskem letu kot dijak Gimnazije Poljane. Nekdanji dijakinja Gimnazije Bežigrad, zdaj študentki Vesna Iršič in Anja Petković pa sta predstavili svojo nalogo Matematični model sprotnega in kampanjskega učenja. Obe predstavitvi sta navdušili poslušalce – prva s suvereno razlago zahtevnih abstraktnih konceptov in globino matematičnega predznanja mladega avtorja, druga pa z domiselnostjo in izvirnostjo avtoric, ki sta oblikovali lasten matematični model za raziskovanje svojih hipotez.

V nadaljnji razpravi sta svoje misli o mentorstvu v navzočimi delila mentorja ene od predstavljenih nalog, Drago Bokal in Vilko Domajnko, Borut Jurčič Zlobec pa je kot dolgoletni član komisije za ocenjevanje raziskovalnih nalog iz matematike na Srečanjih mladih raziskovalcev Slovenije pri ZOTKS predstavil širši pregled izdelanih nalog in razmišljanja članov tekmovalnih komisij o tem, kaj je kvalitetna raziskovalna naloga iz matematike. Ob koncu okrogle mize so nekaj predlogov raziskovalnih tem predstavili še Jurij Bajc, Gregor Dolinar, Sandi Klavžar, Peter Šemrl ter Dunja Fabjan, ki je predstavila nagradni natečaj Slovenija iz vesolja 2012/13.

Za konec

Evalvacija strokovnega programa sicer še ni končana, več udeležencev pa je ustno posebej pohvalilo nekatera predavanja in okroglo mizo o raziskovalnih nalogah, zato si upam kljub temu zapisati, da je bilo srečanje nasploh zelo uspešno. Kot eden od organizatorjev bi se v imenu organizacijskega odbora še enkrat zahvalil vsem, ki ste se srečanja udeležili, še posebej pa tistim, ki ste sodelovali tudi s strokovnimi prispevki. Potrudili se bomo, da se bo uspešna tradicija srečanj z nekaj osvežitvami programskega koncepta uspešno nadaljevala tudi v prihodnjem letu. Obenem pa se za vso pomoč zahvaljujem sodelavcem, ki so največ pomagali pri organizaciji srečanja, posebej Nadi Razpet, Barbari Rovšek, Janezu Krušiču, Matjažu Željku in Sandiju Klavžarju.

Boštjan Kuzman

**DR. MILAN HLADNIK NOVI ČASTNI ČLAN, MAG. TINE
GOLEŽ IN MAG. LUCIJANA KRAČUN – BERČ NOVA
PREJEMNIKA PRIZNANJ DMFA SLOVENIJE**

Štiriinšestdeseti občni zbor DMFA Slovenije je 20. oktobra 2012 na predlog Upravnega odbora za novega častnega člana DMFA Slovenije imenoval **dr. Milana Hladnika**, izrednega profesorja za matematiko na Fakulteti za matematiko in fiziko UL, „zaradi njegove bogate znanstvene in strokovne dejavnosti, poglobljenega pedagoškega dela, še posebej s študenti in učitelji matematike, in dolgoletnega aktivnega delovanja v DMFA Slovenije“.



Komisija za društvena priznanja pri DMFA Slovenije pa je obravnavala vse pravočasno prispеле predloge in podelila priznanji dvema zelo aktivnima članoma društva. Priznanji DMFA Slovenije za leto 2012 sta tako prejela **mag. Tine Golež**, profesor fizike na Škofijski gimnaziji v Ljubljani, „za njegovo uspešno in ustvarjalno delo z dijaki ter za bogato predavateljsko, avtorsko in uredniško dejavnost, posebej na področju medpredmetnega povezovanja“, in **mag. Lucijana Kračun – Berč**, profesorica matematike na Gimnaziji Lava ŠC Celje, „za njeno uspešno in ustvarjalno delo z dijaki ter za večletno vestno sodelovanje pri organizaciji in izvedbi društvenih strokovnih dejavnosti“.

Daljše utemeljitve vseh treh predlogov so bile objavljene v biltenu Strokovno srečanje in 64. občni zbor DMFA Slovenije, ki so ga prejeli udeleženci srečanja v Rimskih Toplicah. V imenu Upravnega odbora in Komisije za društvena priznanja novemu častnemu članu in obema prejemnikoma priznanj še enkrat čestitam in se jim iskreno zahvaljujem za njihov dosedanj, pa tudi bodoči prispevek k delovanju društva in širše slovenske družbe.

Prof. dr. Sandi Klavžar, predsednik Komisije za društvena priznanja

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 2012

Letnik 59, številka 5

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Neka verižnica (Marko Razpet)	161–169
Atomski interferometer (Janez Strnad)	170–181
Šola	
Reševanje treh velikih starogrških problemov (Marjan Jerman)	182–192
Nove knjige	
E. Hairer, G. Wanner, <i>Analysis by Its History</i> (Jurij Kovič)	193–195
Vesti	
Poročilo o strokovnem srečanju in 64. občnem zboru DMFA Slovenije (Boštjan Kuzman)	195–200
Dr. Milan Hladnik novi častni član, mag. Tine Golež in mag. Lucijana Kračun-Berc nova prejemnika priznanj DMFA Slovenije (Sandi Klavžar)	XIX

CONTENTS

Articles	Pages
A catenary (Marko Razpet)	161–169
Atom interferometer (Janez Strnad)	170–181
School	182–192
New books	193–195
News	195–XIX

Na naslovnici je Michelsonov interferometer, najbolj običajen optični interferometer. Zasnoval ga je Albert A. Michelson. Interferometer sta skupaj z Edwardom Morleyem uporabila pri poskusu, s katerim sta želela izmeriti vpliv hitrosti etra na hitrost svetlobe. Poskus je ovrgel idejo o etru in navdihnil posebno teorijo relativnosti. Interferometer sestavljata dve zrcali in polprepustno zrcalo. Na polprepustnem zrcalu se laserski curek razdeli na dva delna curka, ki potujeta vsak po svojem kraku interferometra, do zrcala, se tam odbijeta in ponovno združita za polprepustnim zrcalom. Tam svetloba iz delnih curkov interferira in na belem zaslonu lahko opazujemo ojačeno ali oslABLJENO svetlobo, odvisno od razlike optičnih poti v krakih interferometra. Foto in besedilo: Aleš Mohorič