IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2012
Letnik 59
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 59 • ŠT. 2 • STR. 41–80 • MAREC 2012

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2012, letnik 59, številka 2, strani 41–80

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Marko Petkovšek (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Peter Legiša, Petar Pavešić, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2011 DMFA Slovenije – 1868 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

---

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

SREDINE SREDIN

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 26D15

Obravnavamo relacije med nekaterimi sredinami vrstic in stolpcev matrik s pozitivnimi realnimi elementi. Uporabimo dobro znano neenakost med aritmetično in geometrično sredino pozitivnih realnih števil.

THE MEANS OF MEANS

We discuss relations between some means related to rows and columns of matrices with positive real entries. We use the well-known inequality between arithmetic and geometric mean of positive real numbers.

Uvod

Neenakosti so v matematiki vsekakor zelo pomembne. Z njimi si pomagamo na primer v analizi, geometriji, aritmetiki, verjetnostnem računu, teoriji števil in v numerični ter računalniški matematiki. Nekatere neenakosti so že dolgo znane, še vedno pa odkrivajo nove. Med najbolj znanimi je trikotniška neenakost, ki jo spoznamo najprej pri realnih, nato pri kompleksnih številih in pri običajnih vektorjih, kasneje pa v metričnih, normiranih in drugih prostorih. Dokazovanje neenakosti poteka različno: včasih z metodo popolne indukcije, včasih direktno z uporabo aksiomatike realnih števil, tu pa tam si pomagamo z že dokazanimi neenakostmi, pogosto pa uporabljamo prijeme z različnih matematičnih področij.

Zelo znana je tudi neenakost med geometrično in aritmetično sredino dveh pozitivnih realnih števil. Aritmetična sredina pozitivnih realnih števil a in b je po definiciji število $A(a,b) = (a+b)/2$, geometrična pa $G(a,b) = \sqrt{ab}$. Brez težav dokažemo, da je vedno $G(a,b) \le A(a,b)$, enačaj v tej relaciji pa velja samo tedaj, ko je $a = b$. Definiciji obeh sredin lahko posplošimo na poljubno, toda končno mnogo pozitivnih realnih števil.

Definicija 1. Aritmetična in geometrična sredina pozitivnih realnih števil $u_1, u_2, \ldots, u_r$ sta števili

$$A(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_r}{r}, \tag{1}$$

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}. \tag{2}$$

Ni pa nič kaj lahko dokazati, da velja znana relacija

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leq A(u_1, u_2, \ldots, u_r) \tag{3}$$

pri poljubnih pozitivnih realnih številih $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Obstaja več načinov, kako dokazati (3), noben od njih pa ni posebno preprost. Pogosto najdemo dokaz v zbirki nalog, na primer v [2], seveda pa tudi v specializiranih knjigah, na primer v [1, 3]. Avtor dela [3] je zbral prek 20 različnih dokazov o njeni veljavnosti. V prispevku ji bomo posvetili malo več pozornosti, ker glavni rezultat navsezadnje sloni ravno na njej. Morda je za šolsko rabo še najpreprostejši tisti dokaz, ki je posledica naslednje leme:

Lema 1. *Če so $x_1, x_2, \ldots, x_n$ poljubna pozitivna realna števila, katerih produkt je enak 1, potem je njihova vsota večja ali enaka n:*

$$x_1 x_2 \cdots x_n = 1 \Longrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Enačaj v tej relaciji pa nastopi natanko tedaj, ko je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Dokaz. Lemo dokažemo z metodo popolne indukcije glede na naravno število n. Za $n = 1$ je trditev očitna. Predpostavimo, da trditvi v lemi držita za n ($n > 1$) kakršnihkoli pozitivnih realnih števil, katerih produkt je 1. Vzemimo poljubna pozitivna števila $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$, za katera je tudi $y_1 y_2 \ldots y_n y_{n+1} = 1$. Pri tem ne morejo biti hkrati vsi faktorji večji od 1, pa tudi ne vsi hkrati manjši od 1, kajti v prvem primeru bi bil produkt večji od 1, v drugem pa manjši od 1. Torej obstaja vsaj en faktor v produktu, ki ne presega 1, in vsaj en faktor, ki je velik vsaj 1. Brez škode za splošnost lahko vzamemo, da je $0 < y_n \leq 1$ in $y_{n+1} \geq 1$.

Potem lahko zapišemo $y_1 y_2 \cdots y_n y_{n+1}$ kot produkt $y_1 y_2 \cdots y_{n-1}(y_n y_{n+1}) = 1$, v katerem je n faktorjev. Po indukcijski predpostavki je zato $y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n y_{n+1} \geq n$, iz česar sledi najprej $y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} \geq n - y_n y_{n+1}$ in nato $y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n + y_{n+1} \geq n - y_n y_{n+1} + y_n + y_{n+1}$. Po preureditvi izraza na desni strani neenačaja dobimo:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n + y_{n+1} \geq (n+1) + (1 - y_n)(y_{n+1} - 1) \geq n + 1.$$

S tem nam je uspelo narediti indukcijski korak. Neenakost v lemi velja za vsak naraven n.

Da pa bo v prejšnji relaciji obveljala enakost $y_1 + y_2 + \ldots + y_n + y_{n+1} = n+1$, mora biti $y_n = 1$ ali $y_{n+1} = 1$. Ne da bi kaj izgubili na splošnosti, lahko vzamemo $y_{n+1} = 1$. Potem je $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = n$ in $y_1 y_2 \ldots y_{n-1} y_n = 1$. Iz indukcijske predpostavke takoj sledi $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$. S tem imamo nazadnje $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = y_{n+1} = 1$. ∎

Sedaj z lahkoto dokažemo neenakost (3), povemo pa tudi lahko, natanko kdaj v njej velja enačaj.

Izrek 2. *Za poljubna pozitivna realna števila* $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *velja relacija*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_r \geq r\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}, \tag{4}$$

v kateri velja enačaj natanko tedaj, ko je $u_1 = u_2 = \ldots = u_r$.

Dokaz. Izrek dokažemo z uporabo leme 1, če vpeljemo:

$$x_1 = \frac{u_1}{\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}},\ x_2 = \frac{u_2}{\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}},\ \ldots,\ x_r = \frac{u_r}{\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}}.$$

Očitno je $x_1 x_2 \ldots x_r = 1$, iz česar sklepamo:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_r}{\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}} \geq r.$$

Iz dobljene relacije pa takoj sledi

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_r \geq r\sqrt[r]{u_1 u_2 \cdots u_r}.$$

Enačaj v (4) velja natanko tedaj, ko je $x_1 = x_2 = \ldots = x_r$, to se pravi, ko je $u_1 = u_2 = \ldots = u_r$. ∎

Definicija 2. Harmonična sredina pozitivnih realnih števil $u_1, u_2, \ldots, u_r$ je število

$$H(u_1, u_2, \ldots, u_r) = (A(u_1^{-1}, u_2^{-1}, \ldots, u_r^{-1}))^{-1}. \tag{5}$$

Vse tri sredine imajo lastnost homogenosti glede na pozitivne faktorje λ:

$$\begin{aligned} A(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_r) &= \lambda A(u_1, u_2, \ldots, u_r), & (6)\\ G(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_r) &= \lambda G(u_1, u_2, \ldots, u_r), & (7)\\ H(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_r) &= \lambda H(u_1, u_2, \ldots, u_r). \end{aligned}$$

Ne glede na število enk v oklepaju je seveda $G(1, 1, \ldots, 1) = 1$. Geometrična sredina ima tudi lastnost multiplikativnosti. Če so namreč števila $u_1, u_2, \ldots, u_r$ in $v_1, v_2, \ldots, v_r$ pozitivna, ni težko dokazati, da veljajo enakosti:

$$\begin{aligned} G(u_1 v_1, u_2 v_2, \ldots, u_r v_r) &= G(u_1, u_2, \ldots, u_r) G(v_1, v_2, \ldots, v_r), & (8)\\ G(u_1/v_1, u_2/v_2, \ldots, u_r/v_r) &= G(u_1, u_2, \ldots, u_r)/G(v_1, v_2, \ldots, v_r), & (9)\\ G(u_1^{-1}, u_2^{-1}, \ldots, u_r^{-1}) &= (G(u_1, u_2, \ldots, u_r))^{-1}. & (10) \end{aligned}$$

Tako kot lahko primerjamo med seboj aritmetično in geometrično sredino istih števil, lahko primerjamo tudi harmonično in geometrično sredino. Vse tri sredine so v relaciji, o kateri govori naslednji izrek:

Izrek 3. *Za poljubna pozitivna realna števila* $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *velja relacija*

$$H(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leq G(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leq A(u_1, u_2, \ldots, u_r) \tag{11}$$

in v njej prevladata enačaja natanko takrat, ko je $u_1 = u_2 = \ldots = u_r$.

Dokaz. Po definiciji harmonične sredine in po (3) je

$$H(u_1, u_2, \ldots, u_r) = (A(u_1^{-1}, u_2^{-1}, \ldots, u_r^{-1}))^{-1} \leq (G(u_1^{-1}, u_2^{-1}, \ldots, u_r^{-1}))^{-1}.$$

Naprej pa je seveda po (10)

$$(G(u_1^{-1}, u_2^{-1}, \ldots, u_r^{-1}))^{-1} = G(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leq A(u_1, u_2, \ldots, u_r).$$

S tem je relacija (11) dokazana. Da pa v njej prevladata enačaja natanko takrat, ko je $u_1 = u_2 = \ldots = u_r$, pa tudi takoj vidimo. ■

V nadaljevanju bomo pokazali, kako lahko obravnavane sredine in njihove lastnosti s pridom uporabimo pri matrikah. Izkazalo se bo, da osrednji izrek, izrek 4, da nekatere zanimive posledice.

Aritmetična, geometrična in harmonična sredina pri matrikah

Matrika, ki ima same pozitivne realne elemente, postane zanimiva, ker lahko zanjo primerjamo sredine po vrsticah in stolpcih ter sredine teh sredin. Da bosta beseda in dokaz laže tekla, je koristno vpeljati za matriko

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

ki ima same pozitivne realne elemente, aritmetične sredine vrstic

$$A_i = A(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

geometrične sredine stolpcev

$$G_j = G(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

ter harmonične sredine vrstic

$$H_i = G(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Sedaj lahko zapišemo glavni izrek v tem prispevku.

Izrek 4. *V poljubni matriki s pozitivnimi realnimi elementi je geometrična sredina aritmetičnih sredin vrstic večja ali enaka aritmetični sredini geometričnih sredin stolpcev:*

$$G(A_1, A_2, \ldots, A_m) \geq A(G_1, G_2, \ldots, G_n). \tag{13}$$

V poljubni matriki s pozitivnimi realnimi elementi je harmonična sredina geometričnih sredin stolpcev večja ali enaka geometrični sredini harmoničnih sredin vrstic:

$$H(G_1, G_2, \ldots, G_n) \geq G(H_1, H_2, \ldots, H_m). \tag{14}$$

Enakost nastopa v (13) in (14) samo tedaj, kadar so si vse vrstice matrike proporcionalne.

Zgornji trditvi ostaneta veljavni, če v njih povsod med seboj zamenjamo besedi vrstica in stolpec.

Dokaz. Najprej zapišimo:

$$1 = \frac{nA_i}{nA_i} = \frac{1}{nA_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{A_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Nato seštejmo, zamenjajmo vrstni red vsot in upoštevajmo (4):

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{A_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{ij}}{A_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} mA(a_{1j}/A_1, a_{2j}/A_2, \ldots, a_{mj}/A_m)$$

$$\geq \frac{m}{n}\sum_{j=1}^{n} G(a_{1j}/A_1, a_{2j}/A_2, \ldots, a_{mj}/A_m).$$

Po krajšanju z m in po lastnosti (9) imamo:

$$1 \geq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{G(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})}{G(A_1, A_2, \ldots, A_m)} = \frac{1}{G(A_1, A_2, \ldots, A_m)} \cdot \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} G_j.$$

Iz zgornje relacije pa že lahko razberemo:

$$G(A_1, A_2, \ldots, A_m) \geq A(G_1, G_2, \ldots, G_n).$$

Kdaj v pravkar dokazani relaciji velja enačaj? Iz izpeljave vidimo, da natanko tedaj, ko je

$$\frac{a_{1j}}{A_1} = \frac{a_{2j}}{A_2} = \ldots = \frac{a_{mj}}{A_m} = \lambda_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Pri tem so $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pozitivna realna števila. Za poljubna indeksa $i, k = 1, 2, \ldots, m$ je

$$\frac{a_{ij}}{a_{kj}} = \frac{A_i \lambda_j}{A_k \lambda_j} = \frac{A_i}{A_k} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

kar pomeni, da sta si i-ta in k-ta vrstica matrike $\mathcal{A}$ proporcionalni. Vsaka vrstica je torej proporcionalna vsaki drugi.

Ni težko dokazati, da velja tudi obratno, v relaciji velja enačaj, če so si vrstice matrike $\mathcal{A}$ proporcionalne. Vzemimo, brez škode za splošnost, da so proporcionalne kar prvi vrstici:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) = (\mu_i a_{11}, \mu_i a_{12}, \ldots, \mu_i a_{1n}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Pri tem so $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ pozitivna realna števila in $\mu_1 = 1$. Tedaj imamo

$$A_i = \mu_i A_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

in zato za vse indekse i in j velja:

$$\frac{a_{ij}}{A_i} = \frac{\mu_i a_{1j}}{\mu_i A_1} = \frac{a_{1j}}{A_1} = \lambda_j.$$

Vsi kvocienti a_{ij}/A_i so torej neodvisni od i. Že prej pa smo zapisali, da je to tudi zadosten pogoj za to, da velja enakost

$$A(G_1, G_2, \ldots, G_n) = G(A_1, A_2, \ldots, A_m).$$

Relacija (13) je s tem dokazana.

Če ima matrika $\mathcal{A}$ same pozitivne realne elemente, ima tudi matrika

$$\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & \ldots & a_{1n}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & \ldots & a_{2n}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^{-1} & a_{m2}^{-1} & \ldots & a_{mn}^{-1} \end{bmatrix} \tag{15}$$

same pozitivne realne elemente.

Za matriko $\mathcal{A}'$ vpeljimo aritmetične sredine vrstic

$$A'_i = A(a_{i1}^{-1}, a_{i2}^{-1}, \ldots, a_{in}^{-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

in geometrične sredine stolpcev

$$G'_j = G(a_{1j}^{-1}, a_{2j}^{-1}, \ldots, a_{mj}^{-1}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Iz relacij

$$G(A'_1, A'_2, \ldots, A'_m) \geq A(G'_1, G'_2, \ldots, G'_n),\ A'_i = H_i^{-1},\ G'_j = G_j^{-1}$$

dokažemo z uporabo lastnosti (10) in definicij:

$$(G(H_1, H_2, \ldots, H_m))^{-1} = G(H_1^{-1}, H_2^{-1}, \ldots, H_m^{-1}) = G(A'_1, A'_2, \ldots, A'_m)$$
$$\geq A(G'_1, G'_2, \ldots, G'_n) = A(G_1^{-1}, G_2^{-1}, \ldots, G_n^{-1}) = (H(G_1, G_2, \ldots, G_n))^{-1}.$$

Nazadnje je pred nami relacija

$$G(H_1, H_2, \ldots, H_m) \leq H(G_1, G_2, \ldots, G_n),$$

ki smo jo želeli dokazati.

Vemo že, da velja

$$G(A'_1, A'_2, \ldots, A'_m) = A(G'_1, G'_2, \ldots, G'_n)$$

natanko tedaj, ko so si vse vrstice matrike $\mathcal{A}'$ proporcionalne. To pa je natanko tedaj, ko so si vse vrstice matrike $\mathcal{A}$ proporcionalne. Torej tudi v relaciji (14) velja enačaj natanko tedaj, ko so si vrstice matrike $\mathcal{A}$ proporcionalne. ■

Primeri

1. Naj bo
$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ b_1^2 & b_2^2 & \ldots & b_n^2 \end{bmatrix}, \tag{16}$$
pri čemer so $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitivna realna števila. Geometrične sredine stolpcev so $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n$, aritmetični sredini vrstic pa $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)/n$ in $(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)/n$. Zato velja po (13) neenakost
$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \cdot \frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n}},$$

iz česar sledi Cauchy-Schwarzeva neenakost:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

V njej velja enačaj natanko tedaj, ko je $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \ldots = a_n/b_n$.

Če vzamemo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, dobimo po preureditvi neenakost

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}},$$

kar je znana relacija med aritmetično in kvadratno sredino. V njej velja enačaj natanko tedaj, ko je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Oglejmo si še

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

pri čemer so $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivna realna števila. V matriki od vrstice do vrstice elemente ciklično zamaknemo.

Geometrične sredine vseh stolpcev so $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$, aritmetične sredine vseh vrstic pa $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$. Zato velja zaradi (13) znana relacija

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

V njej velja enačaj natanko tedaj, ko obstaja tako pozitivno realno število λ, za katero je

$$a_2 = \lambda a_1, a_3 = \lambda a_2, \ldots, a_n = \lambda a_{n-1}, a_1 = \lambda a_n.$$

Ko zmnožimo leve in desne strani vseh zgornjih enakosti, dobimo najprej $a_1a_2\ldots a_n = \lambda^n a_1a_2\ldots a_n$, po krajšanju pa $\lambda^n = 1$ in s tem $\lambda = 1$. Zato je nazadnje res tisto, kar smo pričakovali: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. S tem smo po ovinku v celoti še enkrat dokazali neenakost (3).

3. Naj bo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}, \tag{18}$$

pri čemer so $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivna realna števila. Aritmetične sredine stolpcev so $(1+a_1)/2, (1+a_2)/2, \ldots, (1+a_n)/2$, geometrični sredini vrstic pa 1 in $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Zato velja znana neenakost

$$1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

V njej velja enačaj natanko tedaj, ko je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Podobna naloga je podana in rešena v [2].

4. Naj bo sedaj n naravno število in

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a^n & 1 & \ldots & 1 \\ b^n & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

pri čemer sta a in b pozitivni realni števili. V stolpcih od vključno drugega do n-tega so same enke. Aritmetične sredine stolpcev so $(a^n + b^n)/2$ in $n-1$ enk, geometrični sredini vrstic pa a in b. Zato velja

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}},$$

iz česar sledi znana neenakost

$$(A(a,b))^n \leq A(a^n, b^n).$$

V njej velja enačaj natanko tedaj, ko je $a = b$. Dobljena neenakost izraža, če drugega ne, konveksnost funkcije $x \mapsto x^n$ na pozitivnem poltraku realne osi za naravne eksponente n.

5. Če sta m in n naravni števili ter $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pozitivna realna števila, lahko podobno kot v prejšnjem primeru najdemo neenakost

$$(A(a_1, a_2, \ldots, a_m))^n \leq A(a_1^n, a_2^n, \ldots, a_m^n).$$

Enačaj velja le, če je $a_1 = a_2 = \ldots = a_m$.

Zahvala

Zahvaljujem se prof. dr. Tomažu Pisanskemu, ki mi je dal idejo za neenakost s harmoničnimi sredinami in za prevedbo neenakosti (13) in (14) v matrični jezik.

LITERATURA

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood in G. Pólya, *Inequalities*, Academic Press, Cambridge, 1952.

[2] V. A. Krečmar, *Zadačnik po algebre*, Fizmatgiz, Moskva, 1961.

[3] D. S. Mitrinović, *Elementary inequalities*, P. Noordhoff, Groningen, 1964.

KUBIČNE KRIVULJE TRIKOTNIKA

TANJA VEBER

I. gimnazija v Celju

Math. Subj. Class. (2010): 51N20; 51M04; 14H45; 51N35

Članek obravnava kubične krivulje trikotnika. To so krivulje tretjega reda, ki potekajo skozi vsa tri oglišča trikotnika, središča včrtane ter pričrtanih krožnic. Nekatere premice v ravnini določajo družino kubičnih krivulj trikotnika, med njimi je najbolj znana Eulerjeva premica, ki določa družino kubičnih krivulj, imenovano Eulerjev snop kubičnih krivulj trikotnika.

CUBIC CURVES OF A TRIANGLE

This article investigates cubic curves of a triangle. These are curves of the third degree, which pass through the vertices of the triangle and through the incenter and the excenters of the triangle. Some lines in the plane determine a family of cubic curves, the most famous one is the Euler line, which determines the family of cubic curves, called the Euler pencil of cubic curves of the triangle.

Uvod

Prvi odmevnejši rezultati iz geometrije trikotnika, matematičnega področja, ki obravnava značilne točke trikotnika, njihove posebnosti in povezave, segajo v 18. stoletje. Iz tega časa izhajata izrek o Eulerjevi premici trikotnika in izrek o Simsonovih premicah. Največji razmah je geometrija trikotnika doživela v 19. stoletju, ko so bili dokazani novi izreki o tem, da določene točke trikotnika vedno ležijo na isti premici oziroma isti krožnici. Iz tega časa izvirajo nekatere znamenite krožnice trikotnika, kot so Feuerbachova, Spiekerjeva in Fuhrmannova krožnica, ter nekatere nove značilne premice trikotnika, na primer Brocardova os in Lemoineova premica. Nekaj dodatnega zagona je to področje dobilo z Möbiusovo uvedbo homogenih koordinat, ki so olajšale analitičnogeometrijski pristop k obravnavani tematiki. V dvajsetem stoletju pa je bilo to področje za dalj časa potisnjeno na stranski tir.

V zadnjem obdobju je geometrijo trikotnika moč ponovno v večji meri zaslediti v literaturi, kar je posledica razvoja računalniških orodij za dinamično geometrijo, ki nam omogočajo več matematičnega eksperimentiranja in s tem olajšajo postavljanje novih hipotez. Veliko zaslug na tem področju prav gotovo lahko pripišemo Clarku Kimberlingu, ki je v svoji knjigi [3] navedel seznam 360 značilnih točk trikotnika, seznam premic, na katerih ležijo vsaj tri od njih ter seznam krožnic, na katerih ležijo vsaj štiri od njih. Še več značilnih točk, že prek 3600, pa najdemo na Kimberlingovi spletni strani [10]. Kimberlingovo delo je geometrijo trikotnika po eni strani zaokrožilo, po drugi strani pa se odpirajo vedno nova vprašanja pri obravnavi stožnic, splošnih krivulj drugega reda, pa tudi posplošitve, povezave in obravnave krivulj tretjega reda ter krivulj višjih stopenj. V tem članku bomo spoznali nekaj zanimivosti o kubičnih krivuljah trikotnika. Pri njihovi obravnavi nam bodo delo olajšala nekatera dejstva, ki jih bomo predstavili v naslednjih dveh razdelkih.

Trilinearne koordinate

Naj bo ABC poljuben trikotnik v ravnini z oglišči A, B, C in stranicami a, b, c, pri čemer oglišče A leži nasproti stranice a, oglišče B nasproti stranice b in oglišče C nasproti stranice c. Naj bo P poljubna točka v ravnini. Evklidske razdalje točke P do nosilk stranic a, b, c označimo z $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Tem razdaljam dodamo predznake (in dobimo novo trojico števil $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) na naslednji način. Nosilka stranice trikotnika razdeli ravnino trikotnika na dve polravnini. Polravnino, ki vsebuje tretje oglišče trikotnika, imenujemo *pozitivni breg* trikotnika glede na dano nosilko, drugo polravnino pa *negativni breg*. Če točka P leži na negativnem bregu trikotnika glede na nosilko stranice a, potem ima α_1 negativni predznak, torej $\alpha_1 = -\alpha_0$, če pa leži na pozitivnem bregu trikotnika glede na nosilko stranice a, pa je $\alpha_1 = \alpha_0$. Analogno velja glede predznakov števil β_1 in γ_1. Trojica realnih števil $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ natanko določa točko v ravnini in jo imenujemo *dejanske trilinearne razdalje* točke P. Za določitev točke bi bili dovolj samo dve trilinearni razdalji. S pomočjo vpeljanih dejanskih trilinearnih razdalj lahko definiramo homogene trilinearne koordinate točke P.

Definicija 1. *Homogene trilinearne koordinate* točke P so vsaka trojica realnih števil α, β, γ, ki zadoščajo pogojem $\alpha_1 = k\alpha,\ \beta_1 = k\beta,\ \gamma_1 = k\gamma$, kjer so $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$ dejanske trilinearne razdalje točke P, k pa neničelno realno število.

V nadaljevanju bomo homogene trilinearne koordinate imenovali kar trilinearne koordinate. Trilinearne koordinate točke P označujemo $P = \alpha : \beta : \gamma$. Kadar imamo opravka z danim trikotnikom v ravnini, vpeljemo trilinearne koordinate, saj se v teh koordinatah zapis nekaterih značilnih točk trikotnika in nekaterih premic precej poenostavi. Trilinearne koordinate oglišč trikotnika so

$$A = 1 : 0 : 0,\ B = 0 : 1 : 0,\ C = 0 : 0 : 1,$$

enačbe nosilk stranic trikotnika so

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,$$

prav tako imajo poenostavljen zapis enačbe simetral notranjih in zunanjih kotov trikotnika

$$\alpha = \beta,\ \beta = \gamma,\ \gamma = \alpha \quad \text{ter}$$

$$\alpha = -\beta,\ \beta = -\gamma,\ \gamma = -\alpha.$$

Izberimo točko P znotraj trikotnika s stranicami a, b, c in naj bodo $P(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ njene dejanske trilinearne razdalje. V tem primeru ni težko premisliti, da je $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 2S$, kjer je S ploščina trikotnika ABC. Enako velja za druge točke v ravnini. Zato je za poljubne trilinearne koordinate $P = \alpha : \beta : \gamma$ poljubne točke v evklidski ravnini izraz $a\alpha + b\beta + c\gamma$ enak nekemu večkratniku ploščine in je zato različen od 0.

Včasih je dobro, da evklidsko ravnino vložimo v projektivno ravnino in se tako izognemo težavam, ki nastanejo, kadar se v ravnini dve (vzporedni) premici ne sekata. Projektivna ravnina ima tako poleg običajnih točk še za eno premico dodatnih točk, ki jim rečemo *točke v neskončnosti*, premici pa *premica v neskončnosti*. Na njej ležijo presečišča vzporednih premic. Običajni model projektivne ravnine dobimo, če za „točke“ vzamemo premice v prostoru skozi koordinatno izhodišče, „premica“ skozi dve taki točki pa je ravnina, ki jo določata tema dvema točkama pripadajoči sekajoči se premici. V tako konstruirani ravnini se poljubni dve premici (ravnini skozi izhodišče) sekata. S pomočjo trilinearnih koordinat točke evklidske ravnine zlahka vložimo v tovrstno projektivno ravnino. Točki $P = \alpha : \beta : \gamma$ namreč priredimo premico v prostoru skozi koordinatno izhodišče in s smernim vektorjem (α, β, γ). Preslikava je dobro definirana, saj različni zapisi iste točke določajo isto premico. Izkaže se, da se točke s premice skozi dve dani točki preslikajo v premice na ravnini skozi izhodišče, ki jo določata premici, ki sta sliki začetnih dveh točk. Ravnine v prostoru skozi koordinatno izhodišče imajo enačbo oblike $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ za realne vrednosti l, m, n. To pomeni, da točke s premice skozi dve točki zadoščajo taki enačbi, kar pomeni, da je $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ enačba premice v trilinearnih koordinatah. Ker smo že videli, da enakosti $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ ne zadošča nobena točka v evklidski ravnini, po drugi strani pa je to premica v projektivni ravnini, sledi, da je to ravno prej omenjena premica v neskončnosti. Če presečišče dveh premic projektivne ravnine leži na tej premici, to dejansko pomeni, da sta ustrezni premici v evklidski ravnini vzporedni.

Na podlagi lastnosti projektivnih koordinat s pomočjo preprostih geometrijskih razmislekov (in izračunov) pokažemo, da veljajo naslednje povezave med točkami in premicami, podanimi s trilinearnimi koordinatami. Na primer, presečišče dveh premic ustreza smernemu vektorju, ki je vektorski produkt normal dveh ravnin.

Trditev 1. *Premici z enačbama* $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ *in* $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$ *se sekata v točki* $(mn' - m'n) : (nl' - n'l) : (lm' - l'm)$.

TOČKA	DEJANSKE RAZDALJE / TRILINEARNE KOORDINATE
A,B,C	$(v_a, 0, 0)$, $(0, v_b, 0)$, $(0, 0, v_c)$
	$1 : 0 : 0$, $0 : 1 : 0$, $0 : 0 : 1$
I	(r, r, r)
	$1 : 1 : 1$
O	$(R\cos A, R\cos B, R\cos C)$
	$\cos A : \cos B : \cos C$
I_A, I_B, I_C	$(-r_a, r_a, r_a)$, $(r_b, -r_b, r_b)$,$(r_c, r_c, -r_c)$
	$-1 : 1 : 1$, $1 : -1 : 1$, $1 : 1 : -1$
V	$(2R\cos B\cos C, 2R\cos C\cos A, 2R\cos A\cos B)$
	$\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}$
F	$\left(\frac{R}{2}\cos(B-C),\ \frac{R}{2}\cos(C-A), \frac{R}{2}\cos(A-B)\right)$
	$\cos(B-C) : \cos(C-A) : \cos(A-B)$
T	$\left(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}, \frac{2S}{3c}\right)$
	$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ oz. $\frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}$

Trditev 2. *Premice z enačbami $l_1\alpha+m_1\beta+n_1\gamma=0$, $l_2\alpha+m_2\beta+n_2\gamma=0$ in $l_3\alpha+m_3\beta+n_3\gamma=0$ so konkurentne (se sekajo v skupni točki) natanko tedaj, ko velja*

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Trditev 3. *Naj bosta $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ in $\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$ dve različni točki. Enačbo premice, ki poteka skozi ti dve točki, dobimo z determinanto*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Prav tako pridemo s preprostimi, a daljšimi izračuni do trilinearnih koordinat nekaterih značilnih točk trikotnika. V tabeli so navedene trilinearne koordinate oglišč trikotnika, središča I trikotniku včrtane krožnice, središč I_A, I_B, I_C trikotniku pričrtanih krožnic, središča O trikotniku očrtane krožnice, središča F krožnice devetih točk ter višinske točke V in težišča trikotnika T. V nadaljevanju bomo oglišča in notranje kote trikotnika s stranicami a, b, c označevali z A, B, C. Iz teksta pa bo razvidno, na kaj se v tistem delu nanaša oznaka.

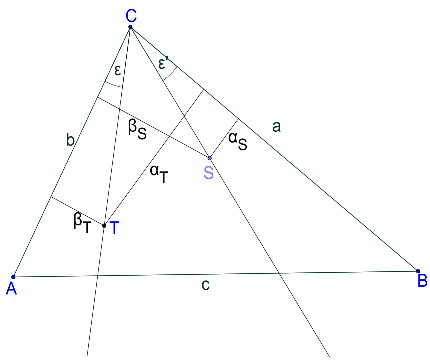
Izogonalna transformacija ravnine

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednjo trditev:

Trditev 4. *Premici* $l\alpha - m\beta = 0$ *in* $m\alpha - l\beta = 0$ *sta simetrični glede na simetralo kota* C.

Dokaz. Na premicah z enačbama $l\alpha - m\beta = 0$ oziroma $m\alpha - l\beta = 0$ izberimo točki $T = \alpha_T : \beta_T : \gamma_T$ oziroma $S = \alpha_S : \beta_S : \gamma_S$ tako, da bosta usmerjena kota $\epsilon = \angle ACT$ in $\epsilon' = \angle SCB$ ostra kota. Velja $l\alpha_T - m\beta_T = 0$ in $m\alpha_S - l\beta_S = 0$. Iz prve enačbe dobimo, da je $\frac{\alpha_T}{\beta_T} = \frac{m}{l}$, iz druge enačbe pa $\frac{\beta_S}{\alpha_S} = \frac{m}{l}$. S pomočjo spodnje slike lahko zapišemo

$$\sin\epsilon = \frac{\beta_T}{|CT|}, \quad \sin(C-\epsilon) = \frac{\alpha_T}{|CT|}, \quad \sin\epsilon' = \frac{\alpha_S}{|CS|}, \quad \sin(C-\epsilon') = \frac{\beta_S}{|CS|}.$$



S preoblikovanjem zgornjih enakosti dobimo naslednje:

$$\frac{\beta_T}{\alpha_T} = \frac{\sin\epsilon}{\sin(C-\epsilon)} = \frac{l}{m} = \frac{\alpha_S}{\beta_S} = \frac{\sin\epsilon'}{\sin(C-\epsilon')}.$$

Od tod sledi, da je

$$\sin\epsilon \cdot \sin(C-\epsilon') = \sin\epsilon' \cdot \sin(C-\epsilon).$$

Nato uporabimo adicijski izrek za sinus razlike in v nekaj korakih dobimo

$$\tan\epsilon = \tan\epsilon'.$$

To pa pomeni, da je $\epsilon = \epsilon'$. S tem smo dokazali, da sta premici skozi oglišče C in točko T oziroma S simetrični glede na simetralo kota C. ■

Prav tako velja, da sta premici z enačbama $m\beta - n\gamma = 0$ in $n\beta - m\gamma = 0$ simetrični glede na simetralo kota A ter premici $n\gamma - l\alpha = 0$ in $l\gamma - n\alpha = 0$ simetrični glede na simetralo kota B.

Imejmo dan $\triangle ABC$ in točko P, ki leži v ravnini danega trikotnika. Premico AP prezrcalimo preko simetrale kota A, premico BP preko simetrale kota B ter CP preko simetrale kota C. Pokažimo, da so tako dobljene premice iz treh konkurentnih premic s presečiščem P spet konkurentne.

Naj bo točka $P = l : m : n$ presečišče premic AP, BP in CP. Enačbe premic skozi pare danih točk so po vrsti:

$$n\beta - m\gamma = 0,\ l\gamma - n\alpha = 0,\ m\alpha - l\beta = 0.$$

Po trditvi 4 so enačbe simetričnih premic k danim premicam:

$$m\beta - n\gamma = 0,\ n\gamma - l\alpha = 0,\ l\alpha - m\beta = 0.$$

Determinanta

$$\begin{vmatrix} 0 & m & -n \\ -l & 0 & n \\ l & -m & 0 \end{vmatrix}$$

ima vrednost 0, zato so tudi te premice konkurentne.

To dejstvo je osnova, na podlagi katere bomo definirali izogonalno transformacijo ravnine.

Definicija 2. Naj bo P točka v ravnini trikotnika ABC, ki ne leži na nobeni izmed nosilk stranic trikotnika. Premico AP prezrcalimo preko simetrale notranjega kota pri oglišču A, premici BP ter CP pa ustrezno preko simetral notranjih kotov pri ogliščih B in C. Točko, v kateri se sekajo vse tri prezrcaljene premice, imenujemo *izogonalna konjugiranka točke* P in jo označujemo s P'. Preslikavo, ki vsaki točki P priredi izogonalno konjugiranko, pa imenujemo *izogonalna transformacija ravnine.*

V definiciji izogonalne transformacije izločimo točke, ki ležijo na nosilkah stranic trikotnika. Poglejmo si, zakaj. Če je točka P eno od oglišč trikotnika, denimo $P = A$, potem premica PA sploh ni določena, preostali premici PB in PC pa se obe preslikata v nosilko stranice BC. V tem primeru torej nimamo kandidata za točko P'. Če točka P leži na nosilki katerekoli stranice trikotnika, bi se z izogonalno transformacijo preslikala v nasprotno oglišče trikotnika. S tem bi izgubili injektivnost izogonalne transformacije. Zato izogonalno transformacijo obravnavamo kot preslikavo ravnine brez nosilk trikotnika. Nekatere lastnosti izogonalne transformacije so precej očitne.

1. Izogonalna transformacija je involucija: izogonalna konjugiranka izogonalne konjugiranke je prvotna točka. Kvadrat izogonalne transformacije je identiteta. Torej je $(P')' = P$.

2. Če točka P leži na katerikoli izmed simetral notranjih kotov trikotnika, leži na tej simetrali tudi njena izogonalna konjugiranka, saj se simetrala, preko katere zrcalimo, pri zrcaljenju ohranja. To pomeni, da se ohranja presečišče simetral notranjih kotov, to pa je središče trikotniku včrtane krožnice; $I' = I$.

3. Prav tako se z izogonalno transformacijo ohranjajo simetrale zunanjih kotov, saj je kot med simetralama zunanjega in notranjega kota pravi kot. Od tod vidimo, da se ohranjajo tudi središča pričrtanih krožnic.

Naslednji izrek podaja trilinearne koordinate izogonalne konjugiranke k dani točki.

Izrek 5. *Naj bo $P = \alpha : \beta : \gamma$ točka v ravnini trikotnika ABC, ki ne leži na nobeni izmed nosilk stranic trikotnika. Njena izogonalna konjugiranka je*

$$P' = \alpha^{-1} : \beta^{-1} : \gamma^{-1}.$$

Zato namesto P' pogosto pišemo kar P^{-1}.

Dokaz. Naj bo P točka s trilinearnimi koordinatami $l : m : n$, ki ne leži na nobeni izmed nosilk stranic trikotnika. V tem primeru so vsa tri realna števila l, m in n različna od 0. Enačbe premic AP, BP, CP se glasijo:

$$n\beta - m\gamma = 0,\ l\gamma - n\alpha = 0,\ m\alpha - l\beta = 0.$$

Te premice se z zrcaljenjem preko simetral notranjih kotov trikotnika preslikajo v premice, katerih enačbe so navedene pred definicijo 2, kjer smo tudi dokazali, da so konkurentne. Presečišče teh premic je (po trditvi 1) izogonalna konjugiranka točke P s trilinearnimi koordinatami

$$P' = mn : ln : ml = l^{-1} : m^{-1} : n^{-1}.$$

■

Omenili smo že, da se središča trikotniku včrtane in pričrtanih krožnic z izogonalno transformacijo ohranjajo, hitro pa se o tem lahko prepričamo, če si pogledamo trilinearne koordinate teh točk. $I = 1 : 1 : 1 = I^{-1}$, $I_A = -1 : 1 : 1 = I_A^{-1}$, $I_B = 1 : -1 : 1 = I_B^{-1}$ in $I_C = 1 : 1 : -1 = I_C^{-1}$.

Če se vprašamo, kdaj je točka enaka svoji izogonalni kojugiranki, dobimo $(a, b, c) = \left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}, \frac{k}{c}\right)$, kar pomeni, da je $a^2 = b^2 = c^2 = k$. V trilinearnih koordinatah to pomeni $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $c = \pm 1$ in (primerjajte tabelo) vidimo, da velja naslednji izrek.

Posledica 6. *Središča danemu trikotniku včrtane in pričrtanih krožnic so edine točke, ki se z izogonalno transformacijo ohranjajo.*

Iz tabele, kjer imamo podane trilinearne koordinate značilnih točk trikotnika, lahko razberemo še en par izogonalnih konjugirank, to sta središče trikotniku očrtane krožnice $O = \cos A : \cos B : \cos C$ in višinska točka $V = \cos^{-1} A : \cos^{-1} B : \cos^{-1} C$.

V teh dveh razdelkih smo si na kratko ogledali trilinearne koordinate in izogonalno transformacijo ravnine, kar bomo potrebovali pri opisovanju kubičnih krivulj. Vsi radovedni bralci, ki sta jim ti dve poglavji vzbudili toliko zanimanja, da bi želeli podrobneje raziskati omenjeni področji, lahko več najdejo na spletni strani [9].

Kubične krivulje trikotnika

V tem razdelku si bomo najprej pogledali definicijo kubične krivulje trikotnika.

Definicija 3. *Kubična krivulja trikotnika s tečajem F, Γ_F,* je množica točk, ki so kolinearne s svojo konjugiranko in tečajem kubične krivulje;

$$\Gamma_F = \{P; P, P^{-1}, F \ \text{ so kolinearne}\}.$$

V naslednjem izreku bomo upravičili tako definirano ime množice Γ_F.

Izrek 7. *Množica točk Γ_F je kubična krivulja, ki poteka skozi središča trikotniku včrtane in pričrtanih krožnic, tečaj F in točko F^{-1}.*

Dokaz. Naj bo $F = f_1 : f_2 : f_3$ fiksna točka (tečaj krivulje Γ_F). Točka $P = \alpha : \beta : \gamma$ naj bo poljubna točka na krivulji Γ_F. Vemo, da je njena izogonalna konjugiranka točka $P^{-1} = \beta\gamma : \gamma\alpha : \alpha\beta$. Če naj bodo točke F, P, P^{-1} kolinearne, mora veljati:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Od tod sledi, da je:

$$f_1\alpha(\beta^2-\gamma^2)+f_2\beta(\gamma^2-\alpha^2)+f_3\gamma(\alpha^2-\beta^2)=0. \tag{i}$$

Dobili smo enačbo množice Γ_F v trilinearnih koordinatah, ki je tretje stopnje. Kot smo že omenili, bi enačbo lahko izrazili tudi v kartezičnih koordinatah in bi bila prav tako tretje stopnje. Ker se po posledici 2 točke I, I_A, I_B, I_C z izogonalno transformacijo ohranjajo, zagotovo ležijo na kubični krivulji. Prav tako neposredno iz definicije kubične krivulje sledi, da na tej krivulji ležita tudi točki F in F^{-1}. ■

Strogo gledano se množica Γ_F in krivulja z enačbo (i) ne ujemata povsem. Razlikujeta se namreč v presečiščih slednje z nosilkami stranic trikotnika. V teh točkah izogonalna transformacija ni definirana in zato te ne ustrezajo definiciji množice Γ_F. Vendar pa običajno zaradi preprostosti z izrazom kubična krivulja trikotnika preprosto razumemo celo krivuljo z enačbo (i). Upoštevaje ta dogovor, na kubični krivulji trikotnika očitno ležijo tudi vsa tri oglišča trikotnika ABC.

Iz definicije kubične krivulje trikotnika pa sledi naslednji izrek:

Izrek 8. *Če točka P leži na krivulji Γ_F, potem na njej leži tudi njena izogonalna konjugiranka. Pravimo, da je Γ_F izogonalno simetrična.*

Ni težko premisliti, čemu je enaka kubična krivulja trikotnika, če za tečaj vzamemo oglišče trikotnika. Na podlagi enačbe (i) vidimo, da gre za unijo treh premic: nosilke stranice, ki leži nasproti izbranega oglišča, ter simetral notranjega in zunanjega kota trikotnika ob izbranem oglišču. Podobno vidimo, da dobimo tri premice tudi v primeru, če za tečaj vzamemo središče včrtane ali eno od središč pričrtanih krožnic. Zato se dogovorimo, da kubično krivuljo trikotnika Γ_F, kjer je $F \in \{A, B, C, I, I_A, I_B, I_C\}$, imenujemo *trivialna kubična krivulja trikotnika*. Prav tako se dogovorimo, da bomo kubično krivuljo trikotnika imenovali *degenerirana kubična krivulja trikotnika*, če jo bomo lahko zapisali kot unijo krivulj prvega in drugega reda ali kot unijo treh krivulj prvega reda. Trivialne kubične krivulje spadajo torej med degenerirane kubične krivulje trikotnika. Ali velja tudi obratno? Ne, izkaže se, da velja naslednji izrek, ki ga tu le navajamo. Dokaz izreka najdete v [7].

Izrek 9. *Kubična krivulja trikotnika s tečajem F je degenerirana natanko takrat, ko F leži na katerikoli izmed simetral notranjih ali zunanjih kotov danega trikotnika.*

V nadaljevanju pa bomo omenili snope kubičnih krivulj trikotnika.

Definicija 4. Naj bosta P in P^{-1} izogonalni konjugiranki v ravnini danega trikotnika, pri čemer $P \neq P^{-1}$, in p premica skozi točki P in P^{-1}. Potem družino

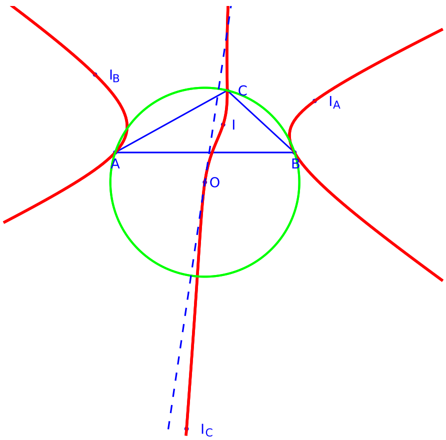
$$\{\Gamma_F, F \in p\}$$

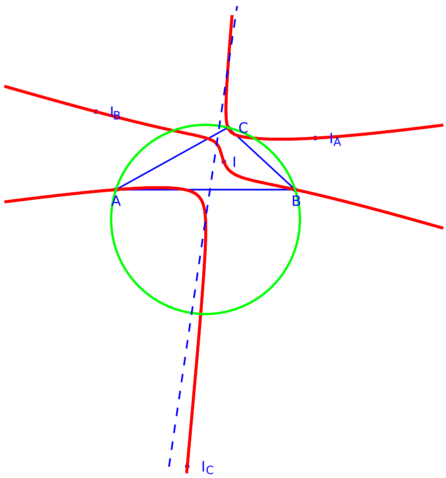
imenujemo *snop kubičnih krivulj* trikotnika, pripadajoč paru konjugirank P in P^{-1}.

Iz definicije takoj sledi naslednji izrek:

Izrek 10. *Naj bo $\{\Gamma_F, F \in p\}$ snop kubičnih krivulj trikotnika, pripadajoč paru konjugirank P in P^{-1}. Vse krivulje iz tega snopa potekajo skozi točki P in P^{-1}.*

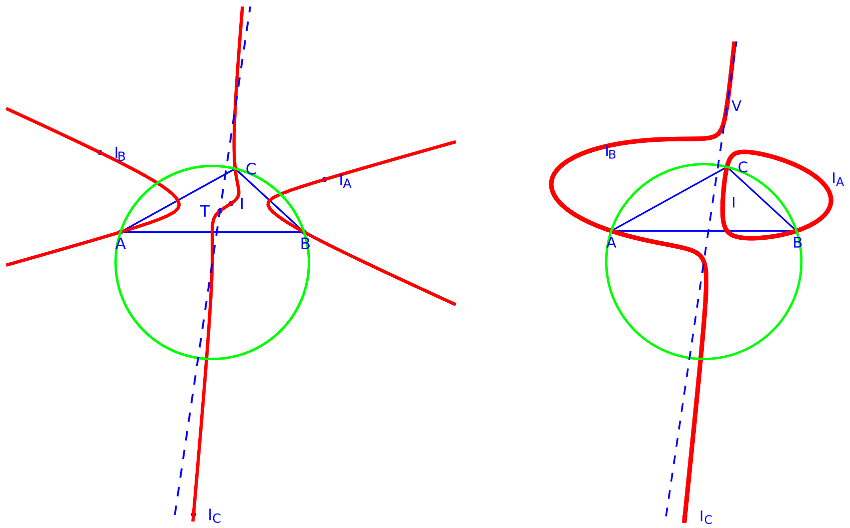
Vsaka premica, ki vsebuje par izogonalnih konjugirank, določa snop kubičnih krivulj trikotnika. Z izbiro točke F na premici skozi točki P in P^{-1} pa je kubična krivulja trikotnika iz tega snopa natanko določena. Ena izmed bolj znanih premic je Eulerjeva premica, to je premica, na kateri ležijo težišče trikotnika, višinska točka trikotnika in središče trikotniku očrtane krožnice. Višinska točka in središče trikotniku očrtane krožnice sta izogonalni konjugiranki. Snop kubičnih krivulj trikotnika, katerih tečaj leži na Eulerjevi premici, imenujemo Eulerjev snop kubičnih krivulj trikotnika.





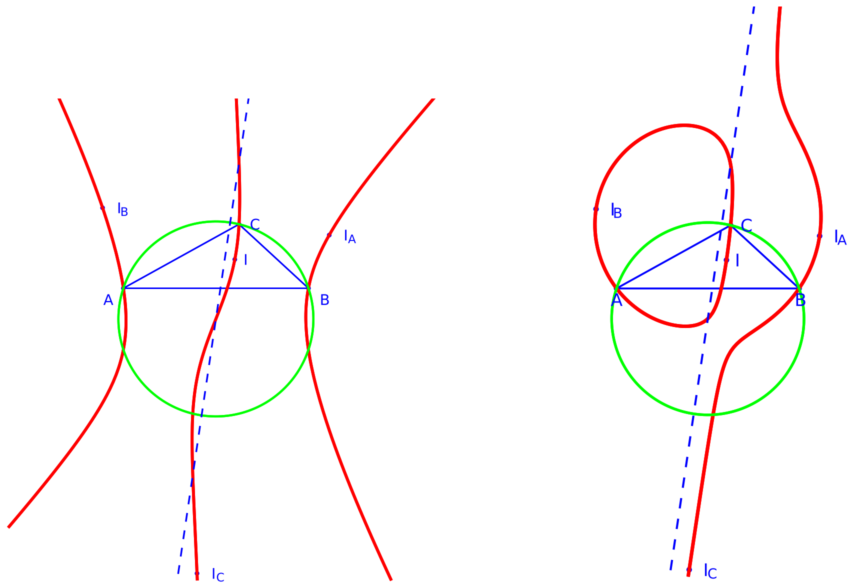
Slika 1. Levo: *Napoleonova kubična krivulja trikotnika* ima za tečaj Feuerbachovo središče F, to je središče krožnice devetih točk. Na tej kubični krivulji ležijo vse točke v povezavi z znanimi Napoleonovimi trikotniki, to so oglišča Napoleonovih notranjih in zunanjih trikotnikov ter notranja in zunanja Napoleonova točka. Desno: *McCayeva kubična krivulja trikotnika.* Tečaj je središče trikotniku očrtane krožnice. Zanjo je značilno, da njena presečišča s trikotniku očrtano krožnico tvorijo enakostranični trikotnik. Zato ima ta kubična krivulja trikotnika vedno tri asimptote, ki se sekajo pod kotom 60°.

Za konec naštejmo nekaj dejstev in izhodišč za nadaljnja razmišljanja o kubičnih krivuljah trikotnika, s poudarkom na krivuljah iz Eulerjevega snopa. Izberimo si za dani trikotnik v ravnini enakokraki trikotnik. Tedaj je Eulerjeva premica simetrala kota nasproti osnovnice. Tečaji vseh kubičnih krivulj trikotnika iz Eulerjevega snopa tako ležijo na simetrali notranjega kota trikotnika. Že v izreku 8 smo omenili, da so v tem primeru vse kubične krivulje trikotnika iz tega snopa degenerirane. Zapišemo jih lahko kot unijo stožnice in Eulerjeve premice ali kot unijo Eulerjeve premice in še dveh simetral notranjih oziroma zunanjih kotov danega enakokrakega trikotnika.



Slika 2. Levo: *Thompsonova kubična krivulja trikotnika*, njen tečaj je težišče trikotnika ABC. Desno: *Višinska kubična krivulja trikotnika*, njen tečaj je višinska točka trikotnika ABC.

V raznostraničnem trikotniku tvorijo Eulerjev snop raznotere kubične krivulje. Najpomembnejše med njimi so McCayeva, Napoleonova, Thompsonova, višinska, Darbouxova in Neubergova. Poleg trikotnika ABC, Eulerjeve premice, ki je označena s črtkano črto, in ustreznih kubičnih krivulj je na slikah prikazana tudi trikotniku ABC očrtana krožnica, in to zaradi naslednjih dejstev: oglišča trikotnika vedno ležijo tako na kubični krivulji trikotnika kot na očrtani krožnici. Izkaže pa se, da se število dodatnih presečišč kubične krivulje s trikotniku očrtano krožnico ujema s številom asimptot kubične krivulje trikotnika. Če ima kubična krivulja trikotnika z očrtano krožnico tri dodatna presečišča, označimo jih s točkami P, Q, R, potem je tečaj F kubične krivulje trikotnika višinska točka trikotnika PQR, asimptote kubične krivulje trikotnika pa so vzporedne premicam PF, QF, RF.



Slika 3. Levo: *Darbouxova kubična krivulja trikotnika.* Tečaj je De Longchampsova točka, ki je zrcalna slika višinske točke preko središča trikotniku očrtane krožnice. Desno: *Neubergova kubična krivulja trikotnika.* Tečaj le-te je točka v neskončnosti na Eulerjevi premici, ki jo označujemo z N. Ta točka je presečišče Eulerjeve premice in premice v neskončnosti. Neubergova kubična krivulja trikotnika seka trikotniku očrtano krožnico samo v eni točki, ki jo imenujemo Neubergova točka. Neubergova kubična krivulja trikotnika ima eno samo asimptoto.

Sklep

Kljub tisočletni zgodovini geometrije in dolgoletnim izkušnjam človeštva s to vejo matematike smo vedno znova presenečeni, koliko življenja skriva v sebi tako preprost objekt, kot je trikotnik. Ne le, da nam tri točke v ravnini določajo več kot 3600 različnih značilnih točk trikotnika, z izbiro četrte točke, tečaja kubične krivulje trikotnika, v življenje obudimo krivulje tretjega reda. Ko ta četrta točka drsi po Eulerjevi premici trikotnika, se pred nami zvrstijo člani Eulerjevega snopa kubičnih krivulj trikotnika z mnogimi skupnimi lastnostmi in mnogimi posebnostmi. Kdo ve, kakšna presenečenja v zvezi s trikotniki nas še čakajo v prihodnosti?

LITERATURA

[1] S. L. Loney, *The elements of coordinate geometry*, Part II, Trilinear Coordinates, etc., MacMillan, London, 1957.

[2] J. Casey, *Analytic geometry*, 2^{nd} edition, Hodges & Figgis, Dublin, 1893.

[3] C. Kimberling, *Triangle centers and central triangles*, Congr. Numerantium **129**, 1998.

[4] H. M. Cundy in C. F. Parry, *Some cubic curves associated with a triangle*, J. Geom. **53** (1995), 41–66.

[5] G. M. Pinkernell, *Cubic curves in the triangle plane*, J. Geom. **55** (1996), 141–161.

[6] Z. Čerin: *On the cubic of Napoleon*, J. Geom. **66** (1999), No. 1–2, 55–71.

[7] T. Veber: *Kubične krivulje trikotnika*, magistrsko delo, Maribor, 2003.

[8] Cubics in the Triangle Plane, dostopno na spletu: `http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/ctc1.html`, povzeto dne 10. 2. 2012.

[9] Trilinear coordinates and other methods of modern analytical geometry of two dimensions: an elementary treatise, dostopno na spletu: `http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.chmm/1263315790`, povzeto 10. 2. 2012.

[10] Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle centers, dostopno na spletu: `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`, povzeto dne 10. 2. 2012.

VESTI

MATEMATIČNE NOVICE

Abelovo nagrado dobil Endre Szemerédi

Norveška Akademija znanosti je razglasila Abelovega nagrajenca za leto 2012. To je madžarski matematik **Endre Szemerédi** (Matematični inštitut Alfréd Rényi v Budimpešti in Oddelek za računalništvo na Univerzi Rutgers v ZDA). Nagrado je dobil za delo v diskretni matematki in teoretičnem računalništvu. Njegovi rezultati so pomemben prispevek k aditivni teoriji števil in ergodični teoriji. Boštjan Kuzman je podrobneje opisal [1] njegove dosežke v Delovi prilogi Znanost.

Vladimir Arnold na Krasu

Pred dvema letoma (junija 2010) je v Parizu umrl slavni ruski matematik **Vladimir Arnold**. Rojen je bil leta 1937 v Odesi v družini, ki je že več generacij nazaj dala znanstvenike. Njegova mati je bila Židinja. Arnold je bil zmeraj ponosen, da je potomec in del ruske inteligence. Po njegovih besedah ([2], str. 436):

Nobena druga država nima take kaste znanstvenikov, zdravnikov, umetnikov, učiteljev ..., ki jim je pomembnejši njihov prispevek družbi kot osebna ali denarna korist.

Starši so mu, kot je tradicija v mnogih družinah ruske inteligence, že v rani mladosti zastavljali matematična vprašanja. V intervjuju iz leta 1997 [2] Arnold trdi, da že pet- ali šestletni otroci lahko rešijo nekatere probleme, ki jih podiplomci zaradi formalne matematične izobrazbe ne zmorejo, npr.:

Iz soda vzamemo žlico vina in ga primešamo čaju v skodelici. Nato vzamemo žlico dobljene mešanice in jo damo nazaj v sod. Česa je zdaj več: čaja v sodu ali vina v skodelici?

Nekoliko starejši otroci, ki že poznajo števila, lahko rešijo tole nalogo: *Janezek hoče kupiti knjigo, a ima 7 evrov premalo. Micka bi rada kupila isto knjigo, a ima en evro premalo. Oba skleneta, da bosta skupaj kupila to knjigo, a ugotovita, da imata tudi tako premalo denarja. Koliko stane knjiga?*

Enajst- ali dvanajstletnemu je učitelj zastavil tole nalogo:

Dve starki sta se ob sončnem vzhodu odpravili na pot, vsaka s stalno hitrostjo. Prva je šla od A do B, druga od B do A. Srečali sta se opoldne. Prva je prišla v B ob štirih popoldne, druga v A ob devetih zvečer. Kdaj je sonce vzšlo na ta dan?

Kot pravi, je o tem premišljeval ves dan. Ko je našel rešitev, pa je bilo to pravo odkritje. Enako sijajno se je pozneje počutil vsakič, ko je prišel do rešitve kakega problema.

Kot študent Kolmogorova je devetnajstleten (deloma) rešil trinajsti Hilbertov problem. Pozneje so pomembni njegovi prispevki na področju navadnih in parcialnih diferencialnih enačb in uporabi v mehaniki tekočin, stabilnosti sistema dveh in več teles, teoriji singularnosti itd. Ker je v šestdesetih letih prejšnjega stoletja protestiral proti ravnanju sovjetskih oblasti, ki so zaprle zdravega matematika v psihiatrično bolnišnico, skoraj tri desetletja ni smel v tujino. Pišejo ([3], str. 491, glej tudi njegovo pripoved v [2], str. 434), da je imel zahrbtne sovražnike in da je njegov starejši kolega, predstavnik SZ v IMU, v sedemdesetih letih preprečil, da bi dobil Fieldsovo medaljo. Po perestrojki je tudi sam začel potovati po svetu, dobil je mesto na univerzi v Parizu in bil eden od ustanoviteljev Neodvisne univerze v Moskvi. Dobil je mnogo nagrad in priznanj. Znan pa je bil tudi po številnih močnih mnenjih in prepričanju o superiornosti ruskega šolskega sistema.

Napisal je tudi ([2], str. 436): *Ena od značilnosti ruske matematične tradicije je nagnjenost k temu, da gledamo celotno matematiko kot en sam živ organizem. Na Zahodu je čisto mogoče, da si strokovnjak za matematiko modulo 5 in ne veš ničesar o matematiki modulo 7. Širino znanja posameznika gledajo na Zahodu enako negativno, kot imajo ozkost v Rusiji za* *nesprejemljivo.* Zelo je nasprotoval nepotrebni abstrakciji v matematiki. O vsem tem se lahko podrobneje poučite v intervjuju [2], ki ima pomenljiv podnaslov:

Utilius scandalum nasci permittur quam veritas relinquatur; (Decretalium V papeža Gregorja IX., začetek 13. stoletja).

Slovenski prevod bi bil: *Bolje je tvegati, da pride do škandala, kot zamolčati resnico.*

Druga njegova značilnost pa je bila izredna fizična vzdržljivost, ki jo je včasih demonstriral na tvegane načine. Tako je sredi zime večkrat v kratkih hlačah na smučeh pretekel nekaj deset kilometrov (kot je povedala njegova študentka Smilka Zdravkovska). V severni Kaliforniji je, star skoraj šestdeset let, na vetroven dan plaval v morju s temperaturo 13 stopinj Celzija in po prihodu na obalo zavrnil brisačo. Enkrat pa bi ga v podobno mrzlem morju v bližini San Francisca močni tokovi skoraj odnesli na odprto morje. (Lahko povem, da so na tamkajšnji obali opozorila pred tokovi in da plavalcev nisem videl, saj mrzli japonski tok močno ohladi vodo tudi poleti. Edinole na nekaterih varnejših odsekih lahko vidiš surfarje v neoprenskih zaščitnih oblekah.) V Parizu je s kolesom imel prometno nesrečo, ki jo je komajda preživel ([3], str. 488).

Njegov prijatelj Dimitrij Fuchs je v reviji *Notices of the AMS* objavil pismo, ki ga je Arnold napisal marca leta 2008, ko se je vrnil s trimesečnega bivanja v Mednarodnem centru za teoretično fiziko v Miramaru ([3], str. 485–486). Vladimir Arnold opisuje, kako je v tem času bival v Sesljanu in v prostem času stikal in plezal po kraških jamah v okolici, tudi onstran meje v Sloveniji. Ob tem je opazil, da so mnoge slovenske besede podobne (stari) ruščini. Njegovo mnenje, da Kraševci govorijo jezik, ki je bliže ruščini kot ukrajinski, pa je seveda rahlo pretirano. Vseeno je presenetljivo videti, kaj vse je vedel ali si zapomnil s področja zgodovine, kulture, zemljepisa. Kot pravi, je preiskal tudi številne nekartirane jame na tem področju. Na strani 502 tega članka imamo fotografijo Arnolda, ki je skoraj gotovo posneta med kraškimi ogradami, na strani 485 pa je slavni matematik v kraškem rovu.

LITERATURA

[1] B. Kuzman, *Norveška akademija je nagradila nepravilni um*, Delo, priloga Znanost 6. 4. 2012, http://www.delo.si/druzba/znanost/norveska-akademija-je-nagradila-nepravilni-um.html.

[2] S. H. Lui, *An Interview with Vladimir Arnold*, Notices of the AMS, April 1997, 432–438, http://www.ams.org/notices/199704/arnold.pdf.

[3] B. Khesin, S. Tabachnikov (ur.), *Memories of Vladimir Arnold*, Notices of the AMS, April 2012, 482–502, http://www.ams.org/notices/201204/rtx120400482p.pdf.

Peter Legiša

O SVETLOBNEM TLAKU[1]

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 03.30.+p

Sevalni tlak je vezan na gibalno količino svetlobe. Povezavo gibalne količine z energijo svetlobe v srednji šoli lahko uporabimo kot izhodišče za vstop v kvantno mehaniko. V članku teče razprava o ozadju klasične enačbe. Pri nekaterih pojavih je odločilen sevalni tlak. Enačbo za sevalni tlak je mogoče preprosto izpeljati. Izpeljavi enačbe so nekateri ugovarjali. Pripombe o tem utegnejo koristiti učiteljem.

ON LIGHT PRESSURE

The radiation pressure is bound to the momentum of light. The connection of momentum with the energy of light may be used in high school as a point of departure for the approach to quantum mechanics. In the article the background of the classical equation is discussed. Phenomena are described for which the radiation pressure is decisive. The equation for the radiation pressure is derived in a simple way. Objections against the derivation of the equation are mentioned. Remarks are added which may be useful for teachers.

Pojav

Svetloba izvaja silo na oviro, v kateri se absorbira ali na kateri se odbije. Dokler so svetlobo opisovali s hitrimi delci, so zamisel opirali na silo curka tekočine, ki spolzi ob oviri ali se na njej odbije. Okoli leta 1872 je James Clerk Maxwell z napetostnim tenzorjem ugotovil, da je sevalni tlak vzporednega curka elektromagnetnega valovanja pri pravokotnem vpadu na ploščico, ki ga absorbira, enak povprečni gostoti energije v valovanju: $p = \overline{w}$.

Sevalni tlak svetlobe je prvi izmeril Pjotr Nikolajevič Lebedev leta 1900 v Peterburgu [1]. Leto zatem sta merjenje v Združenih državah ponovila Ernest Fox Nichols in Gordon Ferrie Hull. John H. Poynting je v nagovoru kot predsednik britanskega fizikalnega društva leta 1905 izjavil: „Zelo kratka izkušnja z merjenjem teh svetlobnih sil zadostuje, da se prepričamo o skrajni majhnosti, majhnosti, ki jih postavi onstran razprave o zemeljskih zadevah.“ Razmere so se spremenile z odkritjem laserjev leta 1960. Z laserskim curkom, usmerjenim navpično navzgor, je bilo mogoče izravnati težo drobne kroglice in doseči, da lebdi v curku [2]. Pozneje so s posebnimi prijemi zagotovili, da atomi v plinu absorbirajo svetlobo z določeno valovno

[1] Po prispevku na strokovnem srečanju DMFA 2011

dolžino iz laserskega curka. Sevajo na vse strani in zaradi odriva izgubljajo hitrost v smeri curka. Trije pari med seboj pravokotnih laserskih curkov lahko zadržujejo atome v pasti. Lasersko hlajenje in optično-magnetne pasti so močno izpopolnili.

Svetlobni tlak v osončju

Johannes Kepler je na začetku 17. stoletja v okviru delčne predstave domneval, da so repi kometov obrnjeni od Sonca zaradi sevalnega tlaka. Danes vemo, da imajo kometi dva repa. Modrikasti *rep I* sestavljajo ioni, večinoma CO^-, rjavkasti *rep II* pa plini in prašni delci. Sončna svetloba ionizira molekule plina in rep ionov zaradi sončnega vetra, to je toka naelektrenih delcev s Sonca, in sončnega magnetega polja kaže naravnost od Sonca. Rep II nastane, ker plini odparevajo z zmrznjenega jedra in potegnejo za seboj prašne delce. Ta rep zaradi sevalnega tlaka, gravitacije kometa in sončnega vetra leži med repom I in tirnico kometa.

Sila sevalnega tlaka sončne svetlobe je pri kroglastih telesih sorazmerna s kvadratom, gravitacijska sila pa s kubom premera. Zato je sila sevalnega tlaka tem pomembnejša, čim manjši je delec. Vseeno je v posebnih okoliščinah pomemben tlak sončne svetlobe na manjše asteroide. Okoli leta 1900 je ruski inženir Ivan Osipovič Jarkovski obdelal nov pojav. Na njegov zapis je desetletje pozneje naletel estonski astronom Ernst J. Öpik. O pojavu je poročal leta 1951 in ga rešil pozabe. Manjši asteroid, ki kroži okoli Sonca, naj se vrti tako, da sta lastna in obhodna vrtilna količina pravokotni na ravnino gibanja in kažeta v isto smer. K Soncu obrnjena stran asteroida se bolj segreje in po četrt vrtljaja močneje seva v smeri nazaj. Od Sonca obrnjena stran se bolj ohladi in po četrt vrtljaja manj seva v smeri naprej. Odriv sevanja pospešuje asteroid v smeri gibanja, tako da se počasi oddaljuje od Sonca. Sila je nasprotno usmerjena, če ima lastna vrtilna količina nasprotno smer kot obhodna. Za določeno telo je učinek zelo težko zanesljivo napovedati. Sila je zelo majhna, a po dolgem času ima lahko opazen učinek. Asteroid 6489 Golevka so skrbno opazovali in ugotovili, da se je zaradi pojava Jarkovskega v 12 letih za 15 km oddaljil od kraja, kjer bi ga pričakovali. Pospešek je meril $a = 2s/t^2 = 2 \cdot 10^{-13}$ m/s^2. Pojav bi bilo mogoče izkoristiti ob nevarnosti, da se asteroid preveč približa Zemlji. S primernim absorberjem ali odbojnikom na asteroidu bi ga bilo mogoče v dovolj dolgem času preusmeriti.

Litovski inženir Friedrich Zander je leta 1929 v tedanji Sovjetski zvezi predlagal, da bi tlak sončne svetlobe s *sončnim jadrom* izkoristili za potovanje po osončju. Ta tlak pojema obratno sorazmerno s kvadratom razdalje od Sonca. Na mestu Zemlje meri ob absorpciji $4{,}3 \cdot 10^{-6}$ N/m^2 in deluje neprekinjeno, ne da bi bilo treba vlagati energijo.

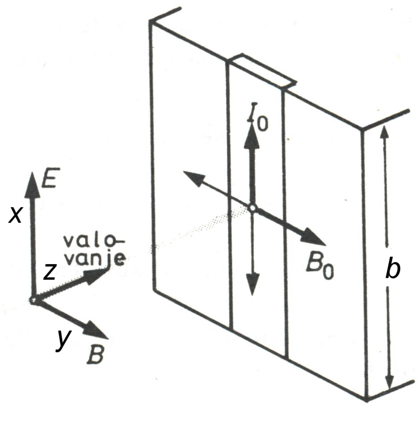
Svetlobni tlak v sredici zvezd pri zelo visoki temperaturi daje glavni prispevek k tlaku plina, ki uravnovesi tlak zaradi gravitacijskega privlaka med deli zvezde.

Enačba

Linearno polarizirano ravno elektromagnetno valovanje v smeri osi z naj pada pravokotno na kovinsko ploščico v obliki pravokotnika s stranico b v smeri osi x in drugo stranico v smeri osi y (slika 1). Ploščica absorbira vse vpadno valovanje. Jakost električnega polja ima amplitudo E_0 v smeri osi x in gostota magnetnega polja amplitudo $B_0 = E_0/c$ v smeri osi y, če je c hitrost svetlobe v praznem prostoru. Amplituda napetosti $U_0 = bE_0$ v smeri osi x požene po Ohmovem zakonu izmenični tok z amplitudo I_0. Nanj deluje izmenično magnetno polje, ki niha v fazi, z največjo silo $F_0 = bI_0B_0 = bI_0E_0/c = I_0U_0/c$. Največja moč izmeničnega toka je $P_0 = U_0I_0$, tako da je največja sila $F_0 = P_0/c$ in največji tlak $p_0 = F_0/S = W_0/(ctS) = W_0/V$. Svetloba v času t zajame prostornino $V = ctS$. Na levi in desni strani enačbe vzamemo povprečni vrednosti in dobimo s povprečno gostoto energije v valovanju $\overline{w} = \overline{W}/V$ Maxwellovo zvezo:

$$p = \overline{w}\,. \tag{1}$$

Amplitudi toka in napetosti nadomestimo s $\sqrt{2}$-krat manjšima efektivnima vrednostma in največjo moč s povprečno močjo $\overline{P} = \frac{1}{2}P_0$.



Slika 1. K izvajanju enačbe (1).

Vzeli smo, da sta amplitudi jakosti električnega polja in gostote magnetnega polja v ploščici konstantni. V resnici z globino eksponentno pojemata: $E_0(z) = E_0(z = 0)\mathrm{e}^{-|z|/\delta}$. Eksponentno pojemajočo amplitudo smo nadomestili s konstantno amplitudo do globine $\delta = \sqrt{2\zeta/\mu_0\omega}$. Pri tem je ζ specifični upor in je na primer za rumenozeleno svetlobo za srebro $\delta = 30$ nm in za jeklo 390 nm. Po uvedbi Poyntingovega vektorja je mogoče sevalni tlak izračunati z njim. Podrobna obravnava odboja in loma svetlobe na kovini pri poševnem vpadu in splošni polarizaciji pa je zapletena [3]. Iz izreka o gibalni količini $|0 - G| = Ft = pSt = \overline{w}ctS/c$ sledi:

$$G = \overline{W}/c\,. \tag{2}$$

Ploščica prevzame od elektromagnetnega valovanja gibalno količino G, ko absorbira energijo $\overline{W}$.

V posebni teoriji relativnosti veljata zvezi:

$$G = vW/c^2 \quad \text{in} \quad W^2 = (cG)^2 + \left(mc^2\right)^2 .$$

Iz prve enačbe z $v = c$ sledi (2). Druga enačba pove, da je v tem primeru lastna masa enaka 0. Posebna teorija relativnosti na enaki podlagi obravnava delce s končno lastno maso in z lastno maso 0.

Max Planck je spekter sevanja črnega telesa pojasnil s privzetkom, da stena votline s sevanjem izmenjava energijo v obrokih – *fotonih.* Za energijo fotona v valovanju s frekvenco ν je dobil $W_1 = h\nu$, če je h za kvantno fiziko značilna Planckova konstanta. V enačbo (2) vstavimo energijo fotona, pa dobimo izraz za gibalno količino fotona $G_1 = h\nu/c = h/\lambda$. Enačba poveže gibalno količino, značilno za delce, z valovno dolžino λ, značilno za valovanje. Enačbo, ki smo jo dobili za fotone z lastno maso 0, razširimo na počasne delce z maso m_1:

$$\lambda_B = h/(m_1 v)\,. \tag{3}$$

Enačba gibalno količino počasnega delca $m_1 v$ poveže z *de Brogliev o valovno dolžino* v valovanju, ki ga priredimo curku delcev. Z enačbo (3) pojasnimo interferenčne poskuse z elektroni in drugimi delci ter ločljivost elektronskega mikroskopa. Z njo lahko okvirno uvedemo tudi kvantna stanja delca v potencialni jami in jih primerjamo z lastnimi nihanji strune. Po podobnosti z „valovno funkcijo“ v klasični mehaniki lahko vpeljemo valovno funkcijo v kvantni mehaniki.

Ozadje

Članek [4] je ugovarjal izpeljavi enačbe (2) v dveh ameriških uvodnih univerzitetnih učbenikih, enem dokaj znanem [5]. Ali bi utegnila biti navedena izpeljava zgrešena? Ali se ne učimo na napakah, posebno na lastnih?

Raziskovalcem v fiziki, ki se spuščajo na neraziskano območje, gre *pravica do napake*. Fizikalne napake ne vplivajo veliko na ugled fizike. Zdi se, da ne vplivajo dosti tudi na ugled raziskovalcev. O fizikalnih napakah Alberta Einsteina razpravljajo v člankih in knjigi, ne da bi to prizadelo njegov ugled.

Z napakami pri poučevanju je nekoliko drugače. Širijo se v manj poučenem okolju, zato je pravica učiteljev do napake omejena. Zahteva ni pretirana, ker ostajajo na raziskanem območju. Poleg tega tudi nekateri študenti njihovo morebitno napako prepoznajo in popravijo ter tako pridobijo dragoceno izkušnjo. Napake v poučevanju pa imajo lahko tudi motivacijsko vlogo. Precej razširjeno je mnenje, da poučevanju koristi, če tu in tam vpletemo kakšno napako in jo ob razpravi razkrijejo in popravijo študenti.

Max Planck se je pritožil nad predavanji Hermanna von Helmholtza in dodal, da je bilo „Kirchhoffovo predavanje skrbno izdelano in je vsak stavek dobro premišljeno stal na pravem mestu, nobena beseda ni bila premalo in nobena preveč, toda vse skupaj je delovalo kot na pamet naučeno, pusto in enolično. Občudovali smo predavatelja, ne pa tega, kar je predaval.“ [6] Tudi nekdanji urednik American Journal of Physics Robert Romer je v spominih na predavanja, ki jih je poslušal, zapisal, „da si ne more kaj, da ne bi razmišljal o tem, ali je jasnost zares tako zaželena.“ [7] John Archibald Wheeler se je na predavanjih včasih delal nepripravljenega, da je zbudil pozornost študentov. Ali to pomeni, da naj učitelji ne poskušajo biti jasni za vsako ceno? Pisci učbenikov imajo še bolj omejeno pravico do napak od učiteljev. Medtem ko predavanja hitro minejo, so učbeniki dolgo časa dostopni javni kritiki. Kritike pa včasih niso utemeljene.

Premislek pokaže, da velja to za ugovore [4] proti izpeljavi v učbeniku [5]. Nakažimo izpeljavo. Vzemimo, da prost elektron, ki spočetka miruje, zadene ravno linearno polarizirano elektromagnetno valovanje. Na elektron z nabojem $e = -e_0$ deluje z Lorentzevo silo $\vec{F} = -e_0\vec{E} - e_0\vec{v} \times \vec{B}$, ki ima v smeri jakosti električnega polja, to je v smeri osi x, komponento $-e_0E + e_0v_zE/c$ in v smeri potovanja valovanja, to je v smeri osi z, komponento $-e_0v_xE/c$. Povprečje prve komponente po enem nihaju je enako 0, ker prvi člen sinusno niha, v drugem pa je hitrost v_z zelo majhna. Po Newtonovem zakonu je $\vec{F} = d\vec{G}/dt$, v povprečju $\overline{F_z} = \overline{dG_z/dt} = -e_0\overline{v_xE}/c$. Moč je $\vec{v} \cdot \vec{F} = dW/dt = -e_0v_xE$. Tako je $\overline{dW/dt} = c\overline{dG_z/dt}$ in $\overline{W} = c\overline{G}_z$ na začetku pospeševanja. Elektron absorbirane energije ne obdrži. V telesu, ki absorbira vso vpadno energijo, jo zaradi upora v celoti odda okolni snovi, prost pa jo izseva. Piscu [5] je mogoče očitati le, da je opombo dal v oklepaj.

Pisca članka [4] sta priznala, da nista vedela za vpliv upora. Iz njunega članka pa vseeno izhaja koristen sklep. Opazujmo prost elektron z maso m v ravnini $z = 0$ v valovanju z jakostjo električnega polja $E = E_0 \cos\omega t$ v smeri osi x in gostoto magnetnega polja $B = B_0 \cos\omega t$ v smeri osi y.

Newtonov zakon za gibanje elektrona v smeri osi x se glasi $mdv/dt = eE = -e_0E_0\cos\omega t$. Hitrost je potem $v = -(-e_0E_0/m\omega)\sin\omega t$ in odmik $x = (-e_0E_0/m\omega^2)\cos\omega t$. Na nihajoči elektron deluje magnetno polje s silo: $F = evB = -e_0(-e_0E_0/m\omega)\sin\omega t\cdot B_0\cos\omega t = (e_0^2E_0^2/2mc\omega^2)\sin 2\omega t$. Povprečna vrednost je enaka 0. Na prost elektron elektromagnetno valovanje s konstantno amplitudo ne izvaja sile v smeri potovanja. Svetlobni tok s konstantno amplitudo ne odrine oblaka plazme. Odrine ga valovanje s spremenljivo amplitudo, denimo udarni val.

Svetlobnega tlaka ne moremo pojasniti, če elektrone v kovini obravnavamo kot idealni plin. Pojasnimo ga, če v enačbo gibanja vključimo upor: $F = eE - \text{konst}\cdot v$ [8]. Pisca sta temu koraku ugovarjala, češ da je pri svetlobi s krožno frekvenco $\omega = 10^{15}$ s^{-1} in amplitudo jakosti električnega polja $E_0 = 10^4$ V/m amplituda odmika elektronov $e_0E_0/(m\omega^2) = 10^{-15}$ m veliko manjša od razmika med atomi v kristalu [9]. Ugovor ni umesten. Naboj elektronov v kovini lahko obravnavamo kot zvezen. O tem priča tudi Ohmov upor kovinskega vodnika. Amplituda odmika elektronov v srebru pri gostoti toka 1 A/mm^2 s frekvenco nad 50 MHz postane manjša od desetine nanometra, ne da bi se zaradi tega zmanjšal Ohmov upor.

Poznamo še druge primere, pri katerih je mikroskopski opis tako zapleten, da za poučevanje ni pripraven. Viskoznosti plina ali kapljevine ali površinske napetosti kapljevine ne moremo preprosto pojasniti z gibanjem molekul. Deli zraka v zvoku, ki ga komaj zaznamo z ušesi, nihajo z amplitudo 10^{-11} m, kar je manj od premera molekul. Predstava, da se v plinu ali tekočini gibljejo molekule ali po kovini elektroni, ne koristi vselej.

Pri svoji izpeljavi enačbe (2) sta si pisca morala pomagati s sipanjem valovanja in s kvantno mehaniko. Pot utegne biti zgrešena, zagotovo pa ni dosledna, saj v izpeljavo klasične enačbe (2) ne gre vpletati kvantnih sestavin.

Dele obravnavane snovi je mogoče vključiti v fiziko v srednji šoli. Učitelji naj o tem razmislijo in se glede na sprejemljivost srednješolcev odločijo, v kolikšni meri je to mogoče. Če se jim zdi del snovi pretežaven ali predolgovezen, ga je mogoče obravnavati v krožku. V ozadju je odločitev, koliko kvantne mehanike sodi v srednjo šolo.

Planckova izpeljava

Dodajmo v poenostavljeni obliki račun, ki se ne ozira na elektrone in ki ga je Planck predložil leta 1912 [4]. Ravno elektromagnetno valovanje pravokotno pada na ravno kovinsko ploščico in se na njej v celoti odbije. Sestavimo vpadno in odbito valovanje. Jakost električnega polja v smeri osi x je $E = E_0\cos(kz - \omega t) - E_0\cos(kz + \omega t) = 2E_0\sin kz\sin\omega t$. Pri tem je $k = 2\pi/\lambda$

velikost valovnega vektorja. Električno polje se odbije z nasprotno fazo, tako da je v meji vozelna ploskev. Magnetno polje se odbije z enako fazo, da smeri električnega in magnetnega polja ter potovanja v odbitem valovanju sestavljajo desni trirob:

$$B = B_0 \cos(kz - \omega t) + B_0 \cos(kz + \omega t) = 2(E_0/c) \cos kz \cos \omega t\,.$$

Iz Ampèrovega zakona rot$\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ sledi $\mu_0 j = -\partial B/\partial z$, če se omejimo na komponente v smeri osi x in člen z $\varepsilon_0\mu_0 \partial E/\partial t = c^{-2}\partial E/\partial t$ zanemarimo. Na tok v smeri osi x deluje magnetno polje v smeri osi y z gostoto sile jB v smeri osi z. Tlak se spreminja z globino in velja $dp = jBdz = -(B/\mu_0)(\partial B/\partial z)dz = -BdB/\mu_0$. Gostota magnetnega polja v kovini pojema od $B(z = 0) = 2B_0 \cos \omega t$ do 0 v dovolj veliki globini z. Za tlak dobimo $p = -\int_0^\infty BdB/\mu_0 = B^2(z = 0)/(2\mu_0) = 2B_0^2 \cos^2 \omega t/\mu_0$ in za njegovo povprečno vrednost B_0^2/μ_0. S povprečno gostoto energije $\overline{w} = B_0^2/(2\mu_0)$ sledi nazadnje $p = 2\overline{w}$. Vpadnemu valovanju ustreza polovica tega, to je $\overline{w}$. Tudi sila vodoravnega vodnega curka, ki se odbije na navpični oviri, je dvakrat večja od sile curka, ki spolzi ob oviri navzdol. Planckov račun odpravi morebitne pomisleke o preprostem računu. David J. Griffths je v članku [10] navedel obsežen seznam literature o gibalni količini elektromagnetnega polja in obdelal odprta vprašanja.

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Svetlobni tlak in P. N. Lebedev*, Obzornik mat. fiz. **48** (2001), 148–153.

[2] A. Ashkin, *The pressure of laser light*, Scientific American **226** (1972), 63–71 (2).

[3] K. T. McDonald, *Radiation pressure of a monochromatic plane wave on a flat mirror*, (2009), 1–19, na spletu s tem naslovom.

[4] T. Rothman in S. Boughn, *The Lorentz force and the radiation pressure of light*, Am. J. Phys. **77** (2009), 122–127.

[5] F. Crawford, *Waves. Berkeley Physics Course*, Vol. 3, McGraw-Hill, New York 1965, str. 362.

[6] M. Planck, *Scientific Autobiography and Other Papers*, Philosophical Library, New York, 1949.

[7] R. H. Romer, *Is clear teaching good teaching. A tale of two teachers*, Am. J. Phys. **58** (1990), 1129–30.

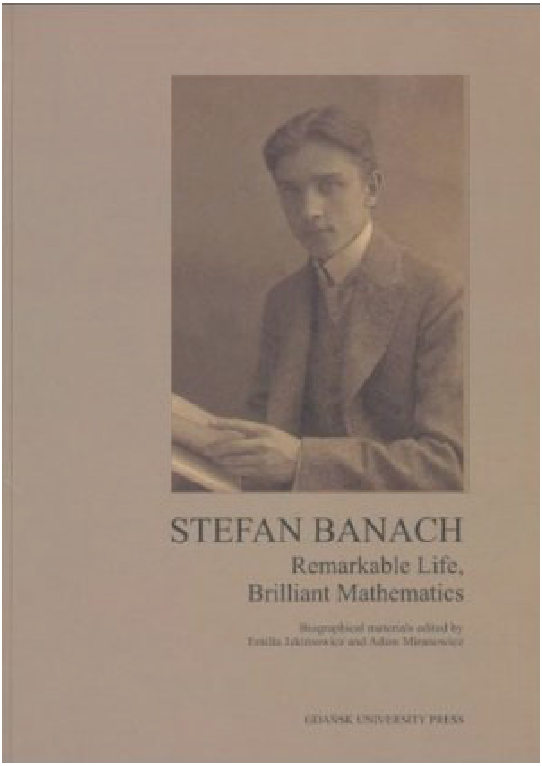
[8] C. E. Mungan, *Repairing an elementary explanation of radiation pressure*, Am. J. Phys. **77** (2009), 965.

[9] T. Rothman in S. Boughn, *On „Repairing an elementary explanation of radiation pressure“*, Am. J. Phys. **77** (2009), 966.

[10] D. J. Griffiths, *Resource letter EM-1: Electromagnetic momentum*, Am. J. Phys. **80** (2012), 7–18.

NOVE KNJIGE

Stefan Banach: Remarkable Life, Brilliant Mathematics, uredila E. Jakimowicz in A. Miranowicz, Gdansk University Press, Gdansk 2010, 186 str.



Knjiga obravnava življenje in delo Stefana Banacha. Pred leti nam je na Matematičnem kolokviju o Banachu zanimivo pripovedoval znani poljski matematik W. Żelazko. Vendar so od takrat raziskovalci odkrili tudi nova dejstva, denimo o Banachovi materi. Precej snovi in fotografske dokumentacije so prispevali sorodniki. V knjigi so prepisani ali preslikani mnogi originalni dokumenti. Zanimiva so predvsem pisma in spomini nanj. Na zelo dostopen način je predstavljeno tudi Banachovo delo.

Stefanov oče, Stefan Greczek, je imel le osnovno izobrazbo, vendar se mu je posrečilo dobiti pisarniško delo v Budimpešti, kamor je s poljskega podeželja pripešačil 250 km daleč. Nato je bil vpoklican v avstro-ogrsko vojsko. Dodeljen je bil za pomočnika oficirju in se tam zaljubil v njegovo služkinjo Katarino Banach. Iz te zveze se je 1892 v Krakovu rodil nezakonski otrok Stefan Banach. Po takratnih predpisih bi oče za poroko moral dobiti dovoljenje nadrejenih. Za to bi moral dokazati, da bo poroka izboljšala njegove razmere, se pravi, da je nevesta bogata, kar seveda ni bilo res. Zaradi tega sta se razšla. Otroka je mati prepustila Greczku. Ta ji je obljubil, da bo skrbel zanj do polnoletnosti. Sinu pa ni razkril njene identitete. To je pravzaprav nenavadno in deloma nelogično, saj sta tako oče kot mati bila vpisana v knjigi rojstev. Vsak zainteresirani, ki bi se sprehodil po krakovskih župniščih (saj je Krakov kot rojstni kraj naveden v

Banachovih izkazih), bi to lahko kmalu ugotovil. (A tudi zgodovinarji so si matične knjige ogledali šele nedavno.) Res pa je, da v Banachovih spričevalih, prikazanih v tej knjigi, starša nista omenjena. Kot skrbnik je enkrat omenjen Stefan Greczek in drugič fotograf Julij Mien. O Katarini vedo le, da se je kasneje poročila z železničarjem in odšla iz Krakova.

Sprva je za otroka verjetno skrbela Greczkova mati, po nekaj mesecih pa ga je vzela Frančiška Plowa. Ta gospa, lastnica pralnice, je bila brez lastnih otrok in je že pred tem vzela k sebi nečakinjo. Ta je Banachu postala nekakšna starejša sestra. Banachov oče je še naprej skrbel in deloma plačeval za sina vse do mature, čeprav se je potem poročil, ločil in spet poročil ter imel še več otrok, ki so se vsi po vrsti izkazali. Banachov oče je bil uspešen človek, ki je kariero končal kot davčni uradnik in računovodja. V pismih je nekoliko pravičniški, a je bil vsekakor človek, ki je izpolnjeval več kot svoje obveznosti in pomagal, če se je dalo. Seveda je Banach pogrešal življenje pri pravih starših, kot je kasneje tudi potožil v pismu očetu. Kljub temu je bila rejniška družina zanj dobra in tega se je zavedal in bil hvaležen.

Prijatelj rejniške družine je bil prej omenjeni Julij Mien, Francoz, prevajalec in fotograf, ki je bil nekaj časa njegov skrbnik in od katerega se je Banach naučil izvrstno govoriti francosko. V gimnaziji je bil Stefan sprva odličen dijak, proti koncu pa je povsem popustil. Tako pravzaprav ne bi smel delati mature, čeprav je profesor matematike jamčil, da je matematični genij. Vendar se je zanj zavzel vplivni profesor verouka in Banach je leta 1910 (komajda) maturiral.

Čez nekaj časa je odšel v cvetoči center razvoja Lvov v Galiciji. Tamkajšnja poljska elita je konec devetnajstega stoletja sklenila, da bo sodelovala z avstro-ogrsko oblastjo in se uveljavila na ekonomskem in intelektualnem področju. Regija je z ugodnimi ponudbami privabila mnogo industrije. Poljaki so se izkazali kot dobri bankirji (kar se je, mimogrede, videlo tudi v zadnji finančni krizi) in še na mnogih drugih področjih. Mesto je bilo resnično multikulturno. Če povzamem knjigo, je slaba polovica prebivalstva mesta pripadala rimskokatoliški veroizpovedi, in med temi je bila večina Poljakov. Kakih trideset odstotkov je bilo Židov raznih usmeritev (od liberalnih do ortodoksnih), slaba petina pa katoličanov vzhodnega obreda (grkokatolikov). Mesto je imelo tudi armensko cerkev. Seveda so bili tam tudi nemško govoreči protestanti. Banach je tu študiral na Politehniki in se – kot je bilo takrat za študente običajno – preživljal sam, tudi s poletnim delom. Tako je dobil 1913 nekakšno višješolsko izobrazbo. Ob izbruhu prve svetovne vojne ni bil vpoklican, ker je bil levičar in je slabo videl na levo oko. Ko se je približevala fronta, se je vrnil v Krakov. Poleti 1916 se je matematik Hugo Steinhaus (1887–1972) sprehajal po krakovskem parku. Ni mogel verjeti svojim ušesom, ko je zaslišal besedo *Lebesgueov integral*. To je bila namreč takrat povsem sveža stvar – Lebesgueovi članki so izšli komaj nekaj let prej. Pristopil je h klopi, od koder je slišal razgovor, in se seznanil z Banachom in Ottom Nikodymom. Povabil ju je domov in jima predstavil nekaj problemov, pri katerih ni mogel priti do konca. Banach je čez nekaj dni prišel z rešitvijo. Tako je nastal skupni članek o konvergenci Fourierovih vrst. Kmalu je prišel Banach sam ali v sodelovanju s Steinhausom do še več drugih zelo dobrih rezultatov. Pri Steinhausu se je Banach seznanil tudi z Lucijo Braus, s katero se je leta 1920 poročil. Takrat je postal asistent na Politehniki v Lvovu, čeprav sploh ni imel prave univerzitetne izobrazbe.

Še istega leta je doktoriral na tamkajšnji univerzi na nenavaden način, kot poroča njegov prijatelj matematik. Ker je odlašal s predajo disertacije, so naročili enemu od kolegov, naj zbere njegove članke. Banacha so nato ustavili na hodniku in ga prosili naj pride v dekanovo pisarno, kjer naj bi razložil nekaj stvari radovednim ljudem iz Varšave. Banach je odgovarjal zadovoljivo in menda šele nato zvedel, da je bila to doktorska komisija. Leta 1922 je postal redni profesor. V akademskem letu 1924/25 je bil v Parizu. Svetovno slaven je postal po izidu knjige *Théorie des opérations linéaires* (1932), ki je v poljščini izšla leto prej. To je bil definitivni učbenik funkcionalne analize. Na mednarodnem matematičnem kongresu v Oslu 1936 je imel Banach vabljeno predavanje z naslovom *Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis*. V tem času so Lvov obiskali mnogi znani matematiki: Borel, Fréchet, Lebesgue, Zermelo, von Neumann, Aleksandrov, Luzin, Sobolev.

Banach je raziskoval z izrednim navdušenjem, kjerkoli in kadarkoli, posebno rad pa v kavarni. Bil je boem, ki mu ni bilo mar za ugodje. Hkrati pa je kazal popolno brezbrižnost do denarnih zadev. Čeprav je imel dobro plačo, je zapravljal čez svoje možnosti in se strahovito zadolžil. Njegov starejši kolega profesor Fuliński je interveniral, ga naučil osnovne finančne discipline in jamčil za njegove dolgove. Da bi poplačal upnike, je Banach napisal univerzitetne učbenike analize in mehanike, sodeloval pa je tudi pri pisanju gimnazijskih besedil. Popolnoma se je znebil dolgov šele leta 1939, ko je dobil večjo nagrado.

Banach in sodelavci so zelo radi hodili v Škotsko kavarno v Lvovu, ki je ime dobila po karirastem okrasju. Tam so razpravljali in pisali po marmornih miznih ploščah ter prtičkih. Veliko tega se po seansah, ki so trajale do sedemnajst ur, kasneje niso mogli spomniti. Zato je Banachova žena v lokal prinesla trdo vezan zvezek in poučila osebje, naj ga dajo matematikom ob njihovem prihodu in skrbno shranijo ob odhodu. V zvezek so pisali razne probleme in deloma rešitve. Zvezek je postal znan kot *Škotska knjiga*. Predlagatelj problema je navadno ponudil tudi nagrado za rešitev. Te so bile od večerje v Cambridgeu ali Ženevi do gosi.

Leta 1938 se je Banach dogovarjal s Stanislavom Ulamom za enoletno bivanje v ZDA. Iz tega obiska, ki bi izboljšal njegovo finančno stanje in njegovi družini verjetno prihranil marsikatere grozote druge svetovne vojne, pa očitno ni bilo nič.

22. septembra 1939 je v skladu s paktom Molotov-Ribbentrop Lvov zasedla Rdeča armada, ki je Poljsko napadla pet dni pred tem. Banach, tudi zaradi dobrih zvez s sovjetskimi matematiki, ni imel težav in je postal dopisni član Ukrajinske akademije znanosti. Konec junija 1941 so sovjetske čete pobegnile iz Lvova. Pred tem je NKVD pobila skoraj vse zapornike, ki so čakali na odhod v sovjetska taborišča. Tri dni po prihodu nemških čet so SS in Gestapo postrelili 22 univerzitetnih profesorjev iz Lvova, prvi pogrom so takoj doživeli tudi Judi. Banach je spet imel srečo v nesreči. V Lvovu je obstajal v okviru Biološke fakultete Inštitut za raziskave tifusa, ki ga je vodil profesor Rudolf Weigl. Ta inštitut je izdeloval cepivo proti tifusu, zato so tako sovjetska oblast kot kasneje nemški okupatorji omogočili njegovo nadaljnje delovanje. Vodja inštituta si je od Nemcev izposloval privilegij, da sam izbira sodelavce. Med drugim je potreboval ljudi, na katerih so kontrolirano sesale sterilne uši, preden so jih okužili za razne poskuse. V to množico je profesor Weigl zavestno vključil Banacha in njegovega sina in ju tako obvaroval česa hujšega. Vojno je preživela tudi Banachova žena, čeprav je bila židovskega rodu. Julija 1944 je bil Lvov osvobojen. Žal se je Banacha, strastnega kadilca, medtem lotil pljučni rak. Tudi tedaj njegova intelektualna radovednost ni prenehala in želel se je preusmeriti v matematično fiziko. V povojnem pomanjkanju je očitno zelo priljubljeni Banach dobil gostoljubje v vili prijateljev. V bolezni pa je zanj in za njegovo obupano ženo skrbel W. Nikliborc (1889–1948). Umrl je 31. avgusta 1945. Pokopan je v Lvovu. To mesto je po vojni pripadlo SZ, natančneje Ukrajini. Danes se imenuje Lviv in od avstro-ogrske ter poljske preteklosti so ostale, kot beremo v mestnem vodniku, le stare stavbe, zgrajene v italijanskem slogu, in pa nekateri dokumenti, tudi o Banachu.

Peter Legiša

ZBIRKA IZBRANIH POGLAVIJ IZ FIZIKE

O fizikalnih društvenih izdajah v Obzorniku za matematiko in fiziko že nekaj časa nismo pisali, zato si bomo tokrat ogledali nekaj novejših naslovov v omenjeni zbirki.

V sodelovanju z Oddelkom za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo in kasneje Fakultete za matematiko in fiziko je v tej zbirki izšlo že veliko naslovov, tako da se danes zaporedno številčenje izdaj v zbirki bliža številki 50. Pri tem seveda niso všteti vsi ponatisi in popravljene izdaje, teh je bilo bistveno več. Vse trenutno razpoložljive knjige v zbirki in cenik izdaj lahko najdemo tudi na spletni strani `http://www.dmfa-zaloznistvo.si/zipf/`.

Aleš Mohorič: NALOGE IZ FIZIKE II ZA FIZIKALNO MERILNO TEHNIKO, Zbirka izbranih poglavij iz fizike 47, DMFA–založništvo, Ljubljana 2010, 184 strani.

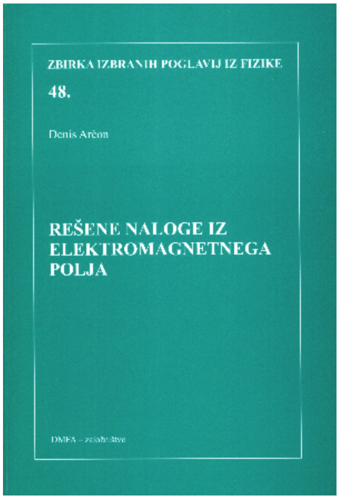
Zbirka je nastala med avtorjevim dolgoletnim vodenjem vaj za študente fizikalne merilne tehnike. Primerna je za vse študente naravoslovnih in tehničnih smeri, pa tudi za dijake, ki se pripravljajo na tekmovanja iz fizike.

Naloge so razporejene po poglavjih *Električni naboj*, *Električno polje*, *Gaussov zakon*, *Električni potencial*, *Kapaciteta*, *Tok in upor*, *Vezja*, *Magnetno polje*, *Amperov zakon*, *Faradeyev zakon*, *Induktivnost*, *Magnetizem in snov*, *Elektromagnetno nihanje*, *Izmenični tokovi*, *Maxwellove enačbe*, *Elektromagnetno valovanje*, *Geometrijska optika*, *Interferenca*, *Uklon* in *Fotometrija*, na koncu pa najdemo še pregled fizikalnih količin.

Nekatere naloge dopolnjujejo slike, ki jih je avtor še posebej skrbno narisal. Veliki večini nalog je dodana tudi številska rešitev, nekatere pa so prepuščene bralcem v premislek.

Naročite jo lahko pri DMFA–založništvo po članski ceni 9,59 EUR.

Denis Arčon: REŠENE NALOGE IZ ELEKTROMAGNETNEGA POLJA, Zbirka izbranih poglavij iz fizike 48, DMFA–založništvo, Ljubljana 2010, 228 strani.



Knjižica je nastala na osnovi nalog ter kolokvijev, ki so se v zadnjih letih reševale pri predmetu *Elektromagnetno polje*. Vprašanja in zgledi izvirajo iz obsežne tuje literature, precej nalog pa je tudi „domačih“. Knjižnica je namenjena predvsem kot vodnik pri študiju in kot koristno dopolnilo predavanjem ter ostalim učbenikom.

Sestavljajo jo naslednja poglavja: *Elektromagnetna polja*, *Elektrostatika*, *Magnetno polje in kvazistatična aproksimacija*, *Ohranitveni zakoni*, *Dielektrična konstanta*, *Potenciali, sevanje in elektromagnetno valovanje*, *Hamiltonove metode* in *Posebna teorija relativnosti.*

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 11,62 EUR.

Branko Borštnik: FIZIKA ZA ŠTUDENTE VISOKIH ŠOL, Zbirka izbranih poglavij iz fizike 49, DMFA–založništvo, Ljubljana 2011, 220 strani.

Učbenik je nastal na osnovi zapiskov predavanj, ki jih je avtor pripravil za študente različnih študijskih smeri naravoslovnih fakultet Univerze v Ljubljani. Vsebina knjige je razdeljena na tri sklope. Prvi sklop predstavljajo poglavja *Mehanika*, *Toplota*, *Elektrika* in *Optika*, kjer so podana osnovna znanja. *Primeri iz tehnike in vsakdanjega življenja* so nanizani v naslednjem sklopu poglavij. V tretjem delu knjige je zbirka nalog iz mehanike, toplote in elektrike. Vse naloge so opremljene z navodili za reševanje. Besedila nalog in navodila za reševanje predstavljajo tretji vir ponazoritev fizikalnih vsebin.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 18,32 EUR.

Uredništvo

Pred kratkim (Obzornik mat. fiz. **58** (2011) 5) smo zastavili nalogo o padajoči palici. Palica najprej stoji na ošiljenem koncu navpično na ravni podlagi. Palica je v labilni legi in že najmanjša motnja povzroči, da se prevrne. Pravzaprav ni mogoče, da bi palica obstala pokonci, tudi če bi stala popolnoma navpično, kar lahko razložimo s Heisenbergovim načelom nedoločenosti.

Med padanjem palice njen ošiljeni konec, ki je v stiku s tlemi, najprej miruje, nato pa začne po njih drseti. Giblje se bodisi v smeri padanja bodisi v nasprotni smeri. Smer je odvisna od koeficienta lepenja. Med padanjem se smer drsenja lahko tudi spremeni, če je koeficient trenja odvisen od hitrosti.

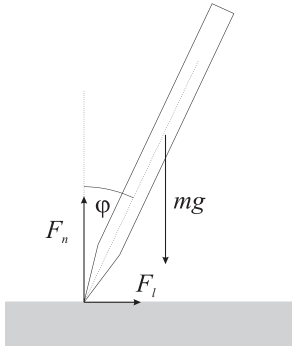
Slika 1. Sestavljena slika padajoče palice. Slika je zlepljena iz posnetkov, narejenih v enakih časovnih razmikih z enako hitrostjo zaklopa. Hitreje, ko se palica giblje, bolj je njena slika zabrisana.

Vprašanje naloge je bilo, ali palica med padanjem zdrsne naprej ali nazaj? Ali pri tem kdaj odskoči oziroma ali je konec palice ves čas padanja v stiku s tlemi?

Na palico delujeta dve zunanji sili: teža mg in sila podlage. Silo podlage razstavimo na navpično komponento z velikostjo F_n in podlagi vzporedno silo lepenja F_v. Vodoravna komponenta sile podlage je posledica lepenja, dokler konec palice miruje, in trenja, ko se konec giblje. Odklon palice iz navpične smeri označimo s kotom φ, dolžino z l, maso z m in gravitacijski pospešek z g. Energijski izrek poveže spremembo potencialne energije težišča in spremembo kinetične energije palice:

$$\frac{1}{2}mgl(1-\cos\varphi)=\frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2,$$

pri čemer smo privzeli, da palica v začetku miruje v navpični legi, in smo upoštevali vztrajnostni moment vrtenja palice okoli osi v stiku s podlago $ml^2/3$.



Slika 2

Kotni pospešek α, s katerim se palica vrti okoli osi v stiku palice s podlago, je posledica navora teže:

$$M = J\alpha$$

in je enak:

$$\alpha = \frac{3g\sin\varphi}{2l}\,.$$

Dokler palica na stiku s podlago miruje, pospešek njenega težišča razdelimo na radialno in tangencialno komponento, za kateri velja:

$$a_r = \frac{\omega^2 l}{2} = \frac{3g(1-\cos\varphi)}{2}\,,$$

$$a_t = \frac{\alpha l}{2} = \frac{3g\sin\varphi}{4}\,;$$

ω je kotna hitrost, s katero se palica vrti.

Navpično komponento sile podlage izrazimo iz drugega Newtonovega zakona:

$$F_n - mg = -ma_r\cos\varphi - ma_t\sin\varphi \Rightarrow F_n = \frac{1}{4}mg(1-3\cos\varphi)^2\,.$$

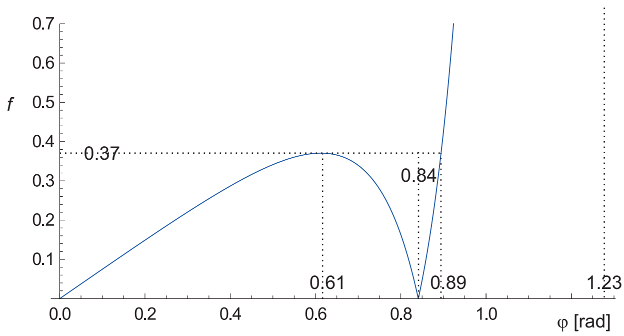
Sila lepenja pospešuje težišče v vodoravni smeri:

$$F_l = ma_v = m(a_t\cos\varphi - a_r\sin\varphi) = \frac{3mg}{4}\sin\varphi(3\cos\varphi-2)\,.$$

Palica ne drsi, dokler je sila lepenja manjša od produkta koeficienta lepenja k_l in pravokotne komponente sile podlage: $F_l < k_l F_n$ oziroma:

$$k_l > \left|\frac{3\sin\varphi(3\cos\varphi-2)}{(1-3\cos\varphi)^2}\right| = f\,.$$

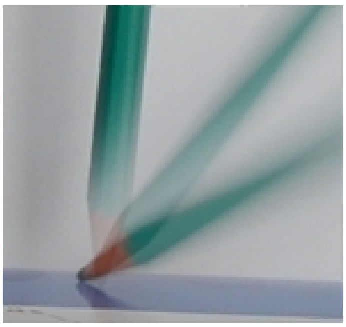
Graf razmerja z desne strani neenačbe v odvisnosti od kota φ je prikazan na sliki 3.



Slika 3. Odvisnost velikosti kvocienta vodoravne in navpične komponente sile podlage od nagiba palice. Palica začne drseti takrat, ko njen nagib preseže vrednost, pri kateri je kvocient enak koeficientu lepenja med palico in podlago. Pri kotu 0,84 rad spremeni vodoravna komponenta sile podlage smer. Če je koeficient lepenja večji od 0,37, palica zdrsne v smeri padanja pri kotu, ki je večji od 0,89 rad. Kvocient ima pol pri kotu 1,23 rad, ki pa nima pomena, saj palica že pred tem začne drseti in gibanje opišemo drugače.

Ko postane razmerje večje od koeficienta lepenja (ki je snovna lastnost podlage in palice), začne palica drseti. Če je koeficient lepenja manjši od 0,37, palica zdrsne v nasprotno smer padanja pri kotu, ki je manjši od 35°. Če je koeficient lepenja večji, palica ne drsi vsaj do kota 48°. Pri tem kotu sila lepenja spremeni svojo smer. Tedaj začne palica drseti v smeri padanja.

Pokažimo še, da palica ostane na tleh, kadar drsi v smeri padanja. Sprememba potencialne energije palice $mgl(1 - \cos\varphi)/2$ opravi delo sile trenja



Slika 4. Palica zdrsne v nasprotno smer padanja, če je koeficient lepenja med palico in podlago manjši od 0,37.

in poveča kinetično energijo palice:

$$\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)mgl = A_t + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}m[l^2(\omega/2)^2 + v_r^2 + lv_r\omega\cos\varphi]\,.$$

Kinetično energijo palice smo zapisali kot vsoto rotacijske kinetične energije pri vrtenju okoli osi skozi težišče in translacijske kinetične energije težišča. Z v_r je označena hitrost konca palice, ki je v stiku s podlago. Delo trenja in člena, v katerih nastopa v_r, so pozitivni. Ko jih izpustimo, sledi neenačba:

$$\omega^2 < \frac{3g}{l}(1-\cos\varphi)\,.$$

Pospešeno vrtenje palice okoli težišča je posledica navora sile podlage:

$$F_n\frac{l}{2}\sin\varphi + k_tF_n\frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{1}{12}ml^2\alpha\,.$$

Gibanje težišča v navpični smeri opišemo z drugim Newtonovim zakonom:

$$mg - F_n = m\alpha\frac{l}{2}\sin\varphi + m\omega^2\frac{l}{2}\cos\varphi\,.$$

Sila trenja na gibanje v navpični smeri ne vpliva. Iz zadnjih dveh enačb izrazimo pravokotno silo podlage:

$$F_n = \frac{mg\left(1-\frac{l}{2g}\omega^2\cos\varphi\right)}{3\sin^2\varphi + 3k_t\sin\varphi\cos\varphi + 1}\,.$$

Če v števcu ω^2 zamenjamo z desno stranjo neenačbe, sledi

$$F_n > \frac{mg(1-\frac{3}{2}\cos\varphi(1-\cos\varphi))}{3\sin^2\varphi + 3k_t\sin\varphi\cos\varphi + 1}\,.$$

Imenovalec zadnjega izraza je zagotovo pozitiven, za števec pa z dopolnitvijo do popolnega kvadrata:

$$1-\frac{3}{2}\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos^2\varphi = \frac{3}{2}\left[(\cos\varphi - 1/2)^2 + \frac{5}{12}\right]$$

tudi pokažemo, da je vedno pozitiven.

Tako smo dokazali, da je navpična sila podlage vedno pozitivna in palica ne izgubi stika s podlago. Zgornja izpeljava seveda ne velja, če upoštevamo zračni upor ter palica ni toga in ozka. Dokaz za drsenje v nasprotno smer padanja teče podobno. Poskusite ga izpeljati sami!

Aleš Mohorič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAREC 2012
Letnik 59, številka 2

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici je fotografija kometa Hale-Bopp, na kateri so lepo vidni glava kometa (koma), modrikasti ionski rep ter beli prašni rep. V ionskem repu so ionizirane molekule ogljikovega monoksida, v prašnem pa delci prahu, ki se sprostijo zaradi izparevanja snovi iz kometovega jedra, ko je komet blizu Sonca. Komet smo lahko opazovali leta 1997. Avtor: Jim Young, NASA.