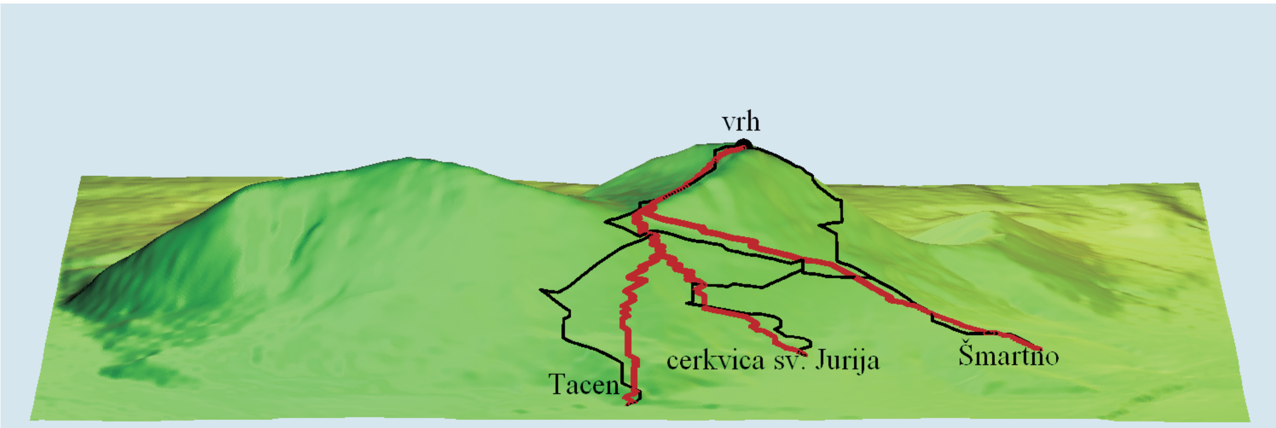
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2012
Letnik 59
1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 59 • ŠT. 1 • STR. 1–40 • JANUAR 2012

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2012, letnik 59, številka 1, strani 1–40

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Z NAJMANJ TRUDA NA ŠMARNO GORO!

GAŠPER JAKLIČ[1,2,3], TADEJ KANDUČ[4],
SELENA PRAPROTNIK[2] IN EMIL ŽAGAR[1,2]

[1]Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
[2]Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
[3]Primorski inštitut za naravoslovne in tehnične vede, Univerza na Primorskem
[4]Turboinštitut

Math. Subj. Class. (2010): 41A05, 41A15, 65D05, 65D07, 65D17

Iskanje krivulje na ploskvi z danimi omejitvami je v splošnem težak problem. Nanj naletimo npr. v gradbeništvu pri gradnji cest in železnic po razgibanem terenu. V tem članku se bomo omejili na problem iskanja vzpona na goro, pri katerem porabimo najmanj energije.

Dane so diskretne meritve terena, na podlagi katerih s pomočjo makroelementov konstruiramo gladek opis reliefa. Energijski funkcional definiramo v odvisnosti od naklona in dolžine poti. Z izračunom energije na robovih polinomskih ploskev zastavljeni problem prevedemo na diskretni problem iskanja najcenejše poti na mreži polinomskih krivulj. Numerični rezultati kažejo, da se dobljene poti dobro ujemajo z naravnimi, kar predstavimo na primeru realnih podatkov.

OPTIMAL MOUNTAIN ASCENT

Finding a curve on the surface with constraints is a difficult problem frequently encountered in civil engineering at road and railway construction. In this article, an optimal mountain ascent (in the sense of energy consumption) will be considered.

Discrete terrain data are given. A smooth terrain description is constructed using macroelements. An energy functional which depends on terrain inclination and on path length, is defined. By computing energy on the boundaries of polynomial patches, the problem transforms into a discrete problem of finding the cheapest path on a mesh of polynomial curves. Numerical results indicate that the resulting paths are good approximations of the natural routes. Some examples on real data are presented.

Uvod

Iskanje optimalne poti med danima točkama na ploskvi je težak problem. Prva težava je predstavitev ploskve in s tem povezan zapis iskane krivulje, vložene na ploskev. Druga težava je kriterij optimalnosti. Tu običajno krivulji pripišemo energijski funkcional, s katerim utežimo dele krivulje glede na izbrani kriterij. Bralec lahko več o energijskih funkcionalih krivulj in ploskev izve v [2] ali [7].

Problem je zelo zanimiv v praksi, na primer pri načrtovanju ceste ali železnice po razgibanem terenu. Tu je treba upoštevati več faktorjev, kot so omejitve naklona, radija ovinkov, geomorfološke lastnosti terena, cena gradnje, ki je višja tam, kjer je treba graditi mostove in tunele, optimizacijo pri gradnji (izkop materiala, transport na drugo lokacijo in uporaba za zasipanje).

V članku bomo obravnavali bolj enostaven problem, načrtovanje optimalne planinske poti na vrh gore. Kriterij za optimalnost bo poraba energije. Dobre planinske poti potekajo po naravnih prehodih, strme dele premagajo z vzpenjanjem v ključih [4]. Predpostavili bomo, da strmina optimalne poti ni večja od 45° in s tem ostali v mejah pohodništva. Med klasične kriterije optimizacije sicer spadajo zahteve, da je dolžina poti najkrajša, da je čas vzpona minimalen, da je poraba energije (kalorij) čim manjša. Bralec lahko nekaj o tem prebere v [5].

Zvezni variacijski problem iskanja optimalne poti bomo aproksimirali z reševanjem diskretnih problemov. Površja hriba ne moremo opisati eksaktno, saj imamo običajno dano samo mrežo geodetskih podatkov, ponavadi točk (x_i, y_i, z_i). Zato je prvi korak interpolacija danih podatkov s primerno ploskvijo, za kar bomo uporabili posebno vrsto nedavno razvitih dvorazsežnih zlepkov, makroelemente [6, 3]. Optimalno pot bomo iskali na krivočrtni mreži njihovih robov.

S pomočjo energijskega funkcionala bomo izračunali porabo energije po robovih. Optimizacijski problem bomo tako prevedli na diskretni problem iskanja najcenejše poti v omrežju, ki ga bomo ugnali z znanim Dijkstrovim algoritmom.

Interpolacijski problem in makroelementi

V praksi terena nimamo danega v zaključeni obliki s predpisom. Običajno v naravi izmerimo diskretne podatke, iz katerih nato aproksimiramo teren. Relief območja določimo iz točk v prostoru $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3,\ i = 1, 2, \ldots, V$. Eden od načinov je iskanje interpolacijske ploskve, torej take, ki poteka skozi dane točke. Običajno jo zapišemo v obliki odsekoma linearne ploskve, saj je taka konstrukcija najbolj enostavna za uporabo. Vendar pa v tem primeru dobimo le zvezno ploskev in za dobro aproksimacijo potrebujemo veliko meritev. Ker bomo študirali krivulje, vložene na ploskev, potrebujemo večjo fleksibilnost. Namesto linearnih bomo uporabili odsekoma polinomske ploskve (zlepke) višjih stopenj. Tako lahko dobimo ploskev, ki je vsaj zvezno odvedljiva, zato bodo tudi iskane krivulje bolj naravnih oblik.

Zapišimo problem natančneje. Konveksno ovojnico danih točk $\boldsymbol{v}_i := (x_i, y_i)$ v ravnini označimo z Ω.

Definicija 1. Funkciji

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

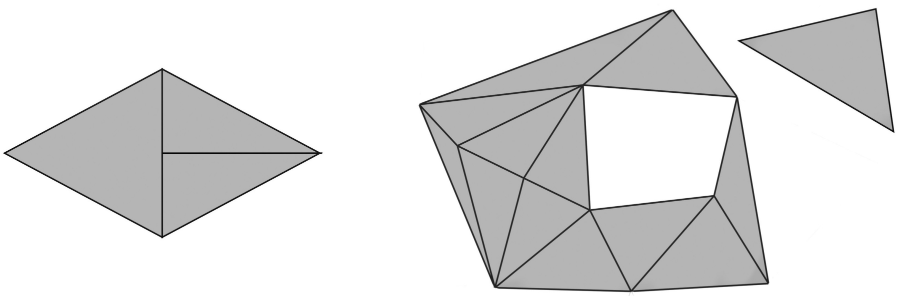
ki zadošča pogojem

$$f(\boldsymbol{v}_i) = z_i, \quad i = 1, 2, \ldots, V,$$

pravimo *interpolacijska funkcija.*

Razdelitvi območja Ω na trikotnike z oglišči v točkah $\boldsymbol{v}_i$ pravimo *triangulacija* območja Ω.

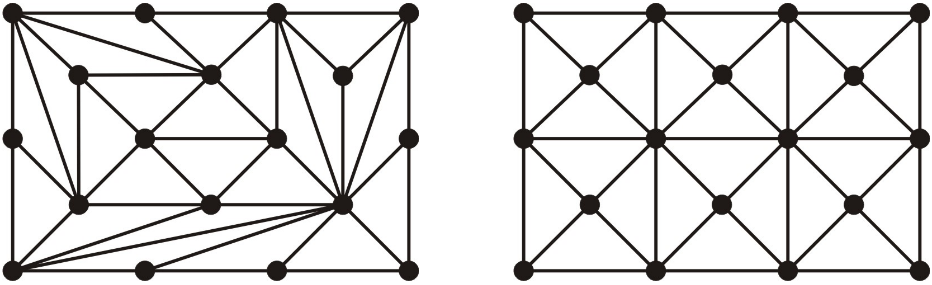
Definicija 2. Triangulacija je *regularna*, če je neprazen presek poljubnih dveh različnih trikotnikov bodisi skupno oglišče bodisi skupna stranica.



Slika 1. Leva množica ni regularna triangulacija, desna je.

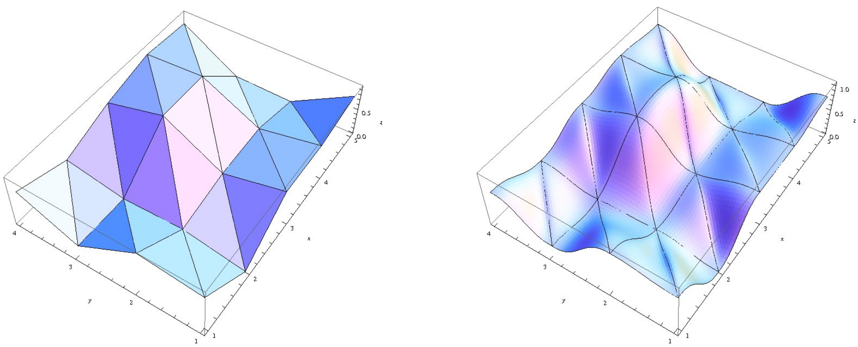
Na sliki 1 sta prikazana primera neregularne in regularne triangulacije. Triangulacijo na točkah $\boldsymbol{v}_i$ lahko izberemo na več načinov. Na sliki 2 sta prikazani dve različni regularni triangulaciji na istih točkah. Desna triangulacija je bolj simetrična. Izkaže se, da je zaradi numerične stabilnosti bolje izbirati triangulacije s trikotniki, ki povezujejo bližnje točke in nimajo premajhnih notranjih kotov. Izbira triangulacije močno vpliva na obliko interpolacijske ploskve.

Nad dano triangulacijo želimo konstruirati gladko interpolacijsko funkcijo, katere zožitev na poljuben trikotnik triangulacije je dvorazsežni polinom predpisane stopnje. Razredu takih funkcij pravimo *zlepki.*



Slika 2. Dve različni triangulaciji istega območja glede na dane točke v ravnini. Desna triangulacija je za interpolacijo primernejša.

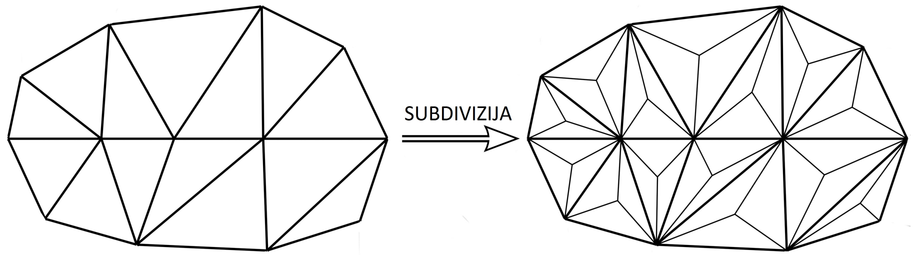
Glavne težave, ki nastanejo pri konstrukciji zlepka, so obstoj in enoličnost interpolanta, praviloma je treba reševati velik sistem linearnih enačb, oblika zlepka pa ni odvisna samo od bližnjih podatkov (sprememba enega interpolacijskega podatka lahko vpliva na obliko celotnega zlepka). Omenjenim težavam se izognemo tako, da za reševanje problema uporabimo poseben razred gladkih zlepkov, *makroelemente* (slika 3). Makroelementi so odsekoma polinomske funkcije, pri katerih se polinomi, definirani na sosednjih trikotnikih triangulacije, „zlepijo“ gladko (po navadi vsaj enkrat zvezno odvedljivo), obenem pa je konstrukcija posameznih polinomskih delov lokalna. To pomeni, da polinomsko funkcijo, ki definira del makroelementa nad izbranim trikotnikom, določimo samo na podlagi podatkov nad tem trikotnikom. Nad stranico, ki je skupna sosednjima trikotnikoma, uporabimo



Slika 3. Zvezen linearen interpolant (levo) in C^1 gladek makroelement (desno).

enake podatke za konstrukcijo obeh sosednjih polinomov. Zlepek je tako odvisen le od lokalnih podatkov, pri reševanju interpolacijskega problema pa je treba reševati le majhne sisteme linearnih enačb.

Dodatna prednost makroelementov je tudi enostaven in učinkovit postopek *subdivizije*, tj. razbitja obstoječe ploskve na več manjših delov. Eno izmed možnih subdivizij zlepka dobimo tako, da vsak trikotnik triangulacije razbijemo na tri trikotnike (slika 4), kar razdeli tudi pripadajočo polinomsko ploskev. Ker z vsakim korakom subdivizije povečujemo število robnih krivulj, lahko omenjeni postopek uporabimo za povečevanje natančnosti optimalne poti.



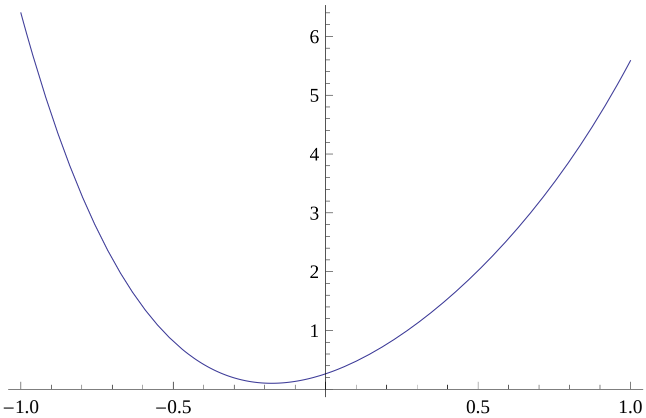
Slika 4. Osnovna triangulacija (levo) in en korak subdivizije (desno).

Energijski funkcional

Robne krivulje makroelementa so polinomske krivulje. Zanima nas energija, ki jo porabimo za premik vzdolž ene od njih. Označimo porabo energije na enotsko dolžino poti z M. Očitno je funkcija M odvisna od naklona terena v smeri gibanja in ni simetrična glede na gibanje po klancu navzgor ali navzdol. Intuitivno je najlažje gibanje po rahlem klancu navzdol, pri velikih naklonih pa je gibanje navzgor lažje od gibanja navzdol. Z aproksimacijo empiričnih meritev po metodi najmanjših kvadratov [4] dobimo porabo energije za povprečnega pohodnika v obliki

$$M(s) = 0.2635 + 1.737\, s + 4.237\, s^2 - 2.143\, s^3 + 1.493\, s^4.$$

V zgornji izražavi je s tangens naklonskega kota terena v smeri gibanja, M pa merimo v kJ/m. S slike 5 vidimo, da se M obnaša po predvidevanjih. Iz



Slika 5. Graf porabe energije na meter prehojene poti (kJ/m) v odvisnosti od naklona poti. Pozitivni naklon pomeni gibanje po klancu navzgor.

izkušenj pričakujemo, da bomo pri nekem kritičnem naklonu začeli hoditi v ključih, da bi se izognili prestrmi poti, in bomo kljub nekoliko daljši poti prihranili pri celotni porabi energije. Analiza poti s konstantnim naklonom to potrdi [4]. Pri hoji navzgor je kritični naklonski kot enak 15.6°, pri hoji navzdol pa 12.5°.

Naj bo $\boldsymbol{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, kjer je $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$ vektorska funkcija parametra $t \in [0,1]$, robna krivulja makroelementa. Naklon φ pri gibanju po krivulji seveda ni konstanten, zato moramo uporabiti infinitezimalne premike. Prispevek energije E na delu loka krivulje $d\ell$ je enak

$$dE(\boldsymbol{r}) = M(s(t))\, d\ell,$$

kjer je

$$s(t) = \tan\varphi(t) = \frac{\dot{r}_z(t)}{\sqrt{\dot{r}_x^2(t) + \dot{r}_y^2(t)}}.$$

Iz diferencialne geometrije vemo, da je

$$d\ell = \|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|\, dt,$$

zato je poraba energije po celotni krivulji enaka integralu

$$E(\boldsymbol{r}) = \int_0^1 M(s(t))\, \|\dot{\boldsymbol{r}}(t)\|\, dt.$$

Tako izpeljani funkcional je posplošitev funkcionala, uporabljenega v [4] za primer konstantnega naklona.

Reševanje optimizacijskega problema

Z definiranjem energijskega funkcionala v prejšnjem razdelku lahko zastavljeni problem iskanja optimalne poti vzpona prevedemo na iskanje najcenejše poti v grafu. Ta problem je dobro poznan in ga zlahka uženemo z Dijkstrovim algoritmom, ki je opisan v naslednjem razdelku.

Graf, ki ga kot vhodni podatek zahteva Dijkstrov algoritem, je kar triangulacija na točkah $\boldsymbol{v}_i$. Točke grafa so oglišča trikotnikov, povezave grafa pa so njihove stranice. Vsaki povezavi e določimo ceno w_e s pomočjo energijskega funkcionala, tako da je $w_e = E(\boldsymbol{r})$, kjer je $\boldsymbol{r}$ krivulja na ploskvi nad stranico, ki ustreza povezavi e.

Omenimo še, da smo izbrali triangulacijo, ki je čim bolj simetrična, da ne bi prišlo do favoriziranja smeri. Triangulacije so podobne triangulaciji s slike 2, desno. Tako zagotovimo tudi morebitno hojo v ključih.

Dijkstrov algoritem

Dana sta usmerjen graf $G = (V, E)$, kjer sta V množica točk in E množica povezav, ter začetna točka s. Vsaka povezava e ima ceno $w_e \geq 0$. (Cena v praksi lahko pomeni dolžino poti med krajiščema povezave, ceno prevoza po poti med krajiščema, ...) Cena poti P je vsota cen vseh povezav v P. Algoritem določi najcenejšo pot od s do vsake druge točke grafa G.

Definiramo množico S točk u, za katere smo že določili dolžino najcenejše poti $c(u)$ od točke s. To je „raziskani“ del grafa. Na začetku je $S = \{s\}$ in $c(s) = 0$. Za vsako točko $v \in V - S$ določimo najcenejšo pot, ki jo lahko dobimo tako, da potujemo po raziskanem delu S do neke točke u in po povezavi od u do v. Torej opazujemo količino

$$c'(v) = \min_{\substack{e=uv:\\ u\in S}} \big(c(u) + w_e\big).$$

Izberemo točko $v \in V - S$, za katero je ta količina najmanjša, dodamo v v množico S in definiramo $c(v) = c'(v)$. Zapomnimo si tudi povezavo uv, na kateri je bil dosežen minimum. Iz teh povezav potem rekonstruiramo najcenejšo pot.

Najcenejšo pot P_v od s do v dobimo tako, da začnemo v v, se premaknemo po povezavi, ki smo jo shranili za v, proti u. Zdaj se premaknemo po povezavi, ki smo jo shranili za u. Postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do točke s.

Več o Dijkstrovem algoritmu je zapisano v [1].

Numerični primeri

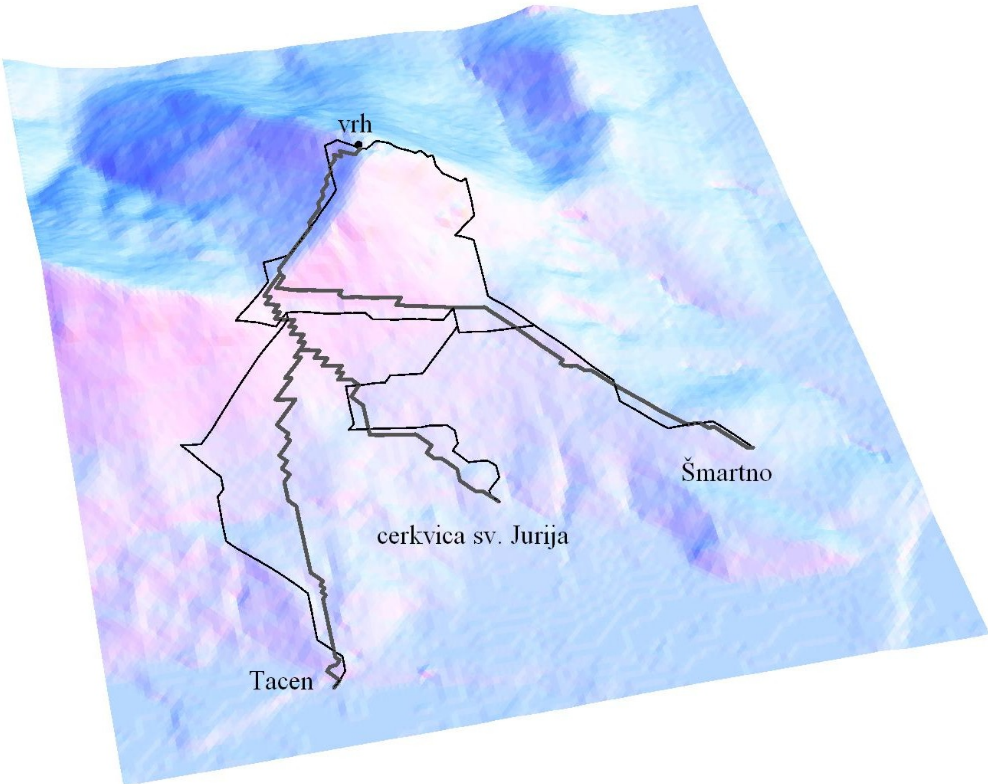
Za konec si oglejmo primer optimalnih poti na Šmarno goro (slika 6). Iz približno 40.000 podatkov s terena, pridobljenih iz javne baze, smo nad triangulacijo, ki jo dobimo tako, da vsakemu elementu pravokotne mreže dodamo diagonali (slika 2, desno), konstruirali kubični C^1 interpolacijski zlepek. Za tri priljubljena izhodišča poti na Šmarno goro smo izračunali optimalne poti in jih primerjali z dejanskimi. Tabela 1 prikazuje porabo energije pri vzponu po posamezni poti. Izkaže se, da se izračunane poti dobro ujemajo s potmi v naravi. Na bolj strmih predelih poti se pričakovano pojavijo ključi.

Pot iz Tacna čez Spodnjo kuhinjo zavije levo od optimalne poti, predvidevamo, da zaradi njenega naklona. Za nedeljske sprehajalce je pot pri Spodnji kuhinji prestrma in prezahtevna zaradi korenin, zato naredi ovinek. Pot, ki jo vrne naš algoritem, je bolj direktna in podobna poti, ki velja za tekmovanje „Rekord Šmarne gore“.

Romarska pot z optimalne poti zavije desno, kjer se pridruži Šmarski poti. Del optimalne poti, ki ga izpusti, je precej strm in ni preveč primeren za starejše ljudi ali ljudi z manj kondicije. Romarska pot je tako v celoti bolj naporna (ker je daljša), vendar bolj položna od optimalne.

Partizanska pot se začne v Šmartnem in nadaljuje ves čas naravnost proti vrhu, medtem ko optimalna pot poteka zelo podobno Šmarski poti (ki se na sedlu pridruži preostalim potem). Tak rezultat ne preseneča, saj so Partizansko pot uporabljali kurirji med drugo svetovno vojno, ki so želeli biti na vrhu v čim krajšem času, ne pa z najmanj porabljene energije.

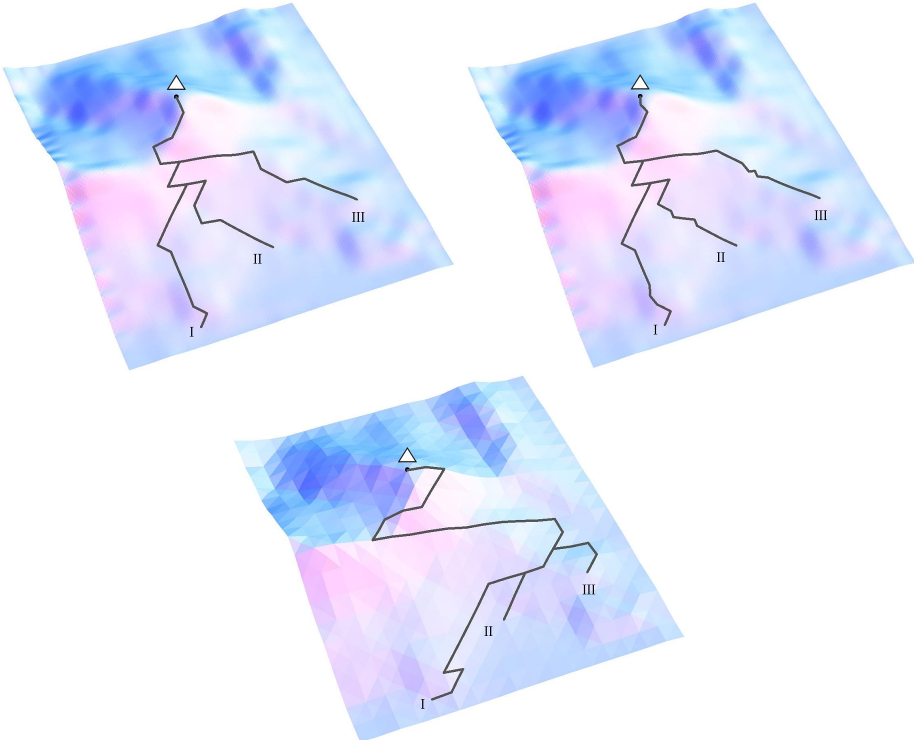
Dober oris optimalnih poti dobimo že iz bistveno manj podatkov. Če vzamemo približno 900 podatkov s terena, se optimalne poti (slika 7, levo) dobro ujemajo s potmi s slike 6. S subdivizijo površine lahko pridemo do še boljših rezultatov (slika 7, desno). Na sliki 7, spodaj, vidimo, da odsekoma linearna ploskev preslabo aproksimira pravi relief, zato dobljene optimalne poti niso dobre.



Slika 6. Slika Šmarne gore, nekaj najbolj priljubljenih (tanke črne črte) in izračunanih optimalnih poti (debele sive črte).

Izhodišče	Pot	Poraba (kJ)	Prihranek (kJ)	Razlika (%)
Tacen (čez Sp. kuhinjo)	prava optimalna	1589 1403	186	11,7
c. sv. Jurija (Romarska pot)	prava optimalna	1484 1252	232	15,6
Šmartno (Šmarska pot)	prava optimalna	1403 1250	153	10,9
Šmartno (Partizanska pot)	prava optimalna	1456 1250	206	14,1

Tabela 1. Poraba energije pri vzponu na Šmarno goro.



Slika 7. Optimalne poti na grobi mreži (levo), na mreži po enem koraku subdivizije (desno) in na odsekoma linearni ploskvi (spodaj).

LITERATURA

[1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest in C. Stein, *Introduction to Algorithms*, Third Edition, The MIT Press, 2009.

[2] G. Jaklič in E. Žagar, *Shape preserving interpolation by spatial cubic G^1 splines*, Annali dell'Universita di Ferrara, 54(2), 259–267, 2008.

[3] T. Kanduč, *Makro elementi*, Univerza v Ljubljani, FMF, diplomsko delo, 2009.

[4] M. Llobera in T. Sluckin, *Zigzagging: Theoretical insights on climbing stategies*, J. Theo. Bio, **249**, 206–217, 2007.

[5] T. Schröter in M.-N. Glöckner, *How to Climb a Mountain? Simulating efficient ways to the mountain top*, ECMI Newsletter, **46**, 2009.

[6] L. L. Schumaker in M.-J. Lai, *Spline functions on triangulations*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 2007.

[7] J. Wallner, *Note on curve and surface energies*, Comput. Aided Geom. Design, 24(8–9), 494–498, 2007.

NOV PREIZKUS POSEBNE TEORIJE RELATIVNOSTI

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 03.30.+p

Novi preizkusi posebne teorije relativnosti so imenitni po kakem novem merilnem načinu in ne po tem, da se izidi ujemajo z napovedmi teorije. Zelo natančno merjenje časa je omogočilo preizkus pri hitrosti nekaj deset metrov na sekundo in pri višinski razliki $\frac{1}{3}$ metra.

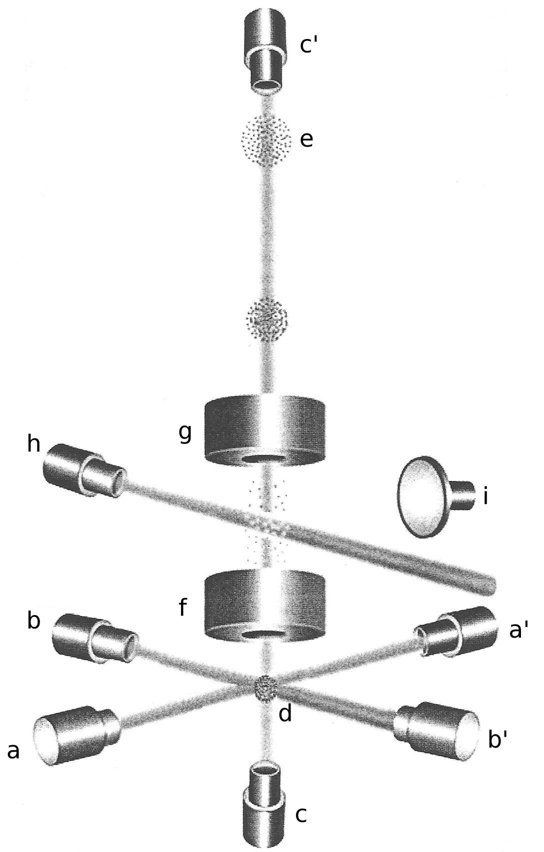
A NEW TEST OF SPECIAL RELATIVITY

New tests of special relativity are noteworthy for some new method of measurement and not for results agreeing with the predictions of the theory. A very accurate measurement of time has made possible tests at speeds of some tens of meters per second and a height difference of $\frac{1}{3}$ meter.

Današnji fiziki ne dvomijo o posebni teoriji relativnosti. Njen preizkus zbudi pozornost po kaki drugi posebnosti, ne po tem, da se izid sklada z napovedmi. Novi preizkus je omogočilo zelo natančno merjenje časa [1].

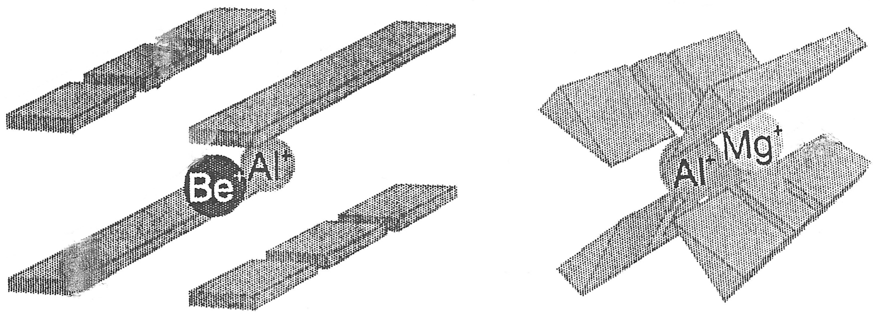
Natančno merijo čas z uro s curkom atomov cezija (slika 1) [2]. Cezijeve atome iz izvira ohladijo s tremi pari nasprotno usmerjenih laserskih curkov, pravokotnih drug na drugega. To pomeni, da močno zmanjšajo hitrost atomov. Pri ohladitvi na temperaturo 1 μK je povprečna kinetična energija atoma cezija $\frac{3}{2}kT = 2.1 \cdot 10^{-29}$ J $= 1.3 \cdot 10^{-10}$ eV in koren iz povprečnega kvadrata hitrosti $v_{ef} = \sqrt{\overline{v^2}} = 1.4$ cm/s. Iz približno deset milijonov cezijevih atomov nastane gruča, ki se dviga. Dokler niso poznali takega laserskega hlajenja, so se hitri atomi v curku sipali na počasnih in zamisel ni delovala. Gruča cezijevih atomov se v navpični cevi v vakuumski posodi dviga vse počasneje in potem pada. Zaradi podobnosti z vodometom temu pravijo „cezijev vodomet“.

Osnovno stanje atoma cezija je zaradi hiperfine sklopitve spinov jedra in elektrona razcepljeno. V stanju z večjo energijo sta spin $\frac{7}{2}$ jedra ^{133}Ce in spin elektrona vzporedna, tako da je spinsko kvantno število atoma $F = 4$, v stanju z manjšo energijo pa nasprotno vzporedna, tako da je $F = 3$. Gruča gre pri gibanju navzgor skozi mikrovalovno votlino, v kateri atomi preidejo v stanje $F = 4$, in nato po kaki sekundi pade skozi drugo votlino, v kateri atomi sevajo, ko preidejo v stanje $F = 3$. Potem gručo obsevajo s sedmim, merilnim laserjem in po fluorescenci ugotovijo, koliko atomov je prešlo iz



Slika 1. Okvirna risba ure na „cezijev vodomet“. V presečišču treh pravokotnih parov laserskih curkov (a-a’, b-b’, c-c’) hladijo curek cezijevih atomov. Nastane gruča (d), ki se počasi dvigne, obmiruje (e) in pade. V mikrovalovni votlini (f) preidejo atomi v vzbujeno stanje in v mikrovalovni votlini (g) sevajo. Nato gručo obsevajo z merilnim laserjem (h) in zaznavajo fluorescentno svetlobo z merilnikom (i) [2].

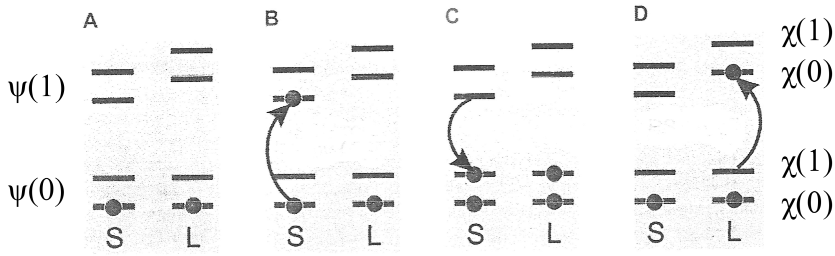
začetnega stanja v končno. Povratna vez poskrbi, da je teh atomov čim več, in s tem zagotovi, da ima elektromagnetno valovanje kolikor mogoče natančno frekvenco $9\,192\,631\,770\ \mathrm{s}^{-1}$. To frekvenco, ki ji ustreza valovna dolžina približno 3.26 cm, vsebuje dogovor o sekundi. Časovni razmik merijo s štetjem nihajev. Za relativno nenatančnost frekvence ur te vrste navajajo $3.4 \cdot 10^{-16}$.



Slika 2. Linearna kvadrupolna past za iona $^{27}Al^{+}$ in $^{9}Be^{+}$ (levo) ter iona $^{27}Al^{+}$ in $^{25}Mg^{+}$ (desno). Pasti imata pozlačene elektrode, prva iz aluminija, druga iz zlitine bakra in berilija. V drugi sta iona oddaljena 0.4 mm od ostrin. Leta 1953 sta Helmut Steinwedel in Wolfgang Paul predlagala uporabo v kvadrupol razvrščenih podolgovatih elektrod s statičnim in radiofrekvenčnim električnim poljem v masnem spektrometru. Paul je razvil enodimenzionalno in tridimenzionalno past in si leta 1989 s Hansom Dehmeltom delil polovico Nobelove nagrade. – Aluminijeve atome iz izvira ionizira diodni laser pri valovni dolžini 369 nm, magnezijeve atome iz izvira pa barvni laser s podvojeno frekvenco pri valovni dolžini 285 nm [3].

V ameriškem Državnem inštitutu za standarde in tehnologijo NIST, nekdanjem Državnem uradu za standarde NBS, v Boulderju v zvezni državi Kolorado so v zadnjih letih razvili natančnejšo uro [3], [4]. V njej uporabijo optične prehode osamljenega iona. Ion aluminija $^{27}Al^{+}$ ujamejo v linearno kvadrupolno past in ga v njej zadržujejo s statičnim in radiofrekvenčnim poljem (slika 2). Izkoristijo prehod med stanjema $^1S_0$ in $^3P_0$ s frekvenco $1.121 \cdot 10^{15}$ s^{-1} ali valovno dolžino 267.6 nm na ultravijoličnem območju. Aluminijev ion ima dva zunanja elektrona – kot helijev atom. Atom z dipolnim prehodom iz stanja v singletnem delu spektra ^1S ne more preiti v stanje v tripletnem delu spektra ^3P. Zato je razpadni čas zelo dolg, $\tau = 20$ s, in razpolovna širina $\nu_{1/2} = 1/(2\pi\tau) = 8 \cdot 10^{-3}$ s^{-1} zelo majhna.

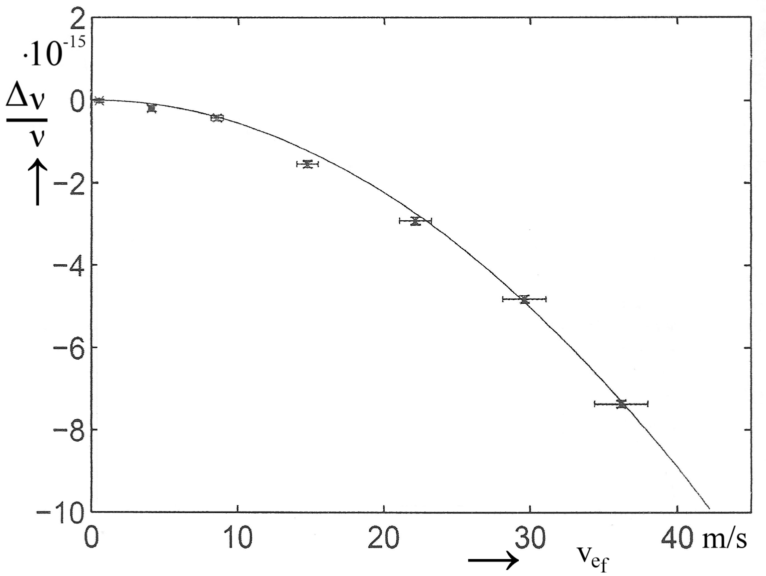
Aluminijev ion nima pripravnega prehoda, ki bi ga bilo mogoče izkoristiti za lasersko hlajenje. Zato v past poleg aluminijevega iona ujamejo še berilijev ion $^{9}Be^{+}$, ki ima tak prehod. Z laserskim curkom ohladijo berilijev ion, ki prek Coulombove sile s *sinhronskim hlajenjem* ohladi še aluminijev ion. Način je bilo mogoče uporabiti, ko so s stabiliziranimi laserji dosegli manjšo širino črte od 1 s^{-1}. Za relativno nenatančnost frekvence za uro z aluminijevim in berilijevim ionom navajajo $2.3 \cdot 10^{-17}$.



Slika 3. Kvantna logična spektroskopija (shematično). Spektroskopski ion $^{27}Al^+$ opišemo z notranjima elektronskima stanjema, osnovnim $\psi_S(0)$ in vzbujenim $\psi_S(1)$ in logični ion $^9Be^+$ ali $^{25}Mg^+$ podobno z osnovnim stanjem $\psi_L(0)$ in vzbujenim stanjem $\psi_L(1)$. Gibanje ionov v pasti opišemo s stanjema harmoničnega oscilatorja, osnovnim $\chi(0)$ in vzbujenim $\chi(1)$. S hlajenjem dosežejo začetno stanje ionov $\psi_S(0)\psi_L(0)\chi(0)$ (A). Prvi sunek laserske svetlobe s frekvenco blizu resonančne frekvence povzroči prehod spektroskopskega iona in prevede iona v sestavljeno stanje $(\alpha\psi_S(0) + \beta\psi_S(1))\psi_L(0)\chi(0) = (\alpha\psi_S(0)\chi(0) + \beta\psi_S(1)\chi(0))\psi_L(0)$ (B). Pri tem je $|\alpha|^2$ verjetnost, da je spektroskopski ion v osnovnem stanju, in $|\beta|^2 = 1 - |\alpha|^2$ verjetnost, da je v vzbujenem stanju. Drugi sunek laserske svetlobe z manjšo frekvenco povzroči prehod spektroskopskega iona in prevede iona v stanje $(\alpha\psi_S(0)\chi(0) + \beta\psi_S(0)\chi(1))\psi_L(0)\psi_S(0)(\alpha\chi(0) + \beta\chi(1))\psi_L(0)$ (C). Naposled tretji sunek laserske svetlobe z manjšo frekvenco povzroči prehod logičnega iona in prevede iona v stanje $\psi_S(0)\chi(0)(\alpha\psi_L + \beta\psi_L(1))$ (D). Tako dosežejo, da stanje spektroskopskega iona preide v stanje logičnega iona z nespremenjenima konstantama α in β. Končno sunek laserske svetlobe povzroči fluorescentno sevanje logičnega iona v stanju $\psi_L(0)$. Frekvenco prvega laserskega curka spreminjajo okoli resonančne frekvence in s fluorescenco otipajo resonančno krivuljo. S povratno vezjo z akusto-optičnimi modulatorji dosežejo, da je frekvenca čim bliže resonanci. Kvantna logična spektroskopija je pomembna kot osnova kvantnega računanja. Po [5].

Pozneje so izdelali podobno uro z magnezijevim ionom $^{25}Mg^+$ namesto berilijevega iona. Magnezijev ion ima maso, ki se manj razlikuje od mase aluminijevega iona, zato je sinhronsko hlajenje učinkovitejše. Izboljšali so še nekaj drugih lastnosti, tako da za relativno nenatančnost frekvence za uro z aluminijevim in magnezijevim ionom navajajo $8.6 \cdot 10^{-18}$.

Drugi ion, berilijev ali magnezijev, *logični ion*, ima še drugo vlogo. Med prostima pozitivnima ionoma deluje odbojna sila, iona pa se v polju pasti privlačita. Ta sklopitev, ki jo izkoristijo tudi za hlajenje aluminijevega, *spektroskopskega* iona, omogoči, da z obsevanjem ionov s sunki laserske svetobe po premišljenem načrtu prek stanja drugega iona ugotovijo stanje aluminijevega iona. Dokaj zapleteni postopek je znan kot *kvantna logična spektroskopija* (slika 3).



Slika 4. Točke kažejo izmerjeno relativno spremembo frekvence v odvisnosti od efektivne hitrosti v_{ef}. Črtice zaznamujejo efektivno napako pri merjenju te hitrosti. Spremembi hitrosti za 1 m/s ustreza sprememba amplitude nihanja za 3.8 nm [4].

Pri preizkusu so tek ure z aluminijevim in berilijevim ionom primerjali s tekom ure z aluminijevim in magnezijevim ionom. Uri sta bili v različnih laboratorijih. Primerjavo so izvedli po 75 m dolgem svetlobnem vodniku, v katerem so posebej zmanjšali motnje. Pred tem so v pasti ure z aluminijevim in magnezijevim ionom malo spremenili statično električno polje. Zaradi tega je aluminijev ion zašel malo iz središča pasti v radiofrekvenčno polje in nihal z njegovo frekvenco $\nu_r = 59$ MHz. S spreminjanjem statičnega električnega polja so vplivali na amplitudo nihanja iona s_0 in s tem na amplitudo hitrosti $2\pi\nu_r s_0$ in efektivno hitrost $v_{ef} = 2\pi\nu_r s_0/\sqrt{2}$. Ura z aluminijevim in magnezijevim ionom kaže čas T' in ura z aluminijevim in berilijevim ionom čas T. Čas ure T' z nihajočim ionom s časom ure T, v kateri ion miruje, veže enačba za *podaljšanje časa*:

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = T(1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{v_{ef}^2}{c^2})\,.$$

Efektivna hitrost iona je zelo majhna v primeri s svetlobno hitrostjo, zato smo koren razvili v vrsto, upoštevali samo dva člena in kvadrat hitrosti nadomestili s kvadratom efektivne hitrosti. Vzemimo, da povezuje enačba nihajna časa. Za frekvenci, to je obratni vrednosti nihajnih časov, velja potem enačba: $\nu' = \nu(1 - \frac{1}{2}v_{ef}^2/c^2)$. Za relativno razliko frekvenc dobimo:[1]

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = -\frac{1}{2}\frac{v_{ef}^2}{c^2}\,.$$

Merjenja so podprla to enačbo (slika 4). Pri tem nismo omenili nekaterih podrobnosti.

V nadaljevanju poskusa so spremenili višino ene od ur. To sodi v splošno teorijo relativnosti, v kateri je frekvenca ure odvisna od gravitacijskega potenciala ϕ [6]:

$$\nu' = \nu\left(1 + \frac{\phi' - \phi}{c^2}\right) = \nu\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)\,.$$

Pri tem smo upoštevali, da je v majhni višinski razliki v bližini Zemlje razlika gravitacijskih potencialov $\phi' - \phi = gh$ s težnim pospeškom g in višinsko razliko h.

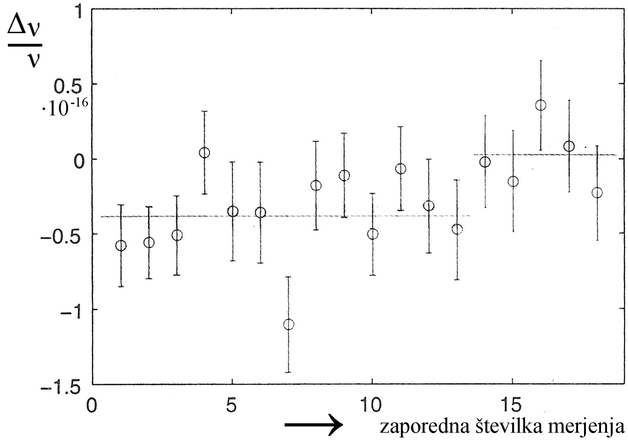
Z laserskim merilnikom višine so ugotovili, da je ura z aluminijevim in magnezijevim ionom 17 cm pod uro z aluminijevim in berilijevim ionom. V tem položaju so merili frekvenco ν skoraj 28 ur. Potem so uro z aluminijevim in magnezijevim ionom dvignili za 33 cm in merili frekvenco ν' 11 ur. Za relativno razliko frekvenc so dobili $(\nu' - \nu)/\nu = (4.1 \pm 1.6) \cdot 10^{-17}$ (slika 5). Iz tega izračunamo po zapisani enačbi višinsko razliko (37 ± 15) cm, kar se zadovoljivo ujema s 33 cm. Merjenje te vrste bi lahko postalo koristno v geologiji in hidrologiji, če bi uspelo še nekoliko povečati natančnost. Tedaj bi bilo mogoče narediti mrežo merilnih postaj, ki bi natanko opredelile geoid in odmike od njega.

Veliko natančnejši preizkus posebne teorije relativnosti so naredili z ioni litija $^7Li^+$ leta 2007. Ioni so krožili v nakopičevalnem obroču in so jih uporabili kot gibajoče se optične ure [7]. Pri hitrosti ionov $0.03c$ in $0.064c$ se je izid na $8.4 \cdot 10^{-8}$ natančno ujemal z napovedjo teorije.

Opisani preizkus je bil manj natančen, a je pokazal, kako posebna in splošna teorija relativnosti sežeta do vsakdanjih hitrosti in višinskih razlik. Izvedba poskusa pa je zahtevala zapletene merilne naprave in postopke.

Ob tem se spomnimo preizkusa, ki sta ga leta 1960 izvedla R. V. Pound in G. A. Rebka z brezodrivnim sevanjem γ pri Mössbauerjevem pojavu.

[1] Lahko bi ubrali bližnjico. V splošnem velja za Dopplerjev pojav enačba: $\nu' = \nu(1 - v\cos\varphi/c)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, v kateri je φ kot med zveznico ionov in smerjo valovanja. Enačbo razvijemo v vrsto do kvadratnih členov $\nu' = \nu(1 - v\cos\varphi/c)(1 + \frac{1}{2}v^2/c^2)$ in povprečimo po hitrosti. Ne glede na kot φ dobimo $\nu' = \nu(1 + \frac{1}{2}v_{ef}^2/c^2)$, ker je za harmonično nihanje $\overline{v} = 0$.



Slika 5. Točke kažejo izmerjeno relativno spremembo frekvence v odvisnosti od višine h ure z aluminijevim in magnezijevim ionom. Prvih 14 meritev ustreza prvotni višini te ure, nadaljnja merjenja pa v 33 cm večji višini. Izmerjena povprečna relativna sprememba frekvence je $(\nu' - \nu)/\nu = (4.1 \pm 1.6) \cdot 10^{-17}$, izračunana pa $gh/c^2 = 3.6 \cdot 10^{-17}$ [4].

Pri tem sta spreminjala temperaturo absorberja in s tem kvadrat efektivne hitrosti nihajočih atomov železa. Namesto tega kvadrata se je v enačbi pojavila temperaturna razlika. Za odvisnost relativne frekvence od temperature sta dobila podobno krivuljo, kot jo kaže slika 4 [8]. Primerjava med člankoma razkrije, kako se je merilna tehnika razvila v petdesetih letih.

LITERATURA

[1] J. B. Goss Levi, *Relativistic effects seen at everyday distances and speeds*, Phys. Today **63** (2010), 16 (11).

[2] C. Bergquist, S. R. Jefferts in D. J. Wineland, *Time measurement at the millennium*, Phys. Today **54** (2001), 37 (3).

[3] C. W. Chou, D. B. Hume, J. C. J. Koelemeij, D. J. Wineland in T. Rosenband, *Frequency comparison of two high-accuracy Al^+ optical clocks*, Phys. Rev. Letters **104** (2010), 070802.

[4] C. W. Chou, D. B. Hume, T. Rosenband in D. J. Wineland, *Optical clocks and relativity*, Science **329** (2010), 1630.

[5] P. O. Schmidt, T. Rosenband, C. Langer, W. M. Itano, J. C. Berquist in D. J. Wineland, *Spectroscopy using quantum logic*, Science **309** (2005), 749.

[6] J. Strnad, *Razvoj fizike*, DZS, Ljubljana 1996, str. 319.

[7] S. Reinhardt, G. Saathoff, H. Buhr, L. A. Carlson, A. Wolf, D. Schwalm, S. Karpuk, Ch. Novotny, G. Huber, M. Zimmermann, R. Holzwarth, T. Udem, T. W. Hänsch in G. Gwinner, *Test of relativistic time dilation with fast optical atomic clocks at different velocities*, Nature Physics **3** (2007), 861.

[8] J. Strnad, *Paradoks ur v teoriji relativnosti*, Obzornik mat. fiz. **9** (1962), 128.

ODZIV NA DVA PRISPEVKA O POUČEVANJU IZ 5. ŠTEVILKE OBZORNIKA

PETER PRELOG

V 5. številki Obzornika 2011 sta izšla dva članka (Babič, Zabret) o slabem stanju v našem šolstvu. Ker se to dogaja hkrati z zanesljivimi znaki svetovne krize, ki bo majhno državo, kot je Slovenija, zagotovo močno prizadela in s tem še dodatno materialno negativno vplivala tudi na šolstvo, me je začudilo to, da v 6. številki Obzornika ni bilo na ta članka nobenega odmeva.

Ko je v Delu nekdo pisal svojevoljne trditve o meritvah svetlobne hitrosti, se je hitro odzval Tomaž Podobnik s FMF, ki se je kot strokovnjak (fizik) čutil DOLŽNEGA (ljudem, bralcem) stvari postaviti na pravo mesto. Tudi naša avtorja sta začutila potrebo, dolžnost, opozarjati javnost; zakaj sedaj ni strokovnega odziva? Imam neprijeten občutek, da pri nas ni strokovnjakov, ki bi SE ČUTILI DOLŽNE (ljudem, staršem, učencem, učiteljem, ...) V ŠOLI karkoli postavljati na pravo mesto. Pri tem ne mislim na ministra za šolstvo z njegovim birokratskim aparatom vred – ta je trenutno tako in tako omrtvičen – ki pa tudi sicer ne more dajati idejnih rešitev, lahko jih samo izvršuje. Ideje za smiselno šolstvo lahko prihajajo od vsepovsod in jih je treba tudi resno upoštevati – toda najglobljе in najpametnejše rešitve vendar pričakujemo od strokovnjakov za šolo, od tistih v vrtcu, prek osnovnih, srednjih šol, fakultet do inštitutov, do učiteljev, ki učijo učitelje. Kje so, ne berejo Obzornika? Ne „vidijo“ šolstva? Je tudi že učiteljem vseeno, kaj se dogaja? Že sporočilo, da naš maturant „nima pojma“, kaj je kocka, sproža obilo vprašanj: kako je mogoča pred maturo taka miselnost, tak način pogovora s profesorico, da ne omenim še (ne)znanja, ... Iz Babičevega članka se vidi, da je zaradi prenapihnjenosti našega pomaturitetnega šolstva zelo verjetno, da bo ta kandidat prej ali slej končal tudi fakulteto in celo doktoriral (si bo pač disertacijo od nekod dal prepisati), direktor lekarn bo še vedno lahko, če je „sposoben za to“, čeprav „nima pojma“, kaj je kocka.

Učence, ki „nimajo pojma“, je nesmiselno ocenjevati, izpraševati na izpitih, maturi, jim dajati spričevala. Če je takih preveč, je nesmiselno šolsko ocenjevanje na sploh. In če ni ocen, zakaj potem sploh hoditi v šolo? Zato, da bi nabirali znanje in našli svoj bodoči poklic? Si s tem znanjem zagotovili zaposlitev in materialno podlago za svoje življenje, za življenje svoje bodoče družine? Toda to so zaprašeni starinski ideali, ki ne veljajo več in mladim nič ne pomenijo, zanje so odločilna stališča njihovega najstniškega okolja, ki je do kakršnegakoli šolskega prizadevanja odklonilno. Vprašanje – „se grebeš za ocene?“ – lahko deaktivira tudi najsposobnejšega učenca, za manj sposobne pa je pravi blagoslov za nedelavnost. Seveda bodo kljub temu vsi še naprej hodili v šolo, na študij, tam je njihova druščina – učiti pa se tako in tako ni treba, saj lahko vedno odgovoriš „nimam pojma“!

Toda tudi odrasli prepogosto odrekajo šoli vzgojno in izobraževalno vrednost. Vse šole, od vrtcev naprej, so po njihovo predvsem varstvene ustanove za cele generacije mladih ljudi, da v času doraščanja ne delajo preveč zgage, da so pod kontrolo. Ta zamisel se pa že krha, dopoldne srečamo v mestu in v lokalih trume šolarjev, ki „so takrat v šoli“ – kar je zanesljivo znamenje, da ta kontrolni sistem razpada. Šola razpada! Seveda je šolstvo kljub temu koristno, v šolstvu in ob njem je zaposlenih ogromno ljudi in vsi zaslužijo: od študentskih servisov (ki potem s tem denarjem, ki so ga „prigarali“, kupujejo Bellevue, podjetja, itd. ...), gradbenih podjetij, ki gradijo vedno nove šole in popravljajo tiste, ki so jih že prej zgradili, ... do zaposlenih v šolskih ustanovah, tam celo učitelji zaslužijo plače. Tudi med profesorji niso priljubljeni tisti kolegi, ki dajejo dosti slabih ocen, s tem odvračajo šolarje od vpisa na to šolo in s tem ogrožajo „delovna mesta“. – Šolarji in njihovo znanje postajata postranski zadevi („v šoli se tako in tako nič ne naučijo“), nagrajujemo in razveseljujemo jih s priznanji in spričevali, od pikapolonic v vrtcih in maturitetnih spričeval do doktoratov. Organiziramo izlete in čuuudovite maturantske plese! Ali ni vse to imenitno? Seveda pa vzdrževanje takega stanja (državo in nas) nekaj stane, „znanje ni zastonj“!

To je posplošena, šablonska slika šolstva, morda pa je v njej nekaj vzpodbude za razmišljanje! Šolski strokovnjaki, tisti, ki mislite, da imate kaj povedati: postavite stvari na pravo mesto, če to zmorete, primerjajte z dejanskim stanjem, pokažite smeri možnih izboljšav! Nakažite jasne smeri izobraževanja novih, modernih učiteljev – saj bodo predvsem oni zmožni uvajati spremembe v šolstvo! Sedanje učitelje na novo motivirajte, da ne bodo hodili v službo samo še zaradi plače in počitnic! O „pedagoškem erosu“ pa raje ne pišite, da tega ne prebere kakšna besna supernapredna mamica in pridrvi z advokati in nas (barabe pokvarjene!) vse spravi na TV, v cajtenge in v arest!

JOŽE ANDREJ ČIBEJ, MATEMATIK IN EKONOMIST (1953–2011)

Malo slovenskih matematikov je zapustilo za seboj tako obsežno delo na toliko različnih področjih (v matematiki, ekonomiji, bančništvu) kot Jože Andrej Čibej, ki nas je zapustil konec prejšnjega leta. V spominu vseh, ki smo ga poznali in z njim sodelovali, ne bo ostal le kot dober strokovnjak in plodovit pisec, temveč tudi kot izjemen predavatelj, duhovit sogovornik, zanesljiv sodelavec in čudovit prijatelj, pronicljiv kritik ter vsestransko razgledan pokončen mož.

Za njim ostaja bogata bibliografija z malo manj kot sedemsto naslovi. Med temi je okoli štirideset izvirnih znanstvenih člankov, več kot deset preglednih znanstvenih člankov, prek sto strokovnih člankov s področja finančne matematike in ekonomije, več monografij ter več priročnikov, zlasti s področja bančništva. Posebej naj omenim še njegovo knjižico *Kako banke računajo obresti*; prav v letu 2011 jo je osvežil in izdal pod naslovom *Kako računati obresti.*

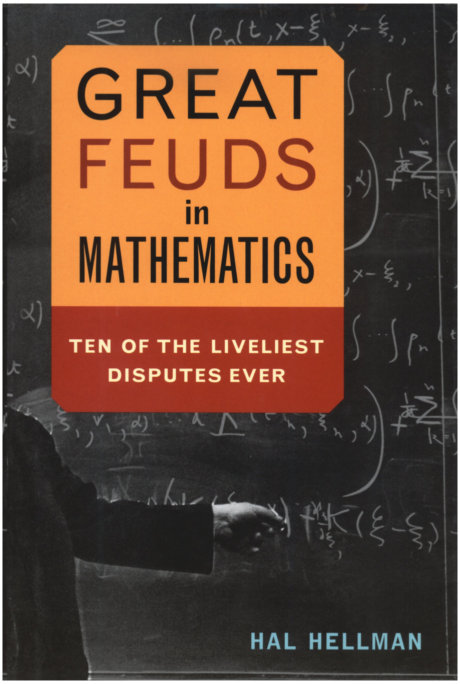
Nepozaben pečat so zapustila tudi njegova razumljiva in duhovita strokovna predavanja za srednješolske in osnovnošolske profesorje matematike. Precej obsežen je njegov opus učbenikov in študijskih gradiv za matematiko za srednje in visoke šole. Med njimi naj izpostavim učbenika za gimnazije *Matematika. Kombinatorika* in *Matematika. Verjetnostni račun in statistika*, ki sta oba doživela veliko ponatisov in predelav. Prav v zadnjih dneh svojega življenja je končal še učbenik *Matematika za poslovno rabo* 1. del.

Omeniti velja tudi njegove številne članke v različnih strokovnih revijah: Bančni vestnik, Ekonomska revija, Revizor, Naše gospodarstvo, Obzornik za matematiko in fiziko, Denar, Finance, Presek in prispevke v časopisu Delo. Posebno izstopajo njegove mesečne kolumne, ki jih je objavljal konec devetdesetih let v Mladini in v njih duhovito komentiral aktualne družbenopolitične dogodke.

V mlajših letih je bil Jože Andrej Čibej član ljubiteljskega gledališča v Trbovljah, igralec, režiser in pisec. Za to svoje delo je leta 1999 prejel priznanje Tončke Čeč. Iz vse njegove bogate pisne zapuščine veje njegova ljubezen do slovenskega jezika, ki se kaže v njegovem izjemno bogatem besednem zakladu, natančnosti in doslednosti.

Milena Strnad

Hal Hellman, Great Feuds in Mathematics, Ten of the Liveliest Disputes Ever, John Wiley & Sons, 2006, 250 str.



Avtor je pred tem izdal tri knjige o velikih sporih: v medicini, naravoslovju in tehniki. Vse so doživele ugoden sprejem, in tako je založba Wiley predlagala, da napiše še knjigo o velikih sporih v matematiki. Hellman nad tem ni bil navdušen. Kot pravi, je poslušal nekaj matematičnih predmetov v okviru magistrskega študija fizike, vendar je bilo to že davno. Predvsem pa ni poznal zgodovine matematike. Matematiko je imel za hladno, logično stroko, kjer nesporazume rešujejo objektivno in dokončno. Drugače od politike, religije in celo naravoslovja naj v matematiki ne bi bilo prostora za čustva in občutljivost. Kako bi lahko obstajali spori v matematiki? Sčasoma pa je spremenil svoje mnenje in ugotovil, da tudi v matematiki sporov ne manjka.

Ta uvod me je malce prestrašil, tako da sem se že spraševal, ali je bilo pametno kupiti to knjigo. Na srečo avtor navaja, da se je posvetoval z več matematiki, s strokovnjaki za zgodovino matematike, brskal po knjižnicah in celo pregledal nekatera originalna dela ali pa si dal prevesti odlomke. Recenziji knjige v Zentralblatt in Math Reviews in ocena, ki jo je napisal poklicni matematik na www.amazon.com, so ugodne, čeprav opozarjajo, da je v njej nekaj spodrsljajev. Eden od recenzentov, zgodovinar matematike, pravi, da so viri ponekod zastareli. Dejstvo je, da avtor ponekod – s pridržki – citira E. T. Bella, čigar že več kot šestdeset let stare in zelo popularne zgodbe o matematikih so pogosto močno prepojene z domišljijo. Knjiga vsebuje veliko citatov, tako originalnih del kot komentarjev matematikov in zgodovinarjev. Formul je malo: avtor je očitno skušal pisati za širšo publiko.

Vsekakor pa je avtor dober pripovedovalec in se je dela lotil profesionalno.

Prvi spor je: **Tartaglia proti Cardanu**. Enačbo $x^3 + ax = b$ je prvi rešil Scipione del Ferro, nekje med 1510 in 1515, vendar rezultata ni objavil. Kasneje je Tartaglia neodvisno prišel do rešitve, tudi bolj splošnih kubičnih enačb. Girolamo Cardano je iz Tartaglie izvlekel nekaj podatkov o tej rešitvi – ni jasno, koliko, saj je bil Tartaglia zelo nezaupljiv – in obdelal vse možne rešitve ter povedal, da ima kubična enačba tri korene, ki so lahko tudi kompleksni. Cardano je imel kasneje dostop do zapuščine Scipia del Ferra in je v knjigi *Ars Magna*, izdani leta 1545 (ki je vsebovala rešitev kubične enačbe) jasno priznal zasluge tako njemu kot Tartagli. Tartaglia je bil vseeno ogorčen in je na smrt zasovražil Cardana. Cardano je bil vsestranski in izredno ustvarjalen človek: zdravnik, izumitelj kardanskega zgloba (ki se imenuje po njem), izumitelj odlične kriptografske metode (Cardanova rešetka), avtor prve knjige o verjetnosti: *De Ludo Aleae* (O igri s kocko). Žal je bil tudi praznoveren in se je ukvarjal z astrologijo. To je izkoristil Tartaglia, ki je leta zbiral obremenilno gradivo, in ga je prijavil inkviziciji. Cardanov lastni sin Aldo je povedal, kje lahko primejo očeta. (Zgodba o Cardanovih potomcih je prava nočna mora.) Tako je Cardano več mesecev preživel v ječi, iz katere ga je rešil nadškof Hamilton.

V naslednjem sporu srečamo **Descartesa in Fermata**. Oba veljata za začetnika analitične geometrije, oba sta, vsak po svoje, izpeljala lomni zakon. Eden od Descartesovih sovražnikov je dobil – brez avtorjevega dovoljenja – rokopis njegove *Razprave o Metodi* in ga dajal naokrog. Dobil ga je tudi Fermat, ki mu ni bila všeč Descartesova izpeljava lomnega zakona. Fermat je, drugače od Descartesa, pravilno domneval, da je hitrost svetlobe v steklu ali vodi manjša od hitrosti v zraku. Lomni zakon je izpeljal iz načela, da svetloba za prehod iz točke v enem mediju do točke v drugem mediju porabi najmanj časa. Napisal je kritiko Descartesove optike, ne da bi vedel, da je rokopis potoval naokrog brez dovoljenja avtorja. Prav tako mu ni bilo znano, da je Descartes v nekem drugem rokopisu napisal obširnejšo razlago lomnega zakona, a je objavo zadržal, ko je zvedel, kako je inkvizicija privila Galilea. Descartesa je Fermatova kritika razbesnela. Izjavil je, da Fermatov ugled temelji na tem, da je parkrat imel srečo pri uganjevanju. (Tudi sicer je bil Descartes precej vzvišen in ohol in je podcenjeval dosežke svojih sodobnikov.) Fermat je bil začetnik matematične analize: znal je določati tangente na krivulje, maksime in minime. Descartes pomena in potenciala

Fermatovega dela ni razumel ali hotel razumeti in se je iz Fermata norčeval kot „gospoda vašega Svetovalca de Maximis et Minimis“. Fermat je bil v polemiki, kot zelo sposoben pravnik, zadržan in subtilen.

Descartes je postal slaven in vpliven predvsem zaradi svoje filozofije, ki je pomenila nov pogled na svet. Fermat je ostal bolj v ozadju in se je kasneje preusmeril v algebro in teorijo števil, ki pa sodobnikov ni pretirano zanimala. Teplo ga je tudi dejstvo, da praktično ni objavljal. Rezultate je sporočal v pismih prijateljem, izjemoma je dal od sebe tudi kak rokopis. Fermat je večje priznanje dobil šele po smrti.

Tretji spor je **Newton proti Leibnizu**. Ta spor je znan in se je vlekel stoletja. Leibniz je prvi objavil razpravo o diferencialnem in integralskem računu (1684). Newton je že precej pred tem imel rokopis o uporabi neskončnih vrst. Nekatere druge Newtonove rezultate o infinitezimalnem računu pa je objavil šele John Wallis v letih 1693–95. Dejstvo je, da je Leibniz leta 1676 prosil Newtona za podatke o zvezi med neskončnimi vrstami in računanjem ploščin, a je dobil vljudne odgovore, ki so se le dotikali vprašanj. So pa govorili o tem, da obstajajo učinkovite metode za računanje ploščin. Newton same metode ni razkril oziroma jo je skril v anagram (nekakšen rebus). Sprva je kazalo, da se je Newton sprijaznil z dejstvom, da ga je Leibniz prehitel z objavo. Leta 1696 je Johann Bernoulli postavil „najbistrejšim svetovnim matematikom“ problem *brahistohrone*, se pravi krivulje, po kateri masna točka pod vplivom težnosti najhitreje pride iz ene dane točke v drugo nižje ležečo (ki pa ne leži natančno pod prvo). Newton je bil eden tistih, ki so pokazali, da je rešitev lok cikloide. Leibniz je leta 1699 komentiral rešitve in jih predstavil kot uporabo svoje metode. To je povzročilo ogenj v strehi v Angliji. Švicarski matematik Duillier, priseljenec v Angliji in Newtonov prijatelj, je ostro napadel Leibniza in zapisal, da je Newton prvi odkritelj infinitezimalnega računa. Od tu naprej se je spor le še zaostroval in obe strani nista bili posebno izbirčni pri uporabi sredstev. Zanimivo je, da Newton v sporu sprva neposredno ni sodeloval. Po Leibnizevi smrti pa sta se – podobno kot po smrti drugega Newtonovega zoprnika, Roberta Hooka, pokazala ves bes in maščevalnost velikega znanstvenika. Res je, da je Newton po Leibnizevi smrti priredil nekatera dejstva in datume v svojo korist. V tretji izdaji monumentalnega dela *Principia* pa je izbrisal vse reference o Leibnizu, češ da drugi izumitelj ne zasluži objave.

Četrta serija sporov je v družini Bernoulli. Najprej sta tu brata: **Jakob in Johann Bernoulli**. Oba sta bila sprva tesno za petami Leibnizu, potem pa sta se osamosvojila in v medsebojnem tekmovanju ter ljubosumnosti prišla do vrhunskih dosežkov. Slabi odnosi so trajali še po smrti. Jakob je zapustil rokopis odlične monografije o verjetnosti: *Ars Conjectandi* (Umetnost ugibanja). V njej najdemo „Bernoullijevo" zaporedje poskusov in s tem povezane formule. Jakobova vdova ni pustila, da bi rokopis izdal Johann; to je osem let kasneje naredil Johannov sin Nicholas.

Johann Bernoulli je za velik honorar bogatega francoskega markiza L'Hospitala v Parizu osebno poučeval infinitezimalni račun in kasneje nadaljeval s tem poukom v pismih. Prejemnik pa je iz teh pisem naredil prvi učbenik analize *Analyse des infinement petits* (1696), ki je bil izredno uspešen in je preživel oba matematika. Kot so zdaj ugotovili, učbenik v celoti sloni na Bernoullijevih pismih; so pa v njem odpravljene nekatere Bernoullijeve napake. Bernoulli je bil ob objavi knjige sprva tiho, kasneje pa se je pritoževal. V spor je prišel tudi z angleškim matematikom Brookom Taylorjem.

Johann Bernoulli je kasneje postal ljubosumen na svojega sina **Daniela**. Leta 1734 je moral z njim deliti nagrado pariške Akademije znanosti. To ga je tako razbesnelo, da je Danielu prepovedal dostop v svojo hišo v Baslu. Daniel je kasneje postajal vse bolj slaven na področju dinamike tekočin. Odkril je – kot zdaj pravimo – Bernoullijev zakon v hidrodinamiki. Johannu se je nekako posrečilo prehiteti sina z objavo knjige o dinamiki tekočin. Daniel se je pritoževal, da ga je oče oropal sadov desetletnega dela. Vseeno je moral Johann gledati, kako je sinova in ne njegova knjiga postala standardno delo na tem področju.

Peti spor je **Sylvester proti Huxleyu**. Thomas Henry Huxley, rojen leta 1825, je hodil do 10. leta v šolo, ki naj bi bila ena najboljših tovrstnih zasebnih ustanov v Angliji; njegov oče pa je tam učil matematiko. Huxley je nadvse sovražil to šolo. Kot je sam dejal, šoli ni bilo mar za moralni in intelektualni razvoj. Tako se je med učenci razvil boj za obstanek, v katerem je bilo po njegovem nasilništvo še najmanjše zlo. Verjetno se je tu razvil njegov bojeviti in polemični značaj. (Mimogrede, do nedavnega je bilo v angleških zasebnih šolah nasilništvo precej razširjeno in ponekod celo institucionalizirano. Ko je laburistična vlada Tonyja Blaira tovrstne običaje prepovedala, je bil v enem od angleških uglednih časopisov objavljen uredniški komentar, ki je to obžaloval, češ da nasilništvo „gradi značaj".) Huxley je postal eden od vodilnih naravoslovcev, s članki o zoologiji nevretenčarjev, geologiji in antropologiji. Huxley je znan predvsem kot „Darwinov buldog". Z veseljem je namreč prevzel nalogo, da polemizira z nasprotniki evolucijske teorije. Ob populariziranju empirične znanosti se je večkrat obregnil ob matematiko. Ta naj bi se ukvarjala le še z dedukcijo in dokazovanjem. Napadel je tudi fizika Williama Thomsona (lorda Kelvina) in njegove matematične izračune. Ta je namreč sklepal z uporabo enačbe za prevajanje toplote, da Zemlja ne more biti starejša od 400 milijonov let. To je bil takrat videti prekratek čas za evolucijo obstoječe biološke pestrosti. Huxley in nekateri sodobniki so, če nekoliko poenostavim, verjeli, da se geološke razmere na Zemlji niso bistveno spreminjale. Obe stališči sta bili, kot vemo danes, napačni. Stalno obregovanje Huxleya ob matematiko je spodbudilo del angleških matematikov, da poiščejo nekoga, ki bi odgovoril na te napade. Izbrali so Jamesa Josepha Sylvestra, ki je bil tudi sam zelo bojevit. Sylvester je v govoru, ki je bil pozneje objavljen, poudaril, da tudi matematika pogosto sloni na opazovanjih, izzivih iz naravoslovja in podobno. S tem se je ta zgodba nekako končala, saj Huxley, ki ni bil osebno izzvan, ni odgovarjal.

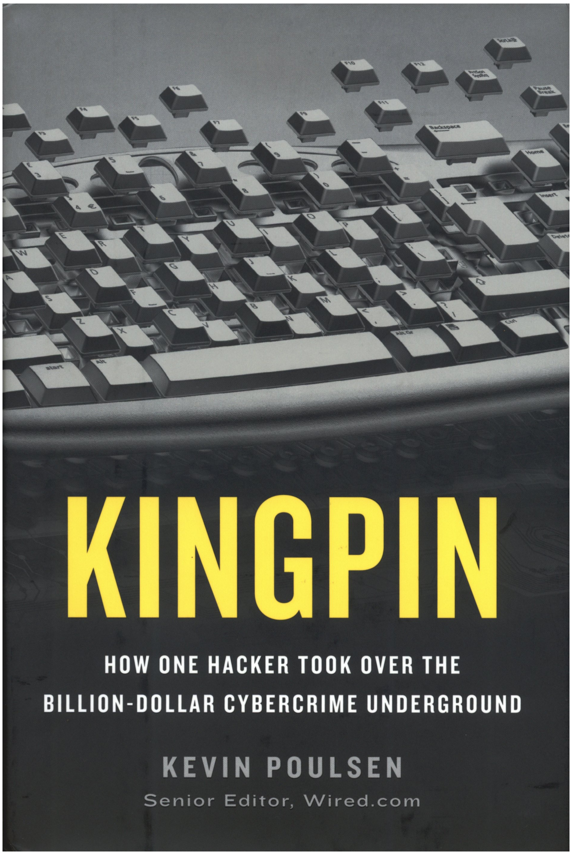
Naslednja spora sta: **Kronecker proti Cantorju**, **Borel proti Zermelu**. (Na str. 146 imamo spodrsljaj: „So when Zermelo's proof of the axiom of choice appeared in Mathematische Annalen in 1904 . . . " Tudi definicija dobro urejene množice ni pravilna.) Borelu aksiom izbire ni bil všeč. Osmi spor je **Poincaré proti Russellu**. Francoski matematik ni bil navdušen nad študijem neskončnosti in logicizmom. Ob branju Russellovih paradoksov je – nekoliko zlonamerno – vzkliknil: „Logicizem ni več sterilen: poraja protislovja!"

Deveti spor je: **David Hilbert proti L. E. J. Brouwerju**, formalizem proti intuicionizmu. Spor je šel tako daleč, da je Hilbert, eden od štirih glavnih urednikov revije *Mathematische Annalen*, s soglasjem dveh drugih glavnih urednikov odstavil pomožnega urednika Brouwerja. Einstein, četrti glavni urednik, se v sporu ni hotel opredeljevati in se je iz celotne epizode norčeval, češ da gre za „vojno žab in miši". V tem spopadu je Brouwer odgovoril s hudimi žalitvami.

Zadnje poglavje nosi naslov: **Platonisti proti konstruktivistom** in ima mnogo citatov. Nekaj besed je namenjenih tudi sporom glede pouka matematike.

Kot rečeno, je knjiga zanimivo branje. Druga polovica je zaradi poudarka na osnovah zanimiva tudi za filozofsko usmerjene ljudi. Na internetu sem videl, da jo ponekod v tem smislu uporabljajo celo kot pomožni učbenik.

Kevin Poulsen, Kingpin: how one hacker took over the billion-dollar cybercrime underground, Crown Publishers, New York 2011, 266 str.



Knjiga opisuje kariero ameriškega računalniškega strokovnjaka Maxa Butlerja, rojenega leta 1972, ki je kasneje spremenil svoje ime v Max Vision. Njegova formalna izobrazba se je končala po enem letu univerze. Vseeno je postal ekspert za vdore v računalniške sisteme. Poskusi prijateljev, varnostnih služb in podjetij, da bi njegove talente izkoristili v dobre namene, so bili le polovično uspešni, saj mu žilica ni dala, da ne bi ob testiranju računalniške varnosti poskušal narediti še kaka skrivna vratca za nadaljnje vstope in izkoriščanje tujih računalnikov v svoje namene. Že v mladosti je prihajal navzkriž z zakonom, sprva zaradi vandalizma in nasilništva. Ker ni resno jemal opozoril in se ni hotel pogajati z oblastmi, mu je to prineslo več let zapora in konec študija na univerzi. Kasneje je vdrl v računalniške sisteme vojaškega letalstva ZDA. Oblasti so mu bile pripravljene pogledati skozi prste, če bi sodeloval z njimi. Vendar ni hotel sodelovati v lovu na druge hekerje. Svoje so naredila tudi stališča neke liberalne odvetnice. Ta je hekerjem na njihovem srečanju svetovala, naj ne sodelujejo z oblastmi brez pomoči advokata. Tako je bilo sodelovanja s FBI definitivno konec in se je znova znašel v zaporu. Po izpustu so mu kljub vsemu dobri ljudje naročili, naj testira varnostni sistem nekega podjetja. Po neuspešnem direktnem napadu je vdrl v osebni računalnik nekega uslužbenca in z ukradenimi podatki končno le prišel v sistem. Problem je bil, da je s tem spet presegel svoja pooblastila. Tako je vse teže našel službo in s pomočjo ljudi, ki jih je spoznal v zaporu, je zdrsnil v svet kriminala. Z avtomatiziranim pregledovanjem, z izkoriščanjem lukenj v Internet Explorerju, je našel ranljive računalnike v podjetjih in restavracijah in iz njih pobiral podatke o kreditnih karticah, ki jih je posredoval svojemu kompanjonu. Ta je izdeloval kopije kartic. Delo zločincem olajšuje trmoglavost ameriških bank, ki zaradi enkratnih visokih stroškov nočejo zamenjati zastarelega sistema kreditnih kartic z magnetnim trakom. Podatke z magnetnega traku je mogoče z majhnim skenerjem posneti tudi fizično v nekaj sekundah. Knjiga opisuje, kako je (bilo?) v ZDA mogoče nabaviti vso opremo za ponarejanje kartic.

Samo v eni restavraciji je našel podatke o petdeset tisoč karticah. Delo so mu olajšali nekateri ponudniki informacijskih sistemov, ki so interna omrežja priredili tako, da so za vzdrževanje lahko vanje vstopali na daljavo, te vhode pa so slabo zaščitili. Tudi sicer mnoga podjetja, npr. Amazon, hranijo podatke o kreditnih karticah. To naj bi olajšalo naročanje, pomeni pa tudi tveganje. (Verjetno je to eden od razlogov, da morate recimo pri American Expressu za nakup v Amazonu dobiti poprej odobritev.)

Max Butler se je vključil v ekskluzivne kriminalne forume na omrežju. Tu udeleženci, skriti za psevdonimi, izmenjujejo izkušnje, novosti, kupujejo in prodajajo naslove in številke bančnih računov, kartic, PIN-e, opremo za ponarejanje ipd. Ti forumi ne poznajo meja. Sam je tu prodajal podatke in obenem vdiral v računalnike drugim nepridipravom in jim kradel informacije.

Infiltriral se je v bančne sisteme tako, da je uslužbencem poslal osebna sporočila, v katerih je napisal, da so omenjeni v članku v reviji. Od petsto uslužbencev neke banke jih je četrtina kliknila na povezavo na ta neobstoječi članek in mu s tem odprla vrata. Butler je zelo rad vdiral v računalnike čez Wi-Fi omrežja – s 60 centimetrsko parabolično anteno iz najete sobe v kaki visoki zgradbi.

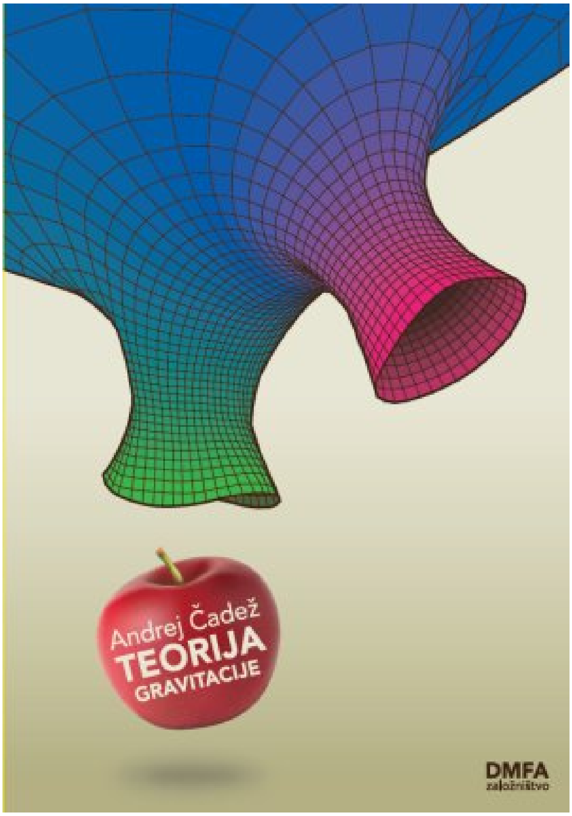
Podnaslov te knjige omenja enega od njegovih največjih podvigov – sovražni prevzem več kriminalnih forumov. To se mu je posrečilo, ker večina teh forumov ni imela varnostnih kopij. Zbrisal je njihovo vsebino, udeležence pa vključil v omrežje, ki ga je sam kontroliral. Dolgo časa je uporabljal strežnik nekega ponudnika informacijskih storitev na Floridi – ne da bi ta za to vedel.

Knjigo je težko odložiti. Uspehi in neuspehi represivnih služb pri zasledovanju glavnega akterja in drugih nepridipravov, vojne in spopadi med zlikovci samimi so zelo napeto branje, (čeprav ni streljanja, divjih zasledovanj in nasilje nastopa le na nekaj straneh.) Eden večjih problemov za predstavnike zakona so bili računalniki s kriptozaščito, ki je, kot vemo, lep primer uporabe teorije števil in algebraične geometrije. Glavni akter knjige je uporabljal izraelski DriveCrypt, ki ga je stal 60 USD. (Podoben program je Pretty Good Privacy.) Prav zaradi tega so leta 2007 v sobo Maxa Butlerja vdrli ob dveh zjutraj, ko je dremal, tako da ni mogel ugasniti računalnikov. Po dveh tednih se je vladnim strokovnjakom v kopiji RAM-a (hitrega spomina) posrečilo najti geslo. Max Vision (Butler) je bil leta 2009 obsojen na 13 let zapora in povrnitev 27 milijonov dolarjev škode (kar ne bo mogel poplačati, saj je bil njegov dobiček le majhen delež te vsote, pa še ta denar je bolj ali manj sproti zapravil). Celotna škoda, ki jo je povzročil, je trikratni znesek te vsote. Menda bi zdaj rad doštudiral matematiko ali fiziko.

Avtor knjige Kevin Poulsen je sam odsedel nekaj časa v zaporu zaradi vdiranja v računalnike. Zato morda glavnega akterja opisuje nekoliko olepšano. Sem in tja najdemo tudi kako nedoslednost. Tako knjiga precejkrat opisuje prenose denarja čez „e-gold“, opis te problematične „računalniške valute“, osnovane na rezervah v zlatu, pa je šele v drugi polovici knjige. Sam vsega tehničnega žargona nisem razumel. Večino stvari bi si gotovo lahko pojasnil s kratkim pogledom v Wikipedijo. Glavni obrisi tehnik vdorov in druge zločinske aktivnosti pa so tako dobro opisani, da človek brez težav preskoči nekatere podrobnosti. Knjigo priporočam tudi kot poučno branje, ki vam morda lahko prihrani kako nevšečnost pri uporabi interneta.

Peter Legiša

Andrej Čadež, Teorija gravitacije, DMFA – založništvo, Ljubljana 2011, 243 strani.



Čadeževa *Teorija gravitacije* se uvršča med najtehtnejša dela iz teoretične fizike v slovenščini. Bralcu odpira izredno zahtevno področje med teorijo polja, posebno teorijo relativnosti in splošno teorijo relativnosti. V glavnih potezah sledi zgodovinskemu razvoju, a podaja moderno sintezo področja in seže do najnovejših znanstvenih spoznanj. Nastala je po predavanjih, ki jih je avtor uvedel na Oddelku za fiziko in je preizkušena pri delu s študenti. Posrečene so naloge med besedilom, ki vabijo bralca, da sproti preizkuša svoje znanje.

Vsebino *Teorije gravitacije* je mogoče razdeliti na tri dele. V prvem delu *Uvodu* sledijo poglavja *Newtonov zakon gibanja in njegove simetrije*, *Galilejeve in Lorentzeve transformacije* ter *Specialna relativnost* in *Sile.* Drugi, osrednji del zajema poglavja *Umeritvena invariantnost gravitacijske teorije* ter *Enačbe gravitacijskega polja in napetostni tenzor* in *Ilustracije.* Slednje obdelajo napetostni tenzor za idealni plin, vrtilno količino ter elektromagnetno in gravitacijsko polje. Poglavjema *Gibanje planeta okoli Sonca* in *Gibanje svetlobe v gravitacijskem polju Sonca* sledi v tretjem delu obsežno poglavje *Orodja v n-razsežnih prostorih.* Na koncu so poglavja *Einsteinove enačbe in foliacija prostor-časa* ter še *Gravitacijsko polje statične sferno simetrične masne porazdelitve* in *Schwarzschildova črna luknja.* Dodan je seznam pulzarjev v dvojnih sistemih ter seznam literature in posebej tujih učbenikov.

V prvem delu podaja avtor z orodji analitične mehanike osnove teorije polja. Sledi teoriji elektromagnetnega polja in zgradi teorijo gravitacijskega polja v približku kvaziravnega prostora. To je sinteza posebne in splošne teorije relativnosti. V njej izpelje klasične relativistične učinke, kot sta sukanje perihelija planetne tirnice in odklon svetlobe v bližini telesa z veliko maso.

Najlepši in najbogatejši je drugi del knjige. *Ilustracije* obdelajo zglede, ki jih običajno ne povezujemo s teorijo relativnosti. Bralec tako spozna, da teoriji relativnosti nista le uvedba prostor-časa, Lorentzevih transformacij in ekvivalentnost mase in energije, ampak prinašata nov, bogatejši opis celotne fizike, v katerem je pogosto treba prilagoditi in dograditi ustaljene pojme.

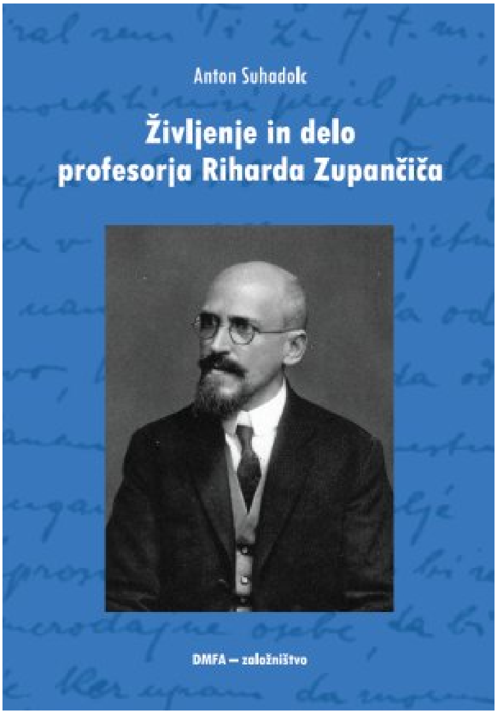
Tretji del obsega popolno teorijo gravitacije. Avtor uvede matematična orodja za opis splošnih mnogoterosti, n-forme v poljubno dimenzionalnih prostorih z deli Liejevih grup. Izredno abstraktni opis se izteče v splošno formulacijo Riemannovega tenzorja, ki se pojavi v Einsteinovih enačbah gravitacijskega polja. Za močno nelinearni sistem enačb so doslej izdelali le nekaj rešitev specifičnih problemov. Avtor nakaže pomembnejše od teh rešitev ali – zaradi izjemne zahtevnosti – poroča o njih. Bralcu predstavi tudi novejše pojme astrofizike, točno rešitev Keplerjevega problema, dinamiko v bližini črnih lukenj in gravitacijsko lečenje.

Čadeževa *Teorija gravitacije* je dragocena knjiga, prva poglobljena študija na tem področju v slovenščini in zagotovo temeljni vir za daljše obdobje. Vsebina je skrbno izbrana in strukturirana za osnovno informacijo in orientacijo. Bralec, ki mu ne bo žal truda za reševanje bogatega izbora nalog, pa si bo lahko pridobil tudi operativno znanje in veščino na tem zahtevnem področju.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 23,99 EUR.

Alojz Kodre in Janez Strnad

Anton Suhadolc, Življenje in delo profesorja Riharda Zupančiča, DMFA – založništvo, Ljubljana 2011, 196 str.



Pri DMFA – založništvo je nedavno izšla nova slovenska knjiga. V njej Anton Suhadolc predstavlja zanimivo osebnost iz zgodovine slovenske matematike, profesorja dr. Riharda Zupančiča. Po uvodnih opombah o tem, kako se je začel zanimati za to osebo in kako je knjiga nastajala, nas avtor seznani z mnogimi podrobnostmi Zupančičevega življenja in dela, od njegovega rojstva v Ljubljani leta 1878, rodbinskih povezav, šolanja, začetkov akademske kariere na Dunaju, njegovih dveh porok, vojaške službe med prvo svetovno vojno, vrnitve v Ljubljano, njegovih prizadevanj za ustanovitev in delovanje slovenske univerze, odnosov s profesorjem Plemljem in drugimi vidnimi domačimi in tujimi matematiki in fiziki, njegovega odnosa do knjig, jezika, filozofskih problemov, religije, splošnih družbenih in političnih vprašanj tedanjega časa, javnega delovanja pred drugo svetovno vojno in med njo pa vse do njegovega odhoda v Avstrijo in bednih razmer, v katerih je z ženo živel na avstrijskem Štajerskem vse do smrti marca 1949.

Rihard Zupančič je mlajšim rodovom slovenskih matematikov in širši javnosti skoraj neznana oseba, zato morda ni odveč, da z nekaj poudarki iz knjige opozorimo na njegov pomen za razvoj matematike in visokega šolstva na Slovenskem.

Bil je ugleden srednješolski in univerzitetni profesor, ki je že pred prvo svetovno vojno pisal strokovne razprave o pouku matematike v nemške in francoske revije. Kot član avstrijske komisije je za mednarodno komisijo za pouk matematike pod vodstvom Felixa Kleina pripravljal različna poročila o stanju na tem področju v naših deželah. S prispevki o pedagoški tematiki se je udeležil dveh mednarodnih matematičnih kongresov, v Rimu 1908 in v Cambridgeu 1912. V tem času je spisal več matematičnih učbenikov za avstrijske srednje šole (v nemščini), s katerimi se je enakovredno postavil ob bok Francu Močniku in Francu Hočevarju. Matematik Eduard Helly je izdal štiri knjižice rešitev k nalogam iz teh učbenikov, ki na žalost še danes čakajo primernega strokovnega ovrednotenja. Tudi Johann Radon, Zupančičev kolega in prijatelj na Tehniški visoki šoli na Dunaju, ga je visoko cenil kot pedagoga in metodika matematike. Med prvo svetovno vojno je Zupančiču po mnogih prizadevanjih uspelo, da so profesorja Plemlja premestili iz Lvova v artilerijski laboratorij na Dunaju, s čimer mu je vsaj olajšal vojaško službo, če že ne obvaroval česa hujšega. Po vojni je sodeloval pri ustanovitvi in organizaciji slovenske univerze ter bil med njenimi prvimi predavatelji; matematiko je predaval že na začasnem visokošolskem tehničnem tečaju od maja do novembra 1919. Postal je njen prvi prorektor (prvi rektor je bil profesor Plemelj) in drugi rektor leta 1920/21, nato pa je bil spet prorektor in kasneje dvakrat dekan Tehniške fakultete. Kot predavatelj je uvajal v pouk matematike moderne metode (npr. teorijo množic) in nove standarde (strogost pri formulaciji izrekov in izvajanju dokazov). Dva svoja študenta, Antona Vakslja in Antona Peterlina, je navdušil za prestop s tehnike na študij matematike. Slednjemu je pomagal pri pridobitvi štipendije za študij v Nemčiji. Leta 1938 ga najdemo med ustanovnimi člani slovenske akademije znanosti, med drugo svetovno vojno pa je kot predsednik združenja učiteljev, profesorjev in knjižničarjev večkrat posredoval pri okupacijskih oblasteh za izpustitev zaprtih članov in ponovni sprejem v službo. Kljub temu je bil junija 1945, potem ko je tik pred osvoboditvijo že zapustil Slovenijo, izključen iz akademije „ker se je postavil na nemško stran“.

O svetlih in tudi o manj svetlih trenutkih v akademski karieri Riharda Zupančiča se lahko dodobra poučimo v obravnavani knjigi, ki ponudi bralcu še veliko drugega zanimivega branja. V tretjem poglavju je npr. navedeno rodbinsko drevo Zupančičevih, predstavljeni sta obe Rihardovi ženi, Marianne Suppantschitsch in Maria Romana Urbanek, nadalje je podan dokaj podroben (čeprav včasih nepopoln) opis štirinajstih vidnejših članov razširjene rodbine Suppantschitsch. Med njimi najdemo zanimive osebnosti, kot je npr. njegov stric pravnik Viktor Suppantschitsch, ki je ob koncu kariere postal celo predsednik vrhovnega sodišča na Dunaju, obenem pa je bil znan avstrijski filatelist in svetovna avtoriteta na področju razumevanja filatelistične literature; ali pa nečak Richard Riebl, doktor kemije in direktor gumarskega inštituta na Javi, strokovnjak za pridobivanje in predelavo kavčuka. V kratkem četrtem poglavju sta opisana dva neuspela poskusa Zupančičeve rehabilitacije zaradi izključitve iz akademije znanosti. Leta 1996 je SAZU rehabilitirala preostale tri izključene člane, njega pa ne. Čez pet let je bila na občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije leta 2001 sprožena pobuda akademiji, da se rehabilitira še profesorja Zupančiča, to pot opremljena z dodatno dokumentacijo, a je bila tudi ta pobuda po več kot letu dni od akademije brez argumentov zavrnjena. Knjiga vsebuje še krajše povzetke v slovenskem, nemškem in angleškem jeziku. Posebej je na koncu povzeta Povšičeva bibliografija Riharda Zupančiča s seznamom matematičnih razprav in učnih knjig, dopolnjena z nekaterimi neobjavljenimi matematičnimi zapiski in drugimi spisi iz njegove zapuščine (z opombami). Poleg tega so podrobno navedeni viri, iz katerih je črpal avtor, in imensko kazalo oseb, ki nastopajo v besedilu.

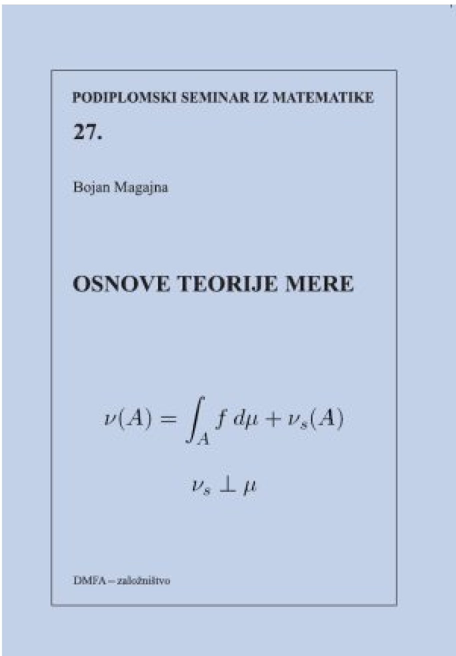
Knjiga je sad večletnega napornega raziskovalnega dela avtorja, profesorja dr. Antona Suhadolca. Poleg neposredne Zupančičeve zapuščine (ohranjenih je veliko njegovih pisem in raznih zapiskov) ter zgodovinskih in spominskih publikacij je avtor pregledal arhive različnih uradnih, državnih in cerkvenih ustanov. Pisal je posameznikom v Sloveniji in v Avstriji, potomcem Zupančičevih sorodnikov in ljudem, ki so jih poznali. Na osnovi tako zbranih podatkov je sestavil dobro dokumentirano zgodovinsko (in obenem tudi zanimivo psihološko) analizo kompleksne Zupančičeve osebnosti. Objavljeno je skoraj šestdeset različnih dokumentov: fotografij, osebnih pisem in dopisov institucijam, spominskih zapisov posameznikov, raznih uradnih odredb, dopisov, potrdil, obrazcev in seznamov. Zbrano gradivo in podrobno citiranje virov dviga sicer izjemno berljivi knjigi njeno vrednost na raven znanstvene monografije. Vsekakor je na področju proučevanja zgodovine slovenske matematike Suhadolčevo delo edinstveno in brez primere, tako po obsežnosti raziskav, dokumentacijski vrednosti in kulturno-zgodovinskem pomenu.

Knjiga torej ni matematično delo, kakršne običajno izdaja založba DMFA – založništvo, odkriva pa nam delček pozabljene preteklosti, pomembne za razvoj slovenske visokošolske matematike. S tega vidika je nemara zanimiva tudi za širšo intelektualno javnost, ki ji ni vseeno, kaj se je na duhovnem, kulturnem in tudi političnem področju dogajalo s Slovenci od začetka 20. stoletja do druge svetovne vojne in po njej. Slovenski matematiki pa z njo vsaj deloma na simbolni ravni poravnavamo svoj dolg do moža, ki je bil še petdeset in več let po smrti zamolčan in izbrisan iz javnega spomina.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 18,38 EUR.

Milan Hladnik

Bojan Magajna, Osnove teorije mere, Podiplomski seminar iz matematike, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2011, 140 str.



Knjiga je učbenik za predmet *Teorija mere*. Poleg snovi za standardni enosemestrski tečaj v četrtem ali petem letniku študija matematike pa vsebuje še dodatke, tako da bo uporabna tudi za tiste, ki želijo vedeti nekaj več. Teorija mere je pomembna tudi za področje *verjetnostnega računa*. Kot izbirni predmet je celo v nekaterih magistrskih programih Ekonomske fakultete.

Prvo poglavje ima naslov *Merljive množice*. Začne kot običajno s σ-algebro in pozitivno mero. *Karateodorijeva konstrukcija* pove, kako zunanja mera porodi σ-algebro in mero na njej. Mero na algebri lahko razširimo do zunanje mere. Knjiga vpelje pojem polalgebre in polmere. Vse končne unije paroma disjunktnih elementov iz polalgebre sestavljajo algebro in polmero lahko razširimo do mere na tej algebri.

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nepadajoča z leve zvezna. Če definiramo $\mu([a, b)) = f(b) - f(a)$ (tudi za $b = \infty$), $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(-\infty, b) = f(b) - f(-\infty)$, dobimo polmero. Po prej omenjenih konstrukcijah jo lahko razširimo do mere m_f na σ-algebri, ki je porojena z obravnavanimi intervali. To je *Lebesgue-Stieltjesova mera*. Če je f identična funkcija, je to *Lebesgueova mera*.

Naslednje poglavje ima naslov *Merljive funkcije*. Poleg standardne snovi vsebuje tudi razdelek *Konvergence skoraj povsod, skoraj enakomerno in po meri* ter *izrek Jegorova*. Sledi poglavje o *integraciji* – najprej za nenegativne in nato še kompleksne merljive funkcije. Na kratko je razjasnjena zveza med *Riemannovim in Lebesgueovim integralom* na prostoru $\mathbb{R}^n$. Ta snov je namreč že vsebovana v knjigi *Mirka Dobovìška* [1]. Obravnavana je produktna mera. *Tonellijev in Fubinijev izrek* govorita o zvezi med dvojnim in dvakratnim integralom in o zamenjavi vrstnega reda integracije. Četrto poglavje je namenjeno *kompleksnim meram in L^p-prostorom*.

Peto poglavje je obravnava *mere na lokalno kompaktnem Hausdorffovem prostoru X*. Izpeljan je *izrek Riesza in Markova*, ki pravi, da za vsak pozitiven linearni funkcional ρ na prostoru $C_c(X)$ zveznih funkcij s kompaktnim nosilcem iz X v $\mathbb{C}$ obstaja enolično določena *Radonova mera μ* na X, da je $\rho(f) = \int_X f\,d\mu$ za vsak $f \in C_c(X)$. Nadaljnja snov sta avtomatična regularnost Radonovih mer in aproksimacija z zveznimi funkcijami.

Zadnje, šesto poglavje ima naslov *Odvajanje mer in funkcij*. Definirani sta *absolutna zveznost* in *variacija funkcije*. Pokazano je, kako lahko absolutno zvezno funkcijo izrazimo kot integral njenega odvoda (ki obstaja skoraj povsod).

Knjiga odseva avtorjevo veliko in poglobljeno znanje. Formulacije so jasne, dokazi elegantni, marsikje imamo odlične dodatne komentarje, ki povezujejo snov z drugimi matematičnimi področji ali bralca napotijo v obsežen seznam literature. Veliko je tudi nalog. Nekatere so razmeroma enostavne ali pa imajo dobra navodila. Kot od profesorja Bojana Magajne že pričakujemo, pa so številni problemi zahtevni. Najtežje naloge so označene z *. Knjiga je zelo dobrodošel prispevek k slovenski matematični literaturi.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 15,59 EUR.

LITERATURA

[1] M. Dobovišek, *Riemannov in Lebesgueov integral v* $\mathbb{R}^n$, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **36**, DMFA–založništvo, Ljubljana, 1997.

Peter Legiša

IZBRANA POGLAVJA IZ MATEMATIKE IN RAČUNALNIŠTVA

Učbeniki in zbirke vaj iz zbirke Izbrana poglavja iz matematike in računalništva so v sodelovanju z Oddelkom za matematiko IMFM in Odsekom za matematiko FNT začeli izhajati leta 1972. Tega leta je pod številko 1 izšla knjižica *Dinamični sistemi* avtorja Franceta Križaniča.

Učbeniki in zbirke vaj iz omenjene zbirke so prepoznavni po modri barvi ovitka. Najstarejša izdaja v tej zbirki, ki je še vedno v redni prodaji, je številka 6, *Rešene naloge iz analize 1* avtorjev M. Dobovišek, M. Hladnik in M. Omladič, ki je bila natisnjena kar dvanajstkrat. Študentje prvega letnika še vedno radi sežejo po tej zbirki vaj, saj predstavlja izbor nekaterih najpomembnejsih primerov in vaj iz analize.

Kasneje je v sodelovanju z Oddelkom za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko izšlo veliko naslovov, tako da se danes zaporedno številčenje izdaj v zbirki bliža številki 50. Pri tem seveda niso všteti vsi ponatisi in popravljene izdaje, teh je bilo bistveno več. Vse trenutno razpoložljive knjige v zbirki in cenik izdaj lahko najdemo tudi na spletni strani `http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik.htm#ipmr`.

V nadaljevanju na kratko predstavljamo nekaj naslovov, ki so izšli v zadnjem času. Učbenika z zaporednima številkama 43 in 44, P. Pavešić *Splošna topologija* in J. Mrčun *Topologija*, pa smo podrobno predstavili v četrti številki Obzornika za matematiko in fiziko, letnik 56 (2009).

Povh Janez, Pustavrh Simona, Fošner Maja, Gorše Pihler Melita in Zalar Bojana, MATEMATIČNE METODE V UPORABI, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 42, DMFA–založništvo, Ljubljana 2010, 272 strani.

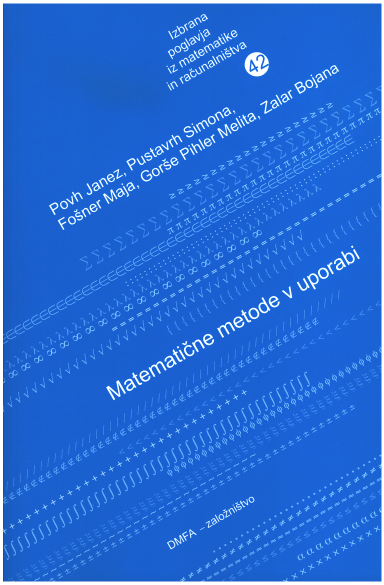
Knjižica je primerna kot dodatno gradivo za utrjevanje znanja v srednjih in višjih šolah ter na univerzah.

Naloge so razporejene v trinajst poglavij, na koncu vsakega poglavja so zbrane nekatere formule in pravila za ponovitev snovi in pomoč pri reševanju nalog ter rešitve nalog.

Prvo poglavje *Uvod* obravnava števila ter enakosti in neenakosti, sledijo *Matrike in determinante*, *Sistemi linearnih enačb in neenačb*, *Vektorji*, *Zaporedja in vrste*, *Funkcije*, *Odvod*, *Nedoločeni integral*, *Določeni integral*, *Diferencialne enačbe*, *Funkcije več spremenljivk*, *Kombinatorika* in *Verjetnostni račun.*

Nekatere naloge dopolnjujejo slike, ki so jih avtorji še posebej skrbno narisali. Poleg tega je pri nekaterih nalogah opisana tudi pot do rešitve.

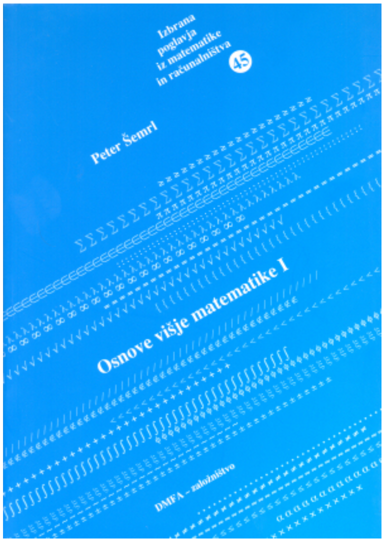
Naročite jo lahko pri DMFA–založništvo po članski ceni 19,50 EUR.



Peter Šemrl, OSNOVE VIŠJE MATEMATIKE I, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 45, DMFA–založništvo, Ljubljana 2009, 280 strani.

V prvem delu Osnov višje matematike so predstavljena števila, vektorji, sistemi linearnih enačb in elementarne funkcije. Drugi del bo posvečen zaporedjem, zveznim funkcijam, odvodu in integralu.

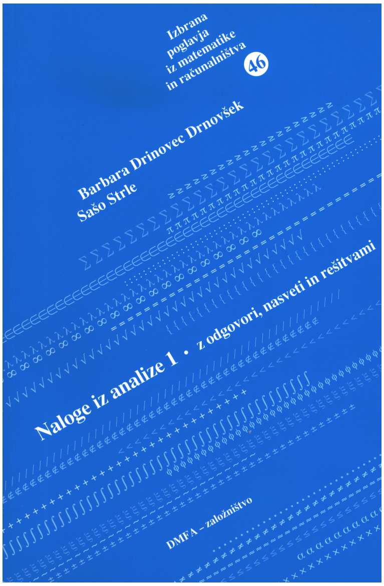
Učbenik je v prvi vrsti namenjen študentom naravoslovja in tehnike ob njihovem prvem srečanju z višjo matematiko. Vsako od petih poglavij se konča s podpoglavjema „Povzetek“ in „Zahtevnejše branje“ (le tretje poglavje je brez slednjega). V prvem je podana zgoščena obnova posameznega poglavja, drugo pa je pisano za bralce z nekaj več matematičnega posluha.



Knjiga je izvrsten učbenik za študente naravoslovnih in tehniških fakultet. Zaradi jasne razlage ga bodo lahko uporabili tudi za samostojen študij, ne le kot dopolnilo k predavanjem. Čeprav knjiga ni namenjena študentom matematike, bo kot vzporedni učbenik prav prišla tudi njim. Našli bodo pojasnila za enostavne stvari, ki se jih matematikom praviloma ne „spodobi“ razlagati. A šele razumevanje na osnovni ravni omogoča poglobljen študij. Kot pravi avtor v predgovoru: „Upam, da bodo ob njej lažje in hitreje razumeli potrebo po matematični strogosti, ki sicer prežema njim namenjene matematične tekste.“ Naposled pa bo knjiga prišla prav tudi profesorjem matematike; morda vsaj kot opomin, kako se morajo prilagoditi tisti večini študentov, ki jim znanje in razumevanje matematike ni eden pomembnejših življenjskih ciljev.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 19,99 EUR.

Barbara Drinovec Drnovšek in Sašo Strle, NALOGE IZ ANALIZE 1 z odgovori, nasveti in rešitvami, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 46, DMFA–založništvo, Ljubljana 2010, 288 strani.



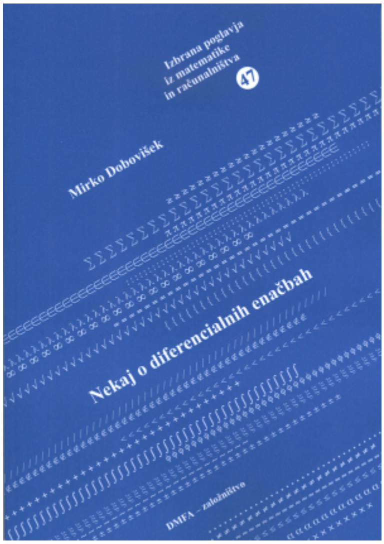
Zbirka je namenjena študentom 1. letnika študijskega programa Matematika. Vsebuje tako naloge, ki jih študenti rešujejo na vajah, kot tudi naloge s starih kolokvijev in izpitov ter druge naloge. Zaporedje snovi v zbirki je enako kot v učbeniku J. Globevnika *Analiza 1*; to naj bi študente spodbujalo k sprotnemu študiju teorije ob reševanju praktičnih primerov. V zbirki so tako rutinske kot tudi nekatere težje naloge. Zahtevnost nalog se znotraj obravnave ene snovi praviloma stopnjuje.

Vsaj po ena naloga vsakega tipa ima rešitev. Na začetku obravnave neke snovi so rešitve izdelane bolj podrobno in včasih vsebujejo tudi povzetek teorije, v nadaljevanju pa so krajše. Poleg tega imajo vse računske naloge odgovore, precej nalog ima tudi nasvete. Rešitve so napisane z mislijo na znanje, ki ga ima študent, ko se prvič sreča z nalogo; pri nekaterih nalogah lahko študent kasneje ali pa z uporabo metod, ki pri Analizi 1 niso obravnavane, poišče krajšo ali elegantnejšo rešitev.

Avtorja študentom priporočata, naj naloge najprej poskušajo rešiti sami, saj bodo le tako lahko preverili, ali obravnavano snov res razumejo. Če naloge kljub predhodnemu študiju snovi s predavanj in vaj ne znajo rešiti, pa naj si najprej pomagajo z nasvetom, šele nazadnje z rešitvijo.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 14,99 EUR.

Mirko Dobovišek, NEKAJ O DIFERENCIALNIH ENAČBAH, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 47, DMFA–založništvo, Ljubljana 2011, 132 strani.



Knjiga je učbenik za predmet Diferencialne enačbe pri strokovnem študiju Praktična matematika. Prva poglavja so namenjena tudi študentom fizikalne merilne tehnike, snov pa morajo spoznati tudi študenti drugih matematičnih in nekaterih tehničnih smeri.

Noben dosedanji učbenik v slovenskem jeziku ne obsega celotne snovi, obravnavane v tem učbeniku. Poleg tega so vsi napisani na nivoju, ki ne ustreza strokovnemu študiju; ali so prezahtevni ali pa premalo zahtevni.

V učbeniku so, tako kot v vsakem matematičnem delu, definicije, trditve, izreki, njihovi dokazi, izpeljave formul, opombe k trditvam in definicijam ter veliko primerov. Vsi izreki seveda niso dokazani. Izbrani so predvsem tisti dokazi in izpeljave, ki niso pretežki. Izpuščene dokaze lahko zainteresirani bralec poišče v literaturi, navedeni na koncu knjige.

Po vpeljavi uvodnih pojmov avtor v drugem poglavju obravnava enačbe prvega reda, v tretjem enačbe višjih redov, četrto poglavje je posvečeno sistemom linearnih diferencialnih enačb, peto pa diferencialnim enačbam v kompleksnem. V zadnjem poglavju je na kratko predstavljena še Sturm-Liouvillova teorija.

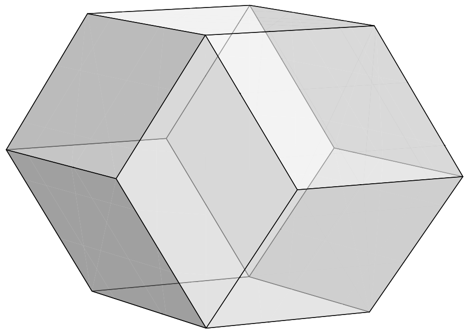
Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 10,00 EUR.

VPRAŠANJA IN ODGOVORI

Dragi bralci, tokrat vam v premislek ponujamo še eno geometrijsko nalogo, ki jo je pripravil Izidor Hafner. Poleg tega objavljamo še nekaj rešitev naloge iz 3. številke lanskega letnika, ki nam jih je poslal Franc Savnik.

Naloga

Rombski dvanajsterec 2. vrste je polieder, katerega mejne ploskve so rombi, pri katerih je razmerje diagonal zlato število $s = (1 + \sqrt{5})/2$. To telo je l. 1960 odkril hrvaški matematik Stanko Bilinski. Izračunaj prostornino telesa kot funkcijo daljše diagonale.



Še tri rešitve naloge 2, objavljene v OMF št. 3 letnik 58

Naloga je spraševala po številih q_1, q_2, q_3, $q_4 \in \mathbb{Q}$ ter $k \in \mathbb{Z}$, za katera velja

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = q_1 \operatorname{arctg}(q_2\sqrt{5}) + q_3 \operatorname{arctg}(q_4\sqrt{3}) + \frac{k\pi}{2}.$$

Vzamemo števili $x = (\sqrt{5} + \sqrt{3})$, $y = (\sqrt{5} - \sqrt{3})$, naravno število n in kota $\alpha_n = n(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)$, $\beta_n = n(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y)$. Od tod s seštevanjem dobimo $\operatorname{arctg}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \frac{1}{2n}(\alpha_n + \beta_n)$.

Pri reševanju naloge bomo upoštevali osnovne zveze med krožnimi funkcijami. Rešitve bomo zapisali z naborom števil $(q_{n,1}, q_{n,2}, q_{n,3}, q_{n,4}, k_n)$. Da se izognemo opisovanju ponavljajočih se prijemov, reševanje opišemo s tabelo.

n	$\tan\alpha_n$	$\tan\beta_n$	$\alpha_n = n\alpha_1$	$\beta_n = n\beta_1$
1	$-2\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\pi + \operatorname{arctg}(-2\sqrt{5})$	$\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$
2	$\frac{4}{19}\sqrt{5}$	$-4\sqrt{3}$	$\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{19}\sqrt{5}\right)$	$\pi + \operatorname{arctg}(-4\sqrt{3})$
3	$-\frac{34}{59}\sqrt{5}$	$-\frac{10}{27}\sqrt{3}$	$2\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{34}{59}\sqrt{5}\right)$	$\pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{10}{27}\sqrt{3}\right)$

n	**Rešitev**
1	$\left(\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right)$
2	$\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{19}, \frac{1}{4}, -4, 1\right)$
3	$\left(\frac{1}{6}, -\frac{34}{59}, \frac{1}{6}, -\frac{10}{27}, 1\right)$

Zapišimo $\alpha_n = A_n\pi + \operatorname{arctg}(q_{n,2}\sqrt{5})$, $\beta_n = B_n\pi + \operatorname{arctg}(q_{n,4}\sqrt{3})$; $A_n, B_n \in \mathbb{N}$. Potem je $\operatorname{arctg}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = \dfrac{1}{2n}\operatorname{arctg}(q_{n,2}\sqrt{5}) + \dfrac{1}{2n}\operatorname{arctg}(q_{n,4}\sqrt{3}) + \dfrac{A_n+B_n}{n}\dfrac{\pi}{2}$.

Z rekurzivno formulo za tangens večkratnega kota in s popolno indukcijo lahko dokažemo, da sta števili $q_{n,2}$ in $q_{n,4}$ racionalni za vsak naravni n. Če naloga ne bi zahtevala, da je število $k_n = (A_n+B_n)/n$ *celo*, bi torej imela neskončno rešitev. Izkaže pa se, da za $n \geq 4$ velja ocena $0 < (A_n+B_n)/n < 1$. Za $n = 4, 5, 6$ jo preizkusimo z računom, za $n \geq 7$ pa upoštevamo, da je $\alpha_n + \beta_n = n(\alpha_1 + \beta_1)$ in $\operatorname{arctg}(q_{n,2}\sqrt{5}) + \operatorname{arctg}(q_{n,4}\sqrt{3}) > -\pi$. Sklepamo, da je $\frac{A_n+B_n}{n} < \frac{\alpha_1+\beta_1}{\pi} + \frac{1}{n}$, pri čemer je $\frac{\alpha_1+\beta_1}{\pi} < 0.85$. Za $n \geq 7$ je torej $\frac{A_n+B_n}{n} < 1$.

To pa še ni vse. Prvi dve izmed zgoraj navedenih rešitev imata vsaka svoj par. Zaradi povezav med krožnimi funkcijami namreč velja: Če imata u in v različen predznak, je $\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{u}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{v}\right)$. Dobimo še rešitvi

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{in} \quad \left(\frac{1}{4}, -\frac{19}{20}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, 1\right).$$

Naloga ima torej vsaj pet rešitev. Tistih, ki jih iz vseh naštetih dobimo upoštevajoč lihost funkcije $\operatorname{arctg} x$, nismo zapisovali.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JANUAR 2012
Letnik 59, številka 1
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici je relief Šmarne gore z nekaj najbolj znanimi potmi na vrh (črno) in s potmi, ki jih vrne optimizacijski algoritem (rdeče). Glej prispevek na strani 1.