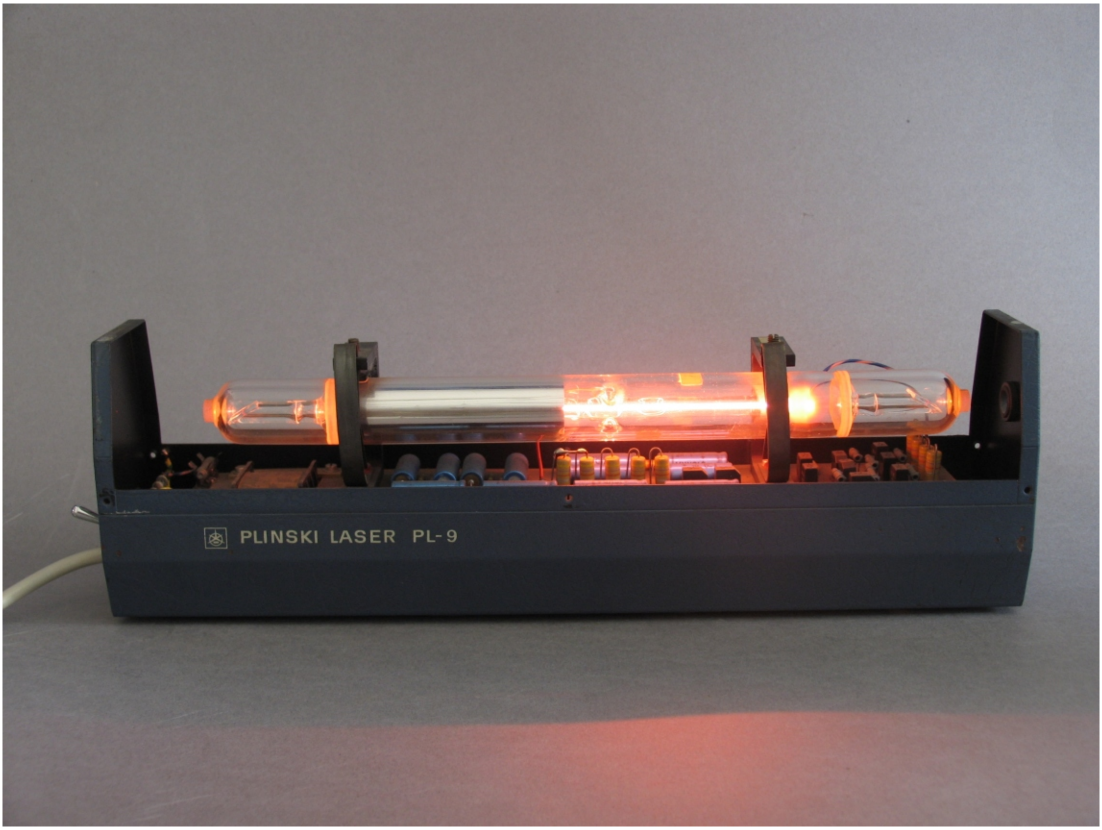
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2010
Letnik 57
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2010, letnik 57, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

LOGISTIČNA PORAZDELITEV

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11B68, 26A06, 60E10

V prispevku je predstavljena logistična porazdelitev v povezavi z Bernoullijevimi števili in nekaterimi drugimi porazdelitvami. Podana je tudi izpeljava formule za entropijo logistične porazdelitve.

THE LOGISTIC DISTRIBUTION

In this contribution the logistic distribution in connection with the Bernoulli numbers and some other distributions is presented. The derivation of entropy formula of the logistic distribution is also given.

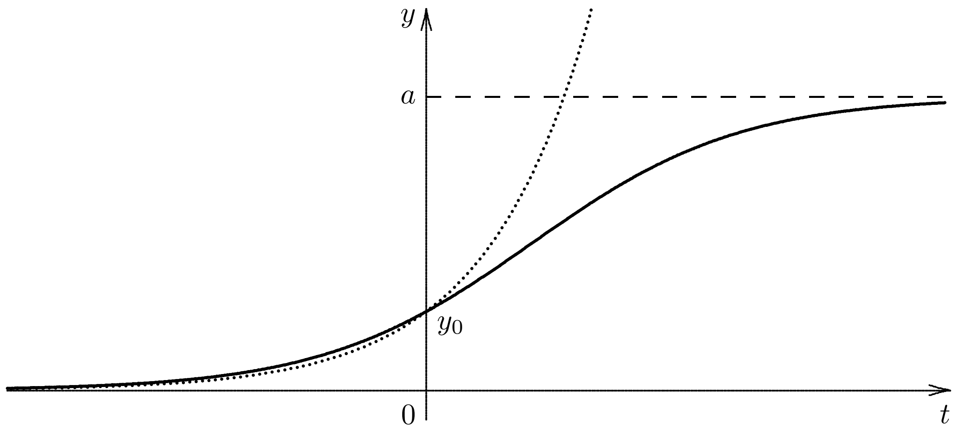
Uvod

Logistična porazdelitev je zvezna verjetnostna porazdelitev, ki pa jo redko srečamo v učbenikih, čeprav jo je poznal že Pierre François Verhulst (1804–1849) pri svojem modelu rasti populacij. V prispevku bomo obravnavali logistično porazdelitev, izračunali njeno karakteristično funkcijo in njene momente, ki se izražajo z Bernoullijevimi števili. Pokazali bomo tudi, kako je povezana z Laplaceovo porazdelitvijo. Na koncu pa bomo poiskali še njeno diferencialno entropijo in navedli primere uporabe. Za skoraj vse pojme iz verjetnostnega računa, ki se pojavljajo v tem prispevku, najdemo temeljita pojasnila v [5].

Eksponentno funkcijo z osnovo e bomo označevali z exp, njeno inverzno funkcijo, naravni logaritem, pa z log. Uporabljali bomo tudi hiperbolične funkcije ch, sh, th, ki so definirane z izrazi: $\operatorname{ch} x = (\exp x + \exp(-x))/2$, $\operatorname{sh} x = (\exp x - \exp(-x))/2$, $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$. Vse potrebno o teh funkcijah, realnih in kompleksnih, najdemo v [9].

Rast populacije pogosto opišemo z diferencialno enačbo z začetnim pogojem. S funkcijo $t \mapsto y(t)$ povemo, da je v času t velikost populacije enaka $y(t)$. Kako hitro populacija raste v času t, pa pove odvod $y'(t)$. Pri najenostavnejšem modelu rasti je hitrost rasti populacije v času t premo sorazmerna z njeno velikostjo v tem času, kar nam da linearno diferencialno enačbo $y' = ky$, kjer je k pozitivna konstanta. Če imamo še začetni pogoj $y(0) = y_0 > 0$, potem diferencialno enačbo hitro rešimo in dobimo: $y(t) = y_0 \exp(kt)$. Rast je eksponentna. Rešitev dobro opisuje dejansko rast le za majhne t. Ker pa je $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$, bi taka populacija prej ali slej napolnila še tako velik prostor.

Zato je treba poiskati boljši model, ki upošteva omejen prostor za populacijo, torej omejeno rast. To pomeni, da naj bo velikost populacije vedno manjša od pozitivnega števila a, na začetku pa naj je bo $y(0) = y_0 \in (0, a)$. Verhulstov model rasti predpostavlja, da je hitrost rasti populacije v času t premo sorazmerna s produktom njene velikosti in razlike do zgornje meje. Model nam da nelinearno diferencialno enačbo $y' = ky(a - y)$, recimo ji *logistična diferencialna enačba*, z začetnim pogojem $y(0) = y_0$. Enačba ima ločljivi spremenljivki, zato jo lahko rešimo s standardnim postopkom in dobimo njeno edino rešitev, *logistično funkcijo*: $y(t) = ay_0/(y_0 + (a - y_0)\exp(-kat))$, $t \in \mathbb{R}$. Rešitev je zvezna in naraščajoča funkcija na $\mathbb{R}$ in zanjo velja še $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(x) = a$. Graf rešitve imenujemo *logistična krivulja* (glej [7]). Na sliki 1 sta načrtani logistična (polna črta) in eksponentna krivulja (pikčasta črta) za isti k.

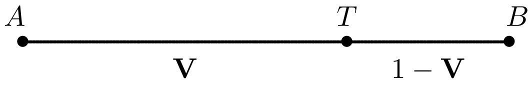


Slika 1. Logistična in eksponentna krivulja

Če izberemo $a = 1$, potem nas lastnosti logistične funkcije in oblika njenega grafa napeljejo na misel, da je logistična krivulja graf porazdelitvene funkcije neke slučajne spremenljivke. Taka slučajna spremenljivka obstaja, ni pa ena sama (primerjaj [5, izrek 16.6]). V nadaljevanju bomo videli, da do ene take slučajne spremenljivke, za katero bomo rekli, da je porazdeljena *logistično*, pridemo razmeroma enostavno.

1. Enakomerna in logistična porazdelitev

Model, pri katerem nastopa logistična porazdelitev, je preprost. Na daljici AB dolžine 1 slučajno izberemo točko T in z $\mathbf{V}$ označimo razdaljo te točke do levega krajišča A. Potem je $\mathbf{V}$ slučajna spremenljivka z vrednostmi na intervalu $[0, 1]$.



Slika 2. Slučajna razdelitev daljice

Predpostavili bomo, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{V}$ enakomerno porazdeljena na intervalu $[0,1]$, tako da je njena gostota verjetnosti $p_{\mathbf{V}}$ na $\mathbb{R}$: $p_{\mathbf{V}}(v) = 1$ za $0 \le v \le 1$ in $p_{\mathbf{V}}(v) = 0$ sicer. Naj $\mathbf{P}[E]$ označuje verjetnost kateregakoli dogodka E. Porazdelitvena funkcija $F_{\mathbf{V}}$ slučajne spremenljivke $\mathbf{V}$ je dana z izrazom:

$$F_{\mathbf{V}}(v) = \mathbf{P}[\mathbf{V} < v] = \int_{-\infty}^{v} p_{\mathbf{V}}(\nu)\, d\nu = \begin{cases} 0 & \text{za } v < 0\,, \\ v & \text{za } 0 \le v < 1\,, \\ 1 & \text{za } v \ge 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

Naj bo $\mathbf{X} = \log(\mathbf{V}/(1-\mathbf{V}))$. Slučajni spremenljivki $\mathbf{V}$ in $\mathbf{X}$ sta druga z drugo natančno določeni, saj je $v \mapsto \log(v/(1-v))$ bijektivna funkcija iz $(0,1)$ na $\mathbb{R}$. Z robnima točkama intervala ni težav, saj je $\mathbf{P}[\mathbf{V} = 0] = \mathbf{P}[\mathbf{V} = 1] = 0$.

Kako se izražata porazdelitvena funkcija $F_{\mathbf{X}}$ in gostota verjetnosti $p_{\mathbf{X}}$ slučajne spremenljivke $\mathbf{X}$? Po definiciji ([5, §15]) velja za vsak $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \mathbf{P}[\mathbf{X} < x] = \mathbf{P}[\log(\mathbf{V}/(1-\mathbf{V})) < x] = \mathbf{P}[\mathbf{V} < \exp x/(1+\exp x)]\,.$$

Iz (1) vidimo, da je

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \frac{\exp x}{1+\exp x} = \frac{1}{1+\exp(-x)} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{th}(x/2)\right)\,. \tag{2}$$

Gostoto verjetnosti $p_{\mathbf{X}}(x)$ izrazimo iz (2) kot:

$$p_{\mathbf{X}}(x) = F'_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{4\operatorname{ch}^2(x/2)}\,. \tag{3}$$

Privzemimo, da je μ poljubno realno število in s kakršnokoli pozitivno število. Oglejmo si slučajno spremenljivko $\mathbf{Z} = \mu + s\mathbf{X}$. Porazdelitveno funkcijo $F_{\mathbf{Z}}$ in gostoto verjetnosti $p_{\mathbf{Z}}$ slučajne spremenljivke $\mathbf{Z}$ dobimo po običajni poti. Po definiciji je za vsak $z \in \mathbb{R}$:

$$F_{\mathbf{Z}}(z) = \mathbf{P}[\mathbf{Z} < z] = \mathbf{P}[\mu + s\mathbf{X} < z] = \mathbf{P}\left[\mathbf{X} < \frac{z-\mu}{s}\right] = F_{\mathbf{X}}\left(\frac{z-\mu}{s}\right).$$

Zato velja za porazdelitveno funkcijo

$$F_{\mathbf{Z}}(z) = \frac{1}{1+\exp(-\frac{z-\mu}{s})} = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{th}\frac{z-\mu}{2s}\right) \tag{4}$$

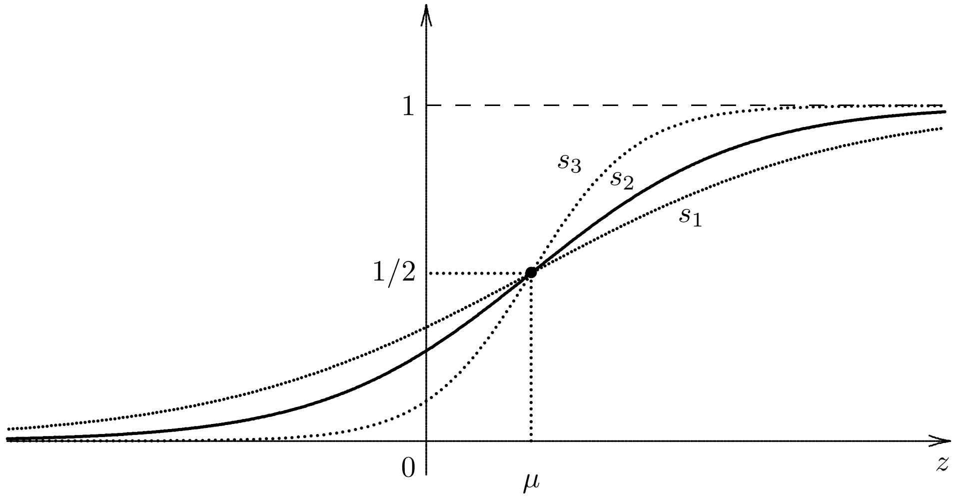
in za ustrezno gostoto

$$p_{\mathbf{Z}}(z) = F'_{\mathbf{Z}}(z) = \frac{\exp(-\frac{z-\mu}{s})}{s(1+\exp(-\frac{z-\mu}{s}))^2} = \frac{1}{4s\,\mathrm{ch}^2\,\frac{z-\mu}{2s}}\,. \tag{5}$$

Pravimo, da ima slučajna spremenljivka $\mathbf{Z}$ *logistično porazdelitev* s parametroma μ in s (glej na primer [2]). Na kratko označimo to porazdelitev z $\mathcal{L}(\mu, s)$. Graf funkcije $F_{\mathbf{Z}}$ ima prevoj v točki $(\mu, 1/2)$, kjer je njena strmina padajoča funkcija parametra s, funkcija $p_{\mathbf{Z}}$ pa ima svoj maksimum v točki $(\mu, 1/(4s))$. Nadalje pa preprost račun pokaže, da velja:

$$F_{\mathbf{Z}}(z)(1-F_{\mathbf{Z}}(z)) = \frac{1}{4\,\mathrm{ch}^2\,\frac{z-\mu}{2s}} = sp_{\mathbf{Z}}(z) = sF'_{\mathbf{Z}}(z)\,.$$

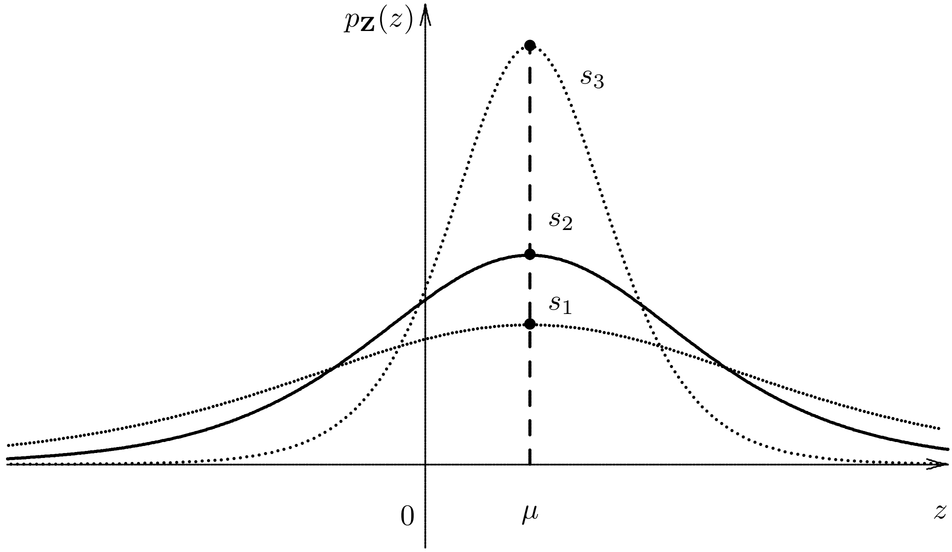
To pomeni, da je porazdelitvena funkcija $F_{\mathbf{Z}}$ rešitev logistične diferencialne enačbe $sy' = y(1-y)$ pri začetnem pogoju $y(0) = 1/(1+\exp(\mu/s))$ in graf funkcije $F_{\mathbf{Z}}$ je res logistična krivulja.



Slika 3. Porazdelitvena funkcija porazdelitve $\mathcal{L}(\mu, s)$ $(s_1 > s_2 > s_3)$

V nadaljevanju bomo spoznali, da sta tako imenovana *lokacija* μ in *skala* s v tesni zvezi z matematičnim upanjem $E[\mathbf{Z}]$ in disperzijo $D[\mathbf{Z}]$ slučajne spremenljivke $\mathbf{Z}$.

Če je $\mu = 0$ in $s = 1$, govorimo o *standardizirani logistični porazdelitvi*, ki jo seveda označujemo z $\mathcal{L}(0, 1)$. Slučajna spremenljivka $\mathbf{X}$, ki smo jo vpeljali zgoraj, ima standardizirano porazdelitev $\mathcal{L}(0, 1)$. Dokazali smo



Slika 4. Gostota verjetnosti logistične porazdelitve $\mathcal{L}(\mu, s)$ $(s_1 > s_2 > s_3)$

Izrek 1. *Če je slučajna spremenljivka* $\mathbf{V}$ *porazdeljena enakomerno na intervalu* $[0, 1]$*, potem ima slučajna spremenljivka* $\mathbf{X} = \log(\mathbf{V}/(1-\mathbf{V}))$ *standardizirano logistično porazdelitev* $\mathcal{L}(0, 1)$*, slučajna spremenljivka* $\mathbf{Z} = \mu + s\mathbf{X}$*, kjer sta* μ *in* s *realni števili in* $s > 0$*, pa logistično porazdelitev* $\mathcal{L}(\mu, s)$*.*

2. Karakteristična funkcija

Karakteristično funkcijo $\varphi_{\mathbf{S}}$ neke slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$ v točki $t \in \mathbb{R}$ definiramo (glej na primer ustrezno poglavje v [5]) kot matematično upanje sestavljenke $\exp(it\mathbf{S})$:

$$\varphi_{\mathbf{S}}(t) = E[\exp(it\mathbf{S})] \,.$$

Karakteristično funkcijo $\varphi_{\mathbf{S}}$ zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$ lahko izrazimo z njeno gostoto verjetnosti $p_{\mathbf{S}}$:

$$\varphi_{\mathbf{S}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{S}}(x) \exp(itx)\, dx \,. \tag{6}$$

Karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$ je očitno Fourierova transformiranka njene gostote ([10]), v verjetnostnem računu pa je pomembno orodje za računanje začetnih momentov ν_n, ki so definirani z izrazom $\nu_n = E[\mathbf{S}^n]$. Pri tem je $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Pri zvezni porazdelitvi jih lahko izrazimo z gostoto:

$$\nu_n = E[\mathbf{S}^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\mathbf{S}}(x)\, dx\,.$$

Z n-kratnim odvajanjem karakteristične funkcije (6) dobimo

$$\varphi_{\mathbf{S}}^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_{\mathbf{S}}(x) \exp(itx)\, dx\,,$$

kar pomeni, da lahko zapišemo začetne momente kot:

$$\nu_n = i^{-n} \varphi_{\mathbf{S}}^{(n)}(0) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

V posebnih primerih je $\nu_0 = 1$ in $\nu_1 = E[\mathbf{S}]$.

Če je na voljo razvoj karakteristične funkcije v potenčno vrsto eksponencialne oblike, to se pravi $\varphi_{\mathbf{S}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n/n!$, lahko začetne momente izrazimo s koeficienti v razvoju:

$$\nu_n = i^{-n} c_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{7}$$

Izrek 2. *Karakteristična funkcija slučajne spremenljivke* $\mathbf{X}$*, ki je porazdeljena standardizirano logistično, je*

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)}\,, \tag{8}$$

karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $\mathbf{Z} = \mu + s\mathbf{X}$*, ki je porazdeljena logistično po zakonu* $\mathcal{L}(\mu, s)$*, pa*

$$\varphi_{\mathbf{Z}}(t) = \exp(i\mu t) \frac{\pi s t}{\operatorname{sh}(\pi s t)}\,. \tag{9}$$

Dokaz. Najprej brez težav preverimo, da je (9) posledica (8):

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{Z}}(t) &= E[\exp(it\mathbf{Z})] = E[\exp(it(\mu + s\mathbf{X}))] = E[\exp(i\mu t)\exp(ist\mathbf{X})] = \\ &= \exp(i\mu t) E[\exp(ist\mathbf{X})] = \exp(i\mu t)\psi_{\mathbf{X}}(st)\,.\end{aligned}$$

Sedaj se posvetimo karakteristični funkciji standardizirane logistične porazdelitve. Po definiciji (6) je za gostoto (3):

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{X}}(x) \exp(itx)\, dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(itx)\, dx}{\operatorname{ch}^2(x/2)}\,.$$

Dobljeni integral bomo izračunali z integracijo kompleksne funkcije f, definirane z izrazom $f(z) = \exp(itz)/(4\,\mathrm{ch}^2(z/2))$, po pozitivno orientiranem robu pravokotnika z oglišči $-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$ v ravnini kompleksnih števil (glej [10]). Označimo ta rob s $\mathcal{C}_R$. Pri tem je R poljubno pozitivno število. Funkcija ima v točki $z = \pi i$ pol druge stopnje kot edino izolirano singularno točko znotraj tega pravokotnika. Po izreku o residuih (ostankih) velja:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f(z), \pi i)\,.$$

Residuum bomo našli v glavnem delu funkcije f glede na točko πi:

$$f(z) = \frac{\exp(itz)}{4\,\mathrm{ch}^2(z/2)} = \frac{\exp(itz)}{2(1+\mathrm{ch}\,z)}\,.$$

Vpeljemo $w = z - \pi i$, da pol $z = \pi i$ funkcije f prenesemo v pol $w = 0$ funkcije g, ki je podana tako:

$$g(w) = f(w+\pi i) = \frac{\exp(it(w+\pi i))}{2(1+\mathrm{ch}(w+\pi i))} = \frac{\exp(-\pi t)\exp(itw)}{2(1-\mathrm{ch}\,w)}\,.$$

Z znanima razvojema v potenčni vrsti dobimo:

$$g(w) = -\frac{\exp(-\pi t)(1 + itw - t^2w^2/2 - it^3w^3/6 + \cdots)}{w^2(1 + w^2/12 + w^4/360 + \cdots)}\,.$$

Kvocient vrst lahko zapišemo kot novo potenčno vrsto:

$$\frac{1 + itw - t^2w^2/2 - it^3w^3/6 + \cdots}{1 + w^2/12 + w^4/360 + \cdots} = a + bw + cw^2 + \cdots$$

Prva koeficienta sta $a = 1$ in $b = it$, kar zadošča za zapis začetka razvoja

$$g(w) = -\frac{\exp(-\pi t)}{w^2}(1 + itw + cw^2 + \cdots)\,,$$

od koder preberemo $\mathrm{Res}(f(z), \pi i) = \mathrm{Res}(g(w), 0) = -it\exp(-\pi t)$ kot koeficient pri potenci w^{-1}.

Vsota integralov po vodoravnih stranicah pravokotnika je

$$\frac{1}{4}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\exp(itx)\,dx}{\mathrm{ch}^2(x/2)} + \frac{1}{4}\int\limits_{R}^{-R} \frac{\exp(it(x+2\pi i))\,dx}{\mathrm{ch}^2((x+2\pi i)/2)} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\exp(itx)\,dx}{\mathrm{ch}^2(x/2)} - \frac{\exp(-2\pi t)}{4}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\exp(itx)\,dx}{\mathrm{ch}^2(x/2)}$$

in v limiti $R \to \infty$ konvergira proti $(1 - \exp(-2\pi t))\varphi_{\mathbf{X}}(t)$, integrala po navpičnih stranicah pravokotnika pa proti 0, o čemer nas prepriča krajši račun. Tako smo našli

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = (1-\exp(-2\pi t))\varphi_{\mathbf{X}}(t) = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),\pi i) = 2\pi t\exp(-\pi t)\,.$$

Velja torej enačba $(1 - \exp(-2\pi t))\varphi_{\mathbf{X}}(t) = 2\pi t\exp(-\pi t)$, iz katere sledi $\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \pi t/\,\mathrm{sh}(\pi t)$. Dobljena funkcija ima v točki $t = 0$ limito 1, kar smo pričakovali. ∎

Iz karakteristične funkcije $\varphi_{\mathbf{X}}$, ki je soda, takoj razberemo, da so vsi začetni momenti lihega reda enaki 0: $\nu_{2n+1} = 0$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$

Iz znanega neskončnega produkta (glej na primer [1, 6, 10])

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

ki konvergira za vsako kompleksno število z, dobimo z zamenjavo $z \mapsto iz$ še

$$\frac{\mathrm{sh}\, z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Zato lahko karakteristično funkcijo napišemo tudi kot

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \frac{\pi t}{\mathrm{sh}(\pi t)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(t/n)^2}\,.$$

V tem produktu pa je vsak faktor zase tudi karakteristična funkcija neke slučajne spremenljivke $\mathbf{X}_n$. Označimo

$$\varphi_{\mathbf{X}_n}(t) = \frac{1}{1+(t/n)^2} = \frac{n^2}{n^2+t^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{10}$$

3. Laplaceova porazdelitev

Slučajna spremenljivka, katere verjetnostna gostota je

$$p(x,\mu,\beta) = \frac{1}{2\beta}\exp(-|x-\mu|/\beta)\,, \quad \beta > 0\,,$$

je porazdeljena po *Laplaceovem zakonu* s parametroma μ in β (glej na primer [1]). Po Laplaceovem zakonu je porazdeljena razlika dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki sta enako porazdeljeni, in sicer po eksponentnem zakonu s parametrom $\beta > 0$:

$$q(x,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta}\exp(-x/\beta) & \text{za } x > 0\,, \\ 0 & \text{za } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Zato Laplaceovi porazdelitvi pravijo tudi *dvojna eksponentna* porazdelitev. Življenjsko dobo delcev pri radioaktivnem razpadu in življenjsko dobo elektronskih komponent se na primer obravnava z eksponentno porazdelitvijo.

Karakteristična funkcija eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke je

$$\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\infty \exp(-x/\beta)\exp(itx)\,dx = \frac{1}{1-i\beta t}\,,$$

karakteristična funkcija nasprotno predznačene slučajne spremenljivke pa $1/(1+i\beta t)$. Zato ima razlika dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki sta porazdeljeni po eksponentnem zakonu z istim parametrom β, karakteristično funkcijo $1/(1-i\beta t)\cdot 1/(1+i\beta t) = 1/(1+\beta^2t^2)$ (glej [5, izrek 33.4]).

Če je $\mu = 0$, dobimo karakteristično funkcijo Laplaceove porazdelitve tudi neposredno:

$$\frac{1}{2\beta}\int\limits_{-\infty}^\infty \exp(-|x|/\beta)\exp(itx)\,dx = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^\infty \exp(-x/\beta)\cos(tx)\,dx = \frac{1}{1+\beta^2t^2}\,.$$

Izrek o edinosti pove (glej [5]), da je razlika dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki sta porazdeljeni po eksponentnem zakonu s parametrom β, porazdeljena po Laplaceovem zakonu s parametroma $\mu = 0$ in β.

Torej je vsak faktor v (10) karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $\mathbf{X}_n$, ki je porazdeljena po Laplaceovem zakonu s parametroma $\mu = 0$ in $\beta = 1/n$.

Denimo, da so slučajne spremenljivke $\mathbf{X}_k$ ($k = 1,\ 2\ ,\ 3, \ldots$) med seboj neodvisne in vse porazdeljene po Laplaceovem zakonu s parametroma $\mu = 0$ in $\beta = 1$. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{X}_2 + \cdots + \frac{1}{n}\mathbf{X}_n\,?$$

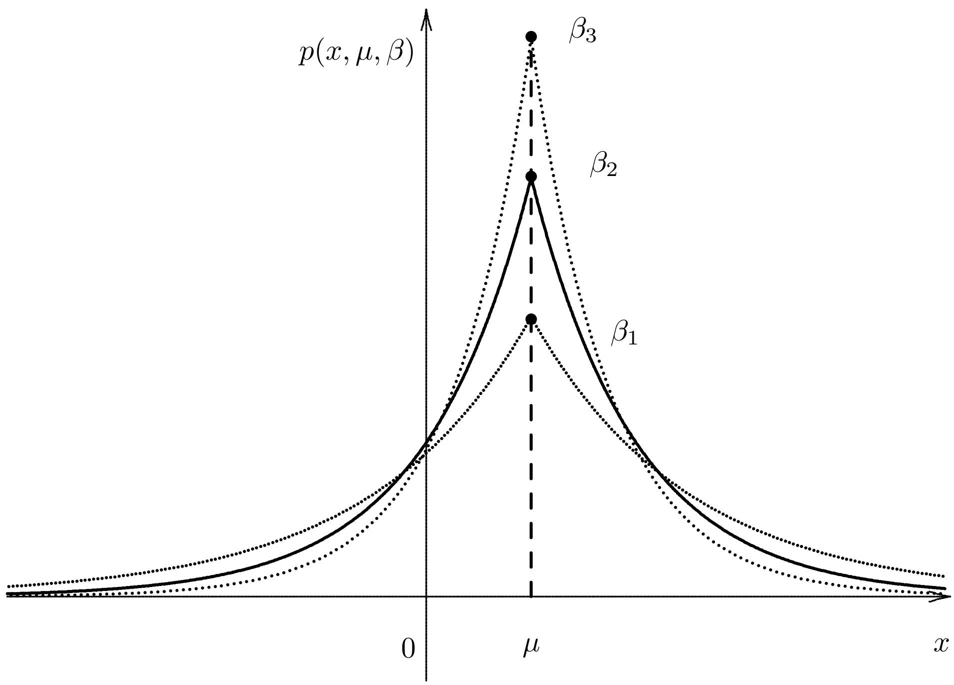
Sumandi v tej vsoti imajo karakteristično funkcijo oblike (10), torej je karakteristična funkcija slučajne spremenljivke $\mathbf{S}_n$:

$$\varphi_{\mathbf{S}_n}(t) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1+(t/k)^2}\,.$$

Pri tem se sklicujemo na izrek, ki pravi, da je karakteristična funkcija vsote končnega števila med seboj neodvisnih slučajnih spremenljivk enaka produktu karakterističnih funkcij posameznih slučajnih spremenljivk (glej [5, izrek 33.4]). Za vsak $t \in \mathbb{R}$ pa je

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\mathbf{S}_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(t/k)^2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(t/k)^2} = \frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)}\,.$$

To pa ima za posledico, da zaporedje porazdelitvenih funkcij $F_{\mathbf{S}_n}$ konvergira po točkah proti porazdelitveni funkciji $F_{\mathbf{S}}$ na vsej realni osi (primerjaj na primer [5, izrek 35.2]) in slučajna spremenljivka $\mathbf{S}$ je porazdeljena standardizirano logistično. Verjetnost dogodka, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{S}$ na danem intervalu, se torej poljubno malo razlikuje od verjetnosti dogodka, da je slučajna spremenljivka $\mathbf{S}_n$ na tem intervalu, če je le n dovolj velik indeks.



Slika 5. Laplaceova porazdelitev s parametroma μ in β ($\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$)

4. Bernoullijeva števila

Začetne momente sodega reda slučajne spremenljivke $\mathbf{X}$ bomo izrazili z Bernoullijevimi števili B_n (več v [1, 6]), ki so definirana z rodovno funkcijo

$$\frac{z}{\exp z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi\,.$$

Če razvijemo $\exp z - 1$ v potenčno vrsto in z njo pomnožimo obe strani zgornje enakosti ter nato primerjamo koeficiente na obeh straneh, hitro najdemo nekaj prvih Bernoullijevih števil: $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$. Poleg tega pa najdemo tudi rekurzivno zvezo, ki jo zapišemo simbolično:

$$B_{n+1} = (1 + B)^{n+1}, \quad B^k \equiv B_k\,.$$

To pomeni, da formalni binom $1 + B$ potenciramo po binomski formuli, potem pa eksponente zamenjamo z indeksi, na primer:

$$B_5 = (1 + B)^5 = 1 + 5B^1 + 10B^2 + 10B^3 + 5B^4 + B^5,$$

$$B_5 = 1 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 + B_5\,,$$

$$1 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0\,.$$

Iz znanih B_1, B_2 in B_3 izračunamo $B_4 = -1/30$. Tako korak za korakom izračunamo poljubno dolgo zaporedje Bernoullijevih števil.

Ker je funkcija $z \mapsto z/(\exp z - 1) + z/2$ soda, sledi iz razvoja

$$\frac{z}{\exp z - 1} - B_1 z = \frac{z}{\exp z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

da so vsa Bernoullijeva števila lihega indeksa od vključno tretjega naprej enaka 0: $B_{2n+1} = 0$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$

$z \mapsto z/\operatorname{sh} z$ lahko razvijemo v potenčno vrsto, katere koeficienti se izražajo z Bernoullijevimi števili. Najprej preverimo, da velja elementarna enakost

$$\frac{z}{\operatorname{sh} z} = \frac{2z}{\exp z - 1} - \frac{2z}{\exp(2z) - 1}\,.$$

Nato z rodovno funkcijo Bernoullijevih števil razvijemo oba člena v potenčni vrsti

$$\frac{z}{\operatorname{sh} z} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2z)^n.$$

Prva vrsta konvergira pri pogoju $|z| < 2\pi$, druga pa pri pogoju $|2z| < 2\pi$. Potem ko pogledamo člene z najnižjimi indeksi, lahko zapišemo:

$$\frac{z}{\operatorname{sh} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-2^{2n})B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \pi\,. \tag{11}$$

Bernoullijeva števila imajo v matematiki (v numerični analizi in v teoriji števil) kar precejšnjo vlogo. Obstaja veliko relacij med njimi in nekaterimi drugimi funkcijami ter z nekaterimi posebnimi števili.

5. Momenti

Sedaj pa lahko izrazimo vse začetne momente slučajne spremenljivke $\mathbf{X}$ z Bernoullijevimi števili.

Izrek 3. *Slučajna spremenljivka* $\mathbf{X}$*, ki je porazdeljena standardizirano logistično, ima vse začetne momente, ki se izražajo kot:*

$$\nu_{2n} = (-1)^n (2-2^{2n})\pi^{2n} B_{2n}\,, \quad \nu_{2n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Njeno matematično upanje in disperzija sta $E[\mathbf{X}] = 0$*,* $D[\mathbf{X}] = \pi^2/3$*.*

Dokaz. Po formuli (11) je

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t) = \frac{\pi t}{\operatorname{sh}(\pi t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-2^{2n})\pi^{2n} B_{2n}}{(2n)!} t^{2n}, \quad |t| < 1\,.$$

Če uporabimo formulo (7), dobimo:

$$\nu_{2n} = i^{-2n}(2-2^{2n})\pi^{2n} B_{2n} = (-1)^n (2-2^{2n})\pi^{2n} B_{2n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Vsi začetni momenti lihih redov pa so enaki 0: $\nu_{2n+1} = 0$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$ ∎

Tako hitro najdemo nekaj začetnih momentov za slučajno spremenljivko $\mathbf{X}$: $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \pi^2/3$, $\nu_3 = 0$, $\nu_4 = 7\pi^4/15$. Torej velja

$$E[\mathbf{X}] = \nu_1 = 0\,, \quad D[\mathbf{X}] = E\big[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^2\big] = \nu_2 = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

Posvetimo se še malo slučajni spremenljivki $\mathbf{Z} = \mu + s\mathbf{X}$. Kot vemo, so centralni momenti μ_n katerekoli slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$ definirani z izrazom:

$$\mu_n = E[(\mathbf{S} - E[\mathbf{S}])^n] \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Izrek 4. *Slučajna spremenljivka* $\mathbf{Z}$*, ki je porazdeljena po zakonu* $\mathcal{L}(\mu, s)$*, ima vse centralne momente:*

$$\mu_{2n} = (-1)^n s^{2n}(2 - 2^{2n})\pi^{2n} B_{2n}\,, \quad \mu_{2n+1} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Njeno matematično upanje in disperzija sta $E[\mathbf{Z}] = \mu$*,* $D[\mathbf{Z}] = s^2\pi^2/3$*.*

Dokaz. Zaradi linearnosti matematičnega upanja je $E[\mathbf{Z}] = E[\mu + s\mathbf{X}] = E[\mu] + sE[\mathbf{X}] = \mu$ in zato

$$\mu_n = E[(\mathbf{Z} - E[\mathbf{Z}])^n] = E[(\mathbf{Z} - \mu)^n] = E[(s\mathbf{X})^n] = s^n E[\mathbf{X}^n] = s^n \nu_n\,.$$

Za nekaj indeksov dobimo: $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = s^2\pi^2/3$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 7s^4\pi^4/15$. Torej res velja: $E[\mathbf{Z}] = \mu$, $D[\mathbf{Z}] = \mu_2 = s^2\pi^2/3$. ■

Lokacija μ je torej matematično upanje slučajne spremenljivke $\mathbf{Z}$, ki je porazdeljena logistično po zakonu $\mathcal{L}(\mu, s)$, skalo s pa lahko izrazimo kot

$$s = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sigma[\mathbf{Z}]\,, \tag{12}$$

pri čemer je $\sigma[\mathbf{Z}] = \sqrt{D[\mathbf{Z}]}$ standardna deviacija slučajne spremenljivke $\mathbf{Z}$. Vsemu skupaj lahko dodamo še asimetrijo $\gamma_1 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$ in eksces $\gamma_2 = \mu_4/\mu_2^2 - 3$. Dobimo: $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 6/5$.

Za slučajno spremenljivko $\mathbf{Z}$, ki je porazdeljena logistično po zakonu $\mathcal{L}(\mu, s)$, lahko izračunamo katerikoli kvantil z_p reda p $(0 < p < 1)$ ali p-ti kvantil (več o kvantilih najdemo v [5, §29]). Število z_p zadošča enačbi $F_{\mathbf{Z}}(z_p) = p$. Rešiti moramo na z_p pri danem p enačbo $F_{\mathbf{Z}}(z_p) = p$. Uporabimo funkcijo (4) in preprost račun pove: $z_p = \mu + s\log(p/(1-p))$. Za $p = 1/2$ dobimo mediano: $m = \mu$. Modus porazdelitve je prav tako μ, ker takrat gostota doseže svoj edini lokalni maksimum.

6. Entropija

Izraz *entropija* v verjetnostnem računu in v teoriji informacije (osnovni vir nam je lahko [4]) je izposojen iz fizike, kjer ga srečamo v termodinamiki in statistični mehaniki. Entropija je količina, ki jo priredimo stanju sistema. Fizik Ludwig Boltzmann (1844–1906) je pokazal, da je entropija premo sorazmerna z logaritmom verjetnosti za to stanje. Entropija izraža nedoločenost stanja sistema. Največ zaslug za vpeljavo pojma *entropija* v verjetnostni račun in teorijo informacije pa je imel Claude E. Shannon (1916–2001) v svojem temeljnem članku [8].

V verjetnostnem računu najprej priredimo entropijo diskretni slučajni spremenljivki $\mathbf{S}$, ki more zavzeti končno mnogo vrednosti, denimo $s_1, s_2, \ldots,$

s_n z ustreznimi verjetnostmi p_1, p_2, $\ldots$, p_n, pri čemer je seveda $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Entropija slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$ je potem definirana z vsoto:

$$H(\mathbf{S}) = H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k \,. \tag{13}$$

Namesto naravnega logaritma lahko uporabljamo tudi logaritem z drugo osnovo, večjo kot 1. Pogosto uporabljamo osnovo 2. Dobljeni entropiji se med seboj razlikujeta le za konstanten faktor. Enota za entropijo je *bit*, če uporabljamo v definiciji entropije logaritem z osnovo 2, in *nat*, če uporabljamo naravni logaritem.

Entropija $H(\mathbf{S})$ izraža nedoločenost diskretne slučajne spremenljivke $\mathbf{S}$, je nenegativna, neodvisna od vrednosti, ki jih more zavzeti, in doseže največjo vrednost $\log n$, če je $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$. Za produkt med seboj neodvisnih diskretnih slučajnih spremenljivk $\mathbf{S}$ in $\mathbf{T}$ velja preprosto pravilo: $H(\mathbf{ST}) = H(\mathbf{S}) + H(\mathbf{T})$. Če lahko slučajna spremenljivka $\mathbf{S}$ zavzame števno neskončno mnogo vrednosti, nadomestimo vsoto v (13) z ustrezno neskončno vrsto, seveda ob predpostavki, da le-ta konvergira.

Po analogiji s (13) definiramo entropijo tudi za zvezno porazdeljeno slučajno spremenljivko $\mathbf{S}$. Denimo, da ima ta gostoto $p_{\mathbf{S}}$. Entropijo $h(\mathbf{S})$ definiramo z izrazom

$$h(\mathbf{S}) = -\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{S}}(x) \log p_{\mathbf{S}}(x)\, dx \,, \tag{14}$$

seveda ob predpostavki, da integral v (14) obstaja. Če se zgodi, da je kje na integracijskem območju $p_{\mathbf{S}}(x) = 0$, vzamemo, kot da je $0 \log 0 = 0$, kar temelji na tem, da ima funkcija $x \mapsto x \log x$ desno limito enako 0 v točki $x = 0$. Toda entropija $h(\mathbf{S})$ ni vselej pozitivna kot v diskretnem primeru. Zato ima tudi posebno ime: pravimo ji *diferencialna entropija*. Pogosto zapišemo diferencialno entropijo kot $h(p)$, kjer je p gostota porazdelitve.

Brez težav lahko preverimo, da za transformaciji $\mathbf{S} \mapsto \mathbf{S} + c$, kjer je c realna konstanta, in $\mathbf{S} \mapsto a\mathbf{S}$, kjer je a od nič različna konstanta, veljata za vsako zvezno porazdeljeno slučajno spremenljivko $\mathbf{S}$ relaciji: $h(\mathbf{S}+c) = h(\mathbf{S})$ (invariantnost glede na premik) in $h(a\mathbf{S}) = h(\mathbf{S}) + \log |a|$.

Primer. Izračunajmo diferencialno entropijo slučajne spremenljivke $\mathbf{Z}$, ki je porazdeljena po zakonu $\mathcal{L}(\mu, s)$, torej z gostoto (5):

$$h(\mathbf{Z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4s \operatorname{ch}^2 \frac{z-\mu}{2s}} \log\left(4s \operatorname{ch}^2 \frac{z-\mu}{2s}\right) dz \,.$$

Najprej uvedemo v zgornji integral novo integracijsko spremenljivko x z relacijo $x = (z - \mu)/s$:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{Z}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\,\mathrm{ch}^2(x/2)} \log(4s\,\mathrm{ch}^2(x/2))\,dx = \\ &= \log(4s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\,\mathrm{ch}^2(x/2)}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x/2)} \log \mathrm{ch}(x/2)\,dx\,. \end{aligned}$$

Prvi integral je enak 1, ker je pod integralskim znakom ravno gostota porazdelitve $\mathcal{L}(0,1)$, drugi integral pa računamo z metodo per partes:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x/2)} \log \mathrm{ch}(x/2)\,dx &= 2\,\mathrm{th}(x/2) \log \mathrm{ch}(x/2) - \int \mathrm{th}^2(x/2)\,dx = \\ &= 2(\mathrm{th}(x/2) \log \mathrm{ch}(x/2) - x/2) + \int \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x/2)}\,dx\,. \end{aligned}$$

Prvi člen je pri $x = 0$ enak 0, zato je

$$h(\mathbf{Z}) = \log(4s) + 2 \lim_{x\to\infty} (\mathrm{th}(x/2) \log \mathrm{ch}(x/2) - x/2) + 2\,.$$

Limito hitro izračunamo tako, da predhodno preoblikujemo:

$$\mathrm{th}(x/2) \log \mathrm{ch}(x/2) - x/2 = \mathrm{th}(x/2)(\log(1 + \exp(-x)) - \log 2) - \frac{x}{\exp x + 1}\,.$$

Zgornji izraz očitno gre proti $-\log 2$, ko $x \to \infty$. Nazadnje imamo izraz za entropijo: $h(\mathbf{Z}) = \log s + 2 = \log(e^2 s)$.

Vidimo, da je predznak diferencialne entropije logistične porazdelitve $\mathcal{L}(\mu, s)$ neodvisen od lokacije μ, odvisen pa je od skale s: za $s > \exp(-2)$ je $h(\mathbf{Z}) > 0$, za $s = \exp(-2)$ je $h(\mathbf{Z}) = 0$ in za $0 < s < \exp(-2)$ je $h(\mathbf{Z}) < 0$.

V zvezi z diferencialno entropijo porazdelitve je še veliko zanimivosti, ki jih najdemo v obsežni literaturi. Vprašajmo se samo še po tisti zvezni porazdelitvi, ki ima pri dani varianci σ^2 največjo diferencialno entropijo. Zaradi invariantnosti diferencialne entropije glede na premik lahko privzamemo, da je matematično upanje iskane porazdelitve enako 0. Naj bo $p(x)$ gostota iskane porazdelitve. Iščemo ekstrem integrala $-\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x)\,dx$ pri pogojih $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$ in $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx = \sigma^2$. Z metodami variacijskega računa (podobno kot rešujemo izoperimetrični problem, glej na primer [7, VII. pogl.]) hitro dobimo

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

torej gostoto normalne porazdelitve $\mathcal{N}(0,\sigma)$. Še laže kot za logistično porazdelitev dobimo za normalno: $h(p_{\mathcal{N}}) = \log(\sigma\sqrt{2\pi e}) \approx \log(4{,}13\sigma)$. Potem je pri istem σ za logistično porazdelitev $\mathcal{L}(0,s)$ skala $s = \sigma\sqrt{3}/\pi$ in diferencialna entropija $h(p_{\mathcal{L}}) = \log(\sigma e^2\sqrt{3}/\pi) \approx \log(4{,}07\sigma)$, kar ni dosti manj kot pri normalni porazdelitvi.

7. Sklep

Obravnavali smo le najenostavnejše izreke v zvezi z logistično porazdelitvijo. Obstajajo tudi njene posplošitve z dodatnimi parametri. Zaradi razmeroma preprostih funkcij, ki opisujejo logistično porazdelitev, jo včasih uporabljajo namesto normalne tako, da po formuli (12) normalni zakon $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ nadomestijo z logističnim $\mathcal{L}(\mu,\sigma\sqrt{3}/\pi)$. Po obeh zakonih imamo potem enaki matematični upanji, disperziji in asimetriji. Opazna razlika je v ekscesu. Toda računanje kvantilov je pri logistični porazdelitvi bistveno enostavnejše kot pri normalni.

Logistična porazdelitev je uporabna na različnih področjih znanosti: v samem verjetnostnem računu in seveda pri statistiki v biologiji, epidemiologiji, psihologiji, tehnologiji in ekonomiji.

Šahovske zveze po svetu primerjajo moči šahistov glede na njihove uspehe in pripravljajo tako imenovane *rating lestvice*. Sistemov, po katerih pridejo do teh lestvic, je več. Mednarodna šahovska zveza FIDE (Fédération Internationale des Échecs) jih objavlja dvakrat na leto, do njih pa prihaja po sistemu, ki temelji ravno na *logistični porazdelitvi*.

LITERATURA

[1] M. Abramowitz in I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover publications, New York, 1972.

[2] N. Balakrishnan, *Handbook of the logistic distribution*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[3] T. M. Cover in J. A. Thomas, *Elements of information theory*, Wiley, New York, 2006.

[4] R. Jamnik, *Elementi teorije informacije*, Knjižnica Sigma 10, DZS, Ljubljana, 1974.

[5] R. Jamnik, *Verjetnostni račun*, Matematika – fizika 3, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1971.

[6] I. S. Gradsteyn in I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums and products*, ur. A. Jeffrey, Academic Press, New York, 1994.

[7] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, Matematika – fizika 5, DZS, Ljubljana, 1974.

[8] C. Shannon, *A mathematical theory of communication*, The Bell system technical journal **27** (1948), str. 379–424 in 623–656.

[9] I. Vidav, *Višja matematika I*, Matematika – fizika 6, DMFA–založništvo, Ljubljana, 2008.

[10] I. Vidav, *Višja matematika III*, Matematika – fizika 8, DZS, Ljubljana, 1976.

PETDESETLETNICA LASERJEV

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.65.+g

Pred petdesetimi leti se je začelo lasersko obdobje, ki je prineslo veliko novega v znanost, tehniko in vsakdanje življenje. Pomembni koraki na poti do njega so bili napoved stimuliranega sevanja ter izumi maserja in rubinskega ter helij-neonskega laserja.

THE FIFTIETH ANIVERSARY OF LASERS

Fifty years ago the laser era began which brought many a novelty into science, technology, and everyday life. Important steps on the way to it were the prediction of stimulated emission and the invention of the maser and the ruby and He-Ne laser.

Stimulirano sevanje

Na koncu 19. stoletja so na Državni fizikalno-tehniški ustanovi v Berlinu vse natančneje merili spektralno gostoto v sevanju črnega telesa. Za teoretično ozadje je poskrbel Wilhelm Wien. V prvem koraku je leta 1893 obravnaval sevanje v valju z idealno odbojnimi stenami z batom. Ugotovil je, da je kvocient frekvence, pri kateri ima spektralna gostota vrh, in absolutne temperature T konstanten. Uvidel je, da je v splošnem spektralna gostota odvisna od funkcije kvocienta ν/T, pomnožene s tretjo potenco frekvence ν. Tri leta pozneje je to funkcijo izrazil po zgledu Maxwellove porazdelitve molekul po hitrosti:

$$u = \frac{dw}{d\nu} = \nu^3 f(\nu/T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\, \mathrm{e}^{-h\nu/kT}\,. \tag{1}$$

w je povprečna gostota energije v sevanju ter h Planckova in k Boltzmannova konstanta.

Najprej se je zdelo, da merjenja podpirajo *Wienovo enačbo.* Potem pa so pokazala, da je pri konstantni majhni frekvenci spektralna gostota sorazmerna s temperaturo. Na tej podlagi je leta 1900 Max Planck prek entropije sevanja Wienovo enačbo dopolnil v *Planckov zakon*:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{h\nu/kT} - 1}\,. \tag{2}$$

Wienova enačba je približek zakona za $h\nu/kT \gg 1$. Konstante v (1) smo naravnali po tem.

Sevanje sodeluje s snovjo. Mislimo na množico atomov kakega elementa in se omejimo na dve stanji. Opis ne velja samo za dve stanji atoma v plinu, ampak tudi za molekule, atome primesi v kristalu izolatorja in elektrone v kristalu polprevodnika. Prvo stanje naj ima manjšo energijo W_1, drugo pa večjo W_2. Atom v stanju z večjo energijo seva sevanje s frekvenco $\nu = (W_2 - W_1)/h$. Atom v stanju z manjšo energijo v sevanju s spektralno gostoto $u = u(\nu)$ absorbira sevanje s to frekvenco. Naj bo N_2 atomov v stanju z večjo energijo in N_1 atomov v stanju z manjšo. V časovni enoti N_2A atomov s sevanjem iz stanja z večjo energijo preide v stanje z manjšo in $N_1B_{12}u$ atomov z absorpcijo iz stanja z manjšo energijo v stanje z večjo. $A = A_{21}$ ima vlogo verjetnosti na časovno enoto za prehod atoma s sevanjem in $B_{12}u$ za prehod atoma z absorpcijo. V toplotnem ravnovesju s sevanjem toliko atomov iz stanja z večjo energijo preide v stanje z manjšo, kot jih v tem času z absorpcijo preide iz stanja z manjšo energijo v stanje z večjo:

$$N_2A = N_1B_{12}u\,. \tag{3}$$

V ravnovesju je po Maxwell-Boltzmannovem zakonu v stanju z večjo energijo manj atomov kot v stanju z manjšo: $N_2/N_1 = \mathrm{e}^{-(W_2-W_1)/kT} = \mathrm{e}^{-h\nu/kT}$. To upoštevamo v zvezi (3) in iz enačbe (1) razberemo: $A/B_{12} = 8\pi h\nu^3/c^3$.

Zveza (3) ustreza Wienovi enačbi, ne pa Planckovemu zakonu (2). Po tem sklepamo, da poleg sevanja, ki ga imenujmo *spontano*, in absorpcije obstaja še tretji pojav. Po zgradbi zakona sklepamo, da gre za prehod iz stanja z večjo energijo v stanje z manjšo kot pri spontanem sevanju. Vendar ta prehod povzroči sevanje s pravo frekvenco, kakršno je udeleženo pri absorpciji. Prehod imenujmo *stimulirano sevanje*. Zvezi (3) zato dodamo število atomov $N_2B_{21}u$, ki v časovni enoti s stimuliranim sevanjem iz stanja z večjo energijo preide v stanje z manjšo:

$$N_2A + N_2B_{21}u = N_1B_{12}u\,. \tag{4}$$

$B_{21}u$ imamo za verjetnost na časovno enoto za prehod atoma s stimuliranim sevanjem. Enačba (4) ustreza Planckovemu zakonu, če poleg zapisane zveze velja še [1]:

$$B_{12} = B_{21} = B\,, \quad \frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,. \tag{5}$$

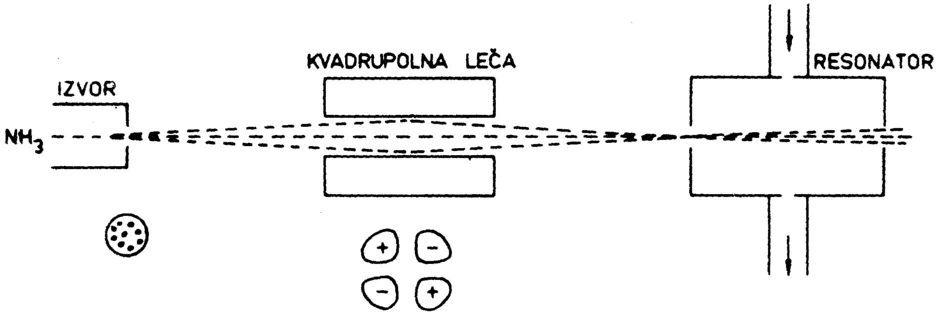
Vzeli smo, da stanji nista degenerirani, se pravi, da dani energiji ustreza eno samo stanje. Zvezi (5) je izpeljal Albert Einstein leta 1916 in A in B sta *Einsteinova koeficienta*. Imeni spontano in stimulirano sevanje sta novejši.

Tokovi, ki ustrezajo spontanemu in stimuliranemu sevanju ter absorpciji, so sorazmerni z N_2A, N_2Bu in N_1Bu. Tako sta tokova spontanega in stimuliranega sevanja v razmerju $A/(Bu) = \mathrm{e}^{h\nu/kT} - 1$ in tokova absorpcije in stimuliranega sevanja v razmerju $N_1/N_2 = \mathrm{e}^{h\nu/kT}$. Eksponentni faktor je pri sobni temperaturi za vidno svetlobo zelo velik, tako da je delež stimuliranega sevanja zanemarljiv. Spočetka so mislili, da je stimulirano sevanje teoretična posebnost brez praktičnega pomena. V ravnovesju zagotovo ni mogoče doseči, da bi se ta delež povečal. Atome je treba neprekinjeno motiti od zunaj, tako da je v stanju z večjo energijo več atomov kot v stanju z manjšo. V taki *obrnjeni zasedenosti* se poveča delež stimuliranega in spontanega sevanja v primeri z deležem absorpcije. Poleg tega je treba doseči veliko gostoto energije v valovanju s pravo frekvenco, kar poveča delež stimuliranega sevanja in absorpcije v primeri z deležem spontanega sevanja.

Stimulirano sevanje je pomembno. Atomi v razredčenem plinu spontano sevajo neodvisno drug od drugega valovne poteze v različnih smereh in z različno smerjo polarizacije. Atomi se neurejeno gibajo z različnimi hitrostmi, tako da se zaradi Dopplerjevega pojava frekvence potez med seboj nekoliko razlikujejo. Nastalo zmešnjavo valovnih potez imenujemo *nekoherentno valovanje*. Tako je tudi sevanje trdnih svetil, ker njihovi deli sevajo neodvisno drug od drugega. Stimulirano izsevano valovanje pa ima enako smer, enako frekvenco in enako polarizacijo kot valovanje, ki ga je zbudilo. Tako pri stimuliranem sevanju nastane *koherentno valovanje*, ki ga vsaj v delu lahko opišemo z izrazom za krogelno ali ravno valovanje.

Maser

Posamezni fiziki so se spraševali, ali bi bilo mogoče zaznati stimulirano sevanje. Poskusi v letih 1928, ko je Rudolf W. Ladenburg potrdil stimulirano sevanje, 1939, ko je Valentin A. Fabrikant napovedal ojačevanje kratkih valov s stimuliranim sevanjem, 1947, ko sta Willis E. Lamb in R. C. Retherford demonstrirala stimulirano sevanje v vodikovem spektru, in 1950, ko je Alfred Kastler predlagal način optičnega črpanja, so kazali napredek, a niso zbudili posebnega zanimanja. Preboj je povzročil *maser*. Ime sestavljajo začetne črke angleških besed ojačevanje mikrovalov s stimuliranim sevanjem. O zamisli maserja sta leta 1952 na sestanku za radijsko spektroskopijo poročala Aleksandr M. Prohorov in njegov mlajši sodelavec Nikolaj G. Basov s fizikalnega inštituta P. N. Lebedev v Moskvi. Ugotovitve sta objavila leta 1954. Neodvisno od teh ugotovitev so na newyorški univerzi Columbia v letih 1954 in 1955 Charles H. Townes in mlajša sodelavca James P. Gordon in Herbert J. Zeiger izdelali *maser na curek molekul amoniaka*. Nekateri znani fiziki, ki so poznali načrte, so menili, da jim to ne bo uspelo.



Slika 1. V amoniakovem maserju skozi drobne šobe izhaja curek molekul. Kvadrupolna električna leča izloči molekule v osnovnem stanju. Curek molekul v vzbujenem stanju vstopi v resonator, v katerem vpadno valovanje s pravo frekvenco vzbudi stimulirano sevanje. Zaznavajo ojačeno sevanje, ki zapusti resonator.

Molekula amoniaka NH_3 ima osnovno stanje razcepljeno na dve bližnji stanji, za prehod med katerima je značilna frekvenca $23{,}87 \cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1}$ ali valovna dolžina 1,256 cm na območju mikrovalov. V curku molekul amoniaka pri sobni temperaturi je za malenkost več molekul v stanju z manjšo energijo kot v stanju z večjo. V nehomogenem električnem polju molekule v stanju z manjšo energijo silijo na območje z manjšo jakostjo polja, molekule v stanju z večjo pa na območje z večjo. Po cevi z luknjičasto šobo so vodili amoniak z območja s tlakom okoli milibara na območje z veliko manjšim tlakom skozi kvadrupolno električno lečo. Molekule v stanju z manjšo energijo so se odklonile od osi, molekule v stanju z večjo energijo pa proti osi. Curek molekul, v katerem so prevladale molekule v stanju z večjo energijo, so speljali v votlinski resonator. Sevanje s pravo frekvenco, ki so ga po valovnem vodniku pravokotno na smer curka molekul uvedli v resonator, je povzročilo stimulirano sevanje molekul. Ojačeno sevanje je na nasprotni strani po valovnem vodniku zapustilo resonator. S takim ojačevalnikom je postalo mogoče ojačevati energijske tokove s tisočkrat manjšo gostoto energije kot z ojačevalnikom z elektronko.

Danes maserje s curkom molekul, na primer vodika, rabijo kot oscilatorje z izredno stabilno frekvenco. V ojačevalnikih pa izkoriščajo kristale v magnetnem polju pri temperaturi tekočega helija. Paramagnetnemu kristalu primešajo diamagnetne atome s tremi spinskimi stanji, na katera se zaradi Zeemanovega pojava razcepi dano stanje. Taki ojačevalniki so pomembni pri sprejemu sporočil z umetnih satelitov in vesoljskih sond [2].

Na poti do laserjev

Po uvedbi maserjev so po svetu, posebno v Združenih državah, veliko razmišljali o možnosti, da bi razširili njihovo delovanje na območje vidne svetobe. Pri tem so naleteli na nekaj ovir. Vidna svetloba ima več kot dvajsettisočkrat večjo frekvenco od mikrovalov. Molekule amoniaka sevajo v povprečju po stotino sekunde, povprečni čas sevanja atomov pa je milijonkrat krajši.

Leta 1957 se je Townes pogovarjal z Gordonom Gouldom, ki si je že nekaj časa prizadeval doktorirati na univerzi Columbia in je raziskoval tedaj novo tehniko zbujanja atomov s svetlobo. Pogovor se je sukal okoli „optičnih maserjev“ in prijave patentov. Gouldu se je porodila zamisel, kako bi s svetlobo zbujal atome, da bi prehajali iz stanja z manjšo energijo v stanje z večjo. V laboratorijskem dnevniku je opisal zamisel za to *optično črpanje* in še številne druge zamisli, med njimi tudi zbujanje s trki. Dnevnik je overil pri notarju. Zapustil je univerzo in se zaposlil pri manjši družbi Technical Research Group, TRG, ki je delala za vojsko in ki je bila pripravljena izvesti njegove načrte. Vendar Gould pri njih ni mogel neposredno sodelovati, ker kot levičar ni smel delati pri zaupnih nalogah. (Zaradi tega je med drugo svetovno vojno zgubil mesto v Los Alamosu.)

Townes je bil tudi svetovalec Bellovih laboratorijev v Murray Hillu v New Jerseyju. V njih je delal njegov svak Arthur L. Schawlow, ki je prej pri njem doktoriral. Poleti 1958 sta v članku *Infrardeči in optični maserji* pregledala načelne možnosti za take naprave in še posebej za napravo s kalijevo paro ter prijavila patent. Članek je v Združenih državah zbudil veliko zanimanja in vzpodbudil nekaj znanstvenih sestankov. Za „orožje s curki“ se je začela zanimati tudi ameriška vojska in je podprla raziskovalne naloge ter znanstvene sestanke s to usmeritvijo.

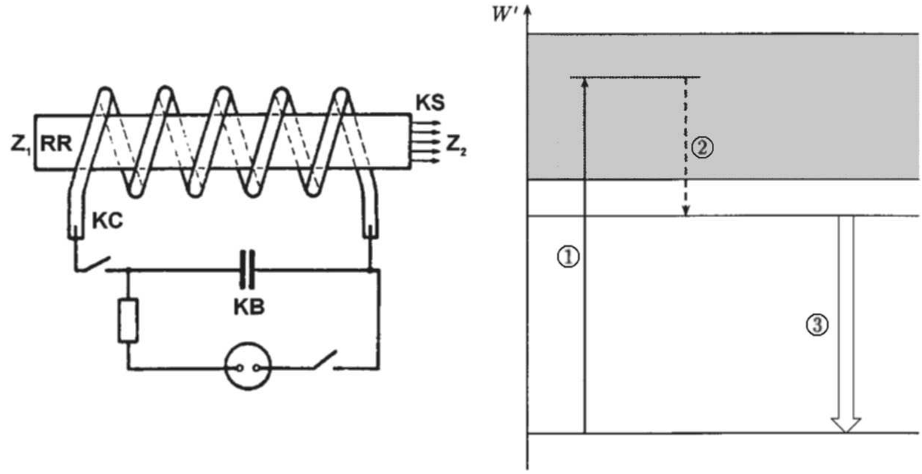
Townes, Schawlow in Gould ter Basov in Prohorov so, delno neodvisno drug od drugega, uvideli, da votlinski resonator pri svetlobi ni uporaben. V njem je mogočih preveč bližnjih lastnih nihanj. Predlagali so „odprt resonator“ Fabry-Perotove vrste med vzporednima zrcaloma, med katerima nastane stoječe valovanje v smeri pravokotno na zrcali. Razdalja med zrcaloma mora biti celoštevilski večkratnik polovične valovne dolžine. V stoječem valovanju naraste gostota energije pri frekvenci prehoda. K temu valovanju prispeva stimulirano sevanje, ki ga sproži spontano sevanje enega od atomov. Pri obrnjeni zasedenosti se stimulirano sevanje ojačuje in prevlada nad spontanim sevanjem in absorpcijo, če je zbujanje dovolj izdatno. Do tega pride lahko le, če so vključena tri ali štiri stanja, dve stanji ne zadostujeta.

Na znanstvenem sestanku sredi leta 1959 je Gould v svojem poročilu prvič uporabil ime laser, v katerem je „mikrovalove“ v „maserju“ nadomestil s „svetlobo“. Schawlow, ki je bil znan kot šaljivec, je zatrdil, da naprava bolj kot ojačevalnik deluje kot oscilator. Zato naj bi ji rekli loser (zguba). Schawlow se je motil tudi nekaj mesecev pozneje. Na sestanku je obravnaval lastnosti rubina, to je aluminijevega oksida s primesjo kroma. Obetaven se mu je zdel temni rubin z izdatno primesjo kroma, ne pa rožnati rubin z majhno primesjo kroma.

Raziskovalci v industrijskih laboratorijih ali industrijske družbe navadno novo spoznanje prijavijo kot patent. Pogosto pride do patentnih sporov. Tak spor, v katerega se je zapletel Gould, je trajal trideset let. On in njegova družba sta prvi patent prijavila leta 1959 in v letih 1977 in 1979 dobila priznanih nekaj patentov. Prišlo je do zaslišanj, razprav in pritožb na patentnem uradu in na sodiščih. Dogodkov ni lahko pregledati, ker so nekatere družbe prešle v last drugih družb in so ustanavljali nove. Pravdanje se je vleklo in doživelo nekaj nenavadnih obratov. Nazadnje je leta 1985 doseglo zvezno sodišče v Washingtonu in se končalo dve leti zatem. V celoti so Gouldu nazadnje priznali 48 patentov, tudi patente za optično črpanje, zbujanje s trki in Brewstrovi okenci. Gould je vmes svoje pravice prodal, da je kril stroške za pravdanje. Pozneje jih je odkupil nazaj, ko je družba zašla v težave. Na koncu naj bi dobil več milijonov dolarjev. Številnim laserskim strokovnjakom se zdijo nekatere sodne odločitve sporne [3–5].

Rubinski laser

Theodore H. Maiman je v Letalski družbi Hughes v Malibuju v Kaliforniji izdelal uspešen maser z rožnatim rubinom. Ni se oziral na razširjeno mnenje, da tak rubin ni uporaben za laser. Kristal rubina je na vzporednih osnovnih ploskvah posrebril. Ena od ploskev je bila popolnoma posrebrena, druga je prepuščala majhen del vpadne svetlobe. Kristal je obdal z vijačno ksenonovo cevjo, kakršne uporabljajo v fotografskih bliskavkah. Naelektren kondenzator je spraznil skozi cev, da je nastal močan svetlobni blisk. Povzročil je, da so atomi kroma z absorpcijo prešli v stanja z veliko energijo. Redki atomi kroma v kristalu so prevzeli vlogo atomov v razredčenem plinu. Zaradi sodelovanja s kristalno mrežo so atomi izgubljali energijo. Tako je nastala obrnjena zasedenost med sosednjima stanjema. Kak atom je spontano seval. Sevanje se je odbijalo na posrebrenih mejnih ploskvah in v kristalu je nastalo stoječe valovanje. To je povzročalo stimulirano sevanje, ki se je ojačevalo. Skozi slabše posrebreno mejno ploskev je kristal izseval sunek rdeče koherentne svetlobe. Ob ponovnem blisku je nastal nov sunek. Sredi maja 1960 je Maiman opazil, da se je izrazito povečala moč sunka in zožila spektralna črta. Po tem je sklepal, da je dosegel lasersko delovanje. Rubinski laser izkorišča prehode med tremi stanji.



Slika 2. Poenostavljena risba kaže zgradbo rubinskega laserja (levo): RR valjasta rubinska paličica, Z_1 zrcalo, Z_2 zrcalo prepušča majhen del vpadne svetlobe, KC ksenonova cevka v obliki vijačnice ovija rubinsko paličico, KB kondenzatorji, KS curek koherentne svetlobe. Risba kaže prehode med stanji v kristalu (desno): (1) prehod ob absorpciji svetlobe iz ksenonove cevke – optično črpanje – iz osnovnega stanja na širok energijski pas, (2) prehod brez sevanja v ostro stanje, (3) prehod ob stimuliranem sevanju v osnovno stanje. Narisana so stanja, pomembna za sevanje laserja pri valovni dolžini 694,3 nm. Razbrati je mogoče, da rubinski laser uporablja tri stanja.

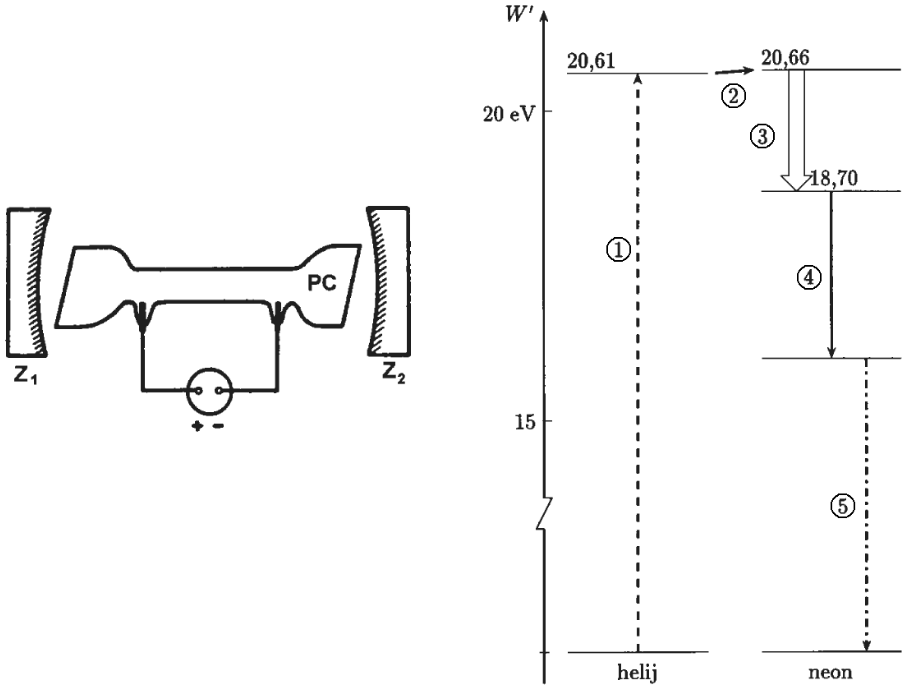
Kratek opis poskusa z naslovom *Optično masersko delovanje v rubinu* je poslal reviji Physical Review Letters. Urednik je rokopis takoj zavrnil. Tik pred tem je Maiman namreč v tej reviji objavil članek o lastnostih rožnatega rubina. Najbrž se je urednik želel izogniti vrsti člankov o maserjih, ki bi se med seboj le malo razlikovali. Spregledal pa je pomembno odkritje. Na začetku julija je družba Hughes sklicala tiskovno konferenco, potem ko je londonska revija Nature skrajšani članek sprejela v objavo, a preden je izšel. Nekateri fiziki so podvomili o tem, da je zares šlo za lasersko delovanje. Maiman je daljši članek poslal reviji Journal of Applied Physics, a tudi s tem ni imel sreče. Nepooblaščeno ga je objavila angleška revija, ki je do rokopisa prišla na tiskovni konferenci. Tako je moral rokopis umakniti.

Na univerzi Columbia se naprava s kalijevo paro ni obnesla in so delo na njej ustavili. Tekme za laser se je udeležilo več laboratorijev industrijskih družb, med njimi tudi Bellovi laboratoriji. Nekaterim njihovim raziskovalcem se je Maimanovo poročilo zdelo pomanjkljivo. Pohiteli so in se prepričali o delovanju rubinskega laserja. Robert J. Collins, Donald F. Nelson, Schawlow, Walter Bond, Geoffrey B. Garret in Wolfgang Kaiser so že konec avgusta dokončali poročilo o rubinskem laserju, ki je v Physical Review Letters izšlo oktobra. Opisali so zoženje laserskega curka, ki je na steni dal majhno rdečo piko. Maiman ni poročal o zoženju curka, ki je poleg močnega ojačenja in ozke spektralne črte značilno za lasersko delovanje. Menda je bil njegov prvi rubinov kristal razmeroma majhen in optično ni bil neoporečen. Z drugim kristalom v obliki paličke z dolžino okoli 10 cm pa je pozneje opazoval zožitev. Maiman tudi ni omenil, da se je v odvisnosti moči v sunku od časa pokazalo veliko ostrih zob. Sicer jih je opazil, a je mislil, da gre za posebnost merilne naprave. V Bellovih laboratorijih so ugotovili, da so to *relaksacijska nihanja*, ki so značilna za lasersko delovanje. Kaže, da sta Maiman in družba Hughes pohitela z objavo, da ju ne bi kdo prehitel. Nekaj časa je nad Maimanovim odkritjem ležala senca in med družbo Hughes in Bellovimi laboratoriji je prišlo do napetosti. Čez čas so se nasprotja polegla in so Maimanu priznali prvenstvo. Po petdesetih letih so poskusili razčistiti odnos Bellovih laboratorijev do Maimanovega odkritja in Maimanu dati dolžno priznanje [4]. Uredništvo Physics Today pa je po napaki v uvodu članka dodalo, „da je delo v Bellovih laboratorijih poleti 1960 vodilo k ustvaritvi prvega rubinskega laserja“. V pismih se je pet bralcev zavzelo za Maimana [6]. Eden od njih je zapisal, da je spoznal, „kako umazan je lahko napredek v fiziki“.

Helij-neonski laser

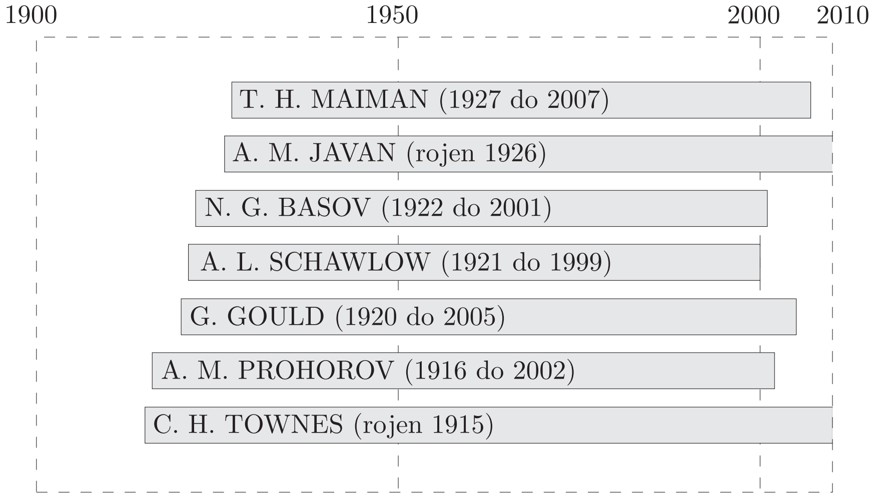
Drugo raziskovalno skupino v Bellovih laboratorijih je vodil Ali M. Javan, ki je doktoriral pri Townesu, nekaj časa sodeloval z njim, potem pa leta 1958 postal član laboratorijev. Javan je stavil na plinski laser. Po premisleku je izbral mešanico helija in neona in o tem poročal. Z njim sta sodelovala William R. Bennett in Donald R. Heriot. Kaže, da so si vzeli več časa, čeprav tudi pri njih ni šlo brez težav. Končni poskus so izvedli sredi decembra 1960. Steklene dele naprav so pred poskusom dlje časa segrevali, da so izgnali adsorbirane primesi. Pred poskusom so cev napolnili z mešanico helija in neona v določenem razmerju. Cev so priključili na enosmerno napetost in po plinu pognali tok. Dobili so zelo ozek rdeč laserski curek z zelo ozko spektralno črto, kar je pričalo o laserskem delovanju. To je bil prvi plinski laser in prvi laser z neprekinjenim delovanjem. Članek *Obrnjena zasedenost in neprekinjeno optično masersko nihanje v električnem toku po plinu, ki vsebuje mešanico helija in neona* je izšel februarja 1961, ko so tudi priredili tiskovno konferenco. Javan in Bennett sta ta laser patentirala.

Helij-neonski laser izkorišča prehode med štirimi stanji. V cevi s preme-



Slika 3. Poenostavljena risba kaže zgradbo helij-neonskega laserja (levo): PC plinska cevka z mešanico helija in neona pri nizkem tlaku, Z_1 krogelno zrcalo, Z_2 krogelno zrcalo, ki prepušča majhen del vpadne svetlobe. Stranski steni sta nagnjeni pod Brewstrovim kotom. Risba kaže prehode med stanji (desno). Levi del zadeva stanje atoma helija, desni pa stanje atoma neona: (1) po trku z elektronom helijev atom preide v vzbujeno stanje, iz katerega ne more preiti s sevanjem, (2) pri trku z atomom helija atom neona preide v stanje z energijo okoli 20 eV, (3) prehod s stimuliranim sevanjem v stanje z manjšo energijo, (4) prehod s spontanim sevanjem v stanje s še manjšo energijo, (5) prehod v osnovno stanje ob trku atoma s steno posode. Narisana so stanja, pomembna za sevanje laserja pri valovni dolžini 632,8 nm. Razbrati je mogoče, da helij-neonski laser uporablja štiri stanja.

rom okoli centimetra in dolžino do metra je mešanica plinov pri tlaku okoli milibara. Navadno je sedem do desetkrat več neona kot helija. Pri trkih z elektroni nekateri atomi helija iz osnovnega stanja preidejo v vzbujeno stanje, iz katerega lahko preidejo le ob trkih. Pri trku atom neona prevzame energijo od atoma helija. Vlogo črpanja prevzamejo torej trki med atomi. Tako nastane obrnjena zasedenost med sosednjima stanjema atoma neona. Na začetku kak neonov atom spontano seva. Valovanje po plinu potuje sem in tja med krogelnima zrcaloma, ki sta zunaj cevi. Cev ima okenca, ki po Brewstrovem zakonu prepuščajo valovanje z jakostjo električnega polja v vpadni ravnini. Valovanje s pravo smerjo in polarizacijo povzroča stimulirano sevanje drugih neonovih atomov in sevanje se ojačuje. Eno od zrcal prepušča majhen del valovanja.



Slika 4. „Tekme za laser" se je udeležilo veliko raziskovalcev iz različnih družb in ustanov. Glavne navaja preglednica. Leta 1964 so „za temeljno delo v kvantni elektroniki, ki je pripeljalo do izdelave oscilatorjev in ojačevalnikov na osnovi masersko-laserskega načela", dobili Nobelovo nagrado Townes (polovico) ter Basov in Prohorov (po četrtino), leta 1981 pa Schawlow in Nicolaas Bloembergen „za prispevek k razvoju laserske spektroskopije".

Na prehodu med letoma 1960 in 1961 je delovalo že pet vrst laserjev. Kmalu se je število različnih vrst laserjev še povečalo. Leta 1962 so izdelali prvi polprevodniški laser. Ti laserji ali laserske diode so v naslednjih letih doživeli hiter razvoj in jih danes v vsakdanjem življenju največ uporabljamo v zapisovalnikih in čitalnikih plošč DVD in CD, laserskih tiskalnikih, mikrofonih in kazalnikih, merilnikih razdalj ter čitalnikih črtne kode pri blagajnah trgovin.

LITERATURA

[1] M. Čopič, *Zakaj je laserski curek ozek in enobarven?*, Obozrnik mat. fiz. **36** (1989) 1, str. 13–23.

[2] S. Poberaj, *Maserji*, Obzornik mat. fiz. **7** (1960) 3, str. 108–115.

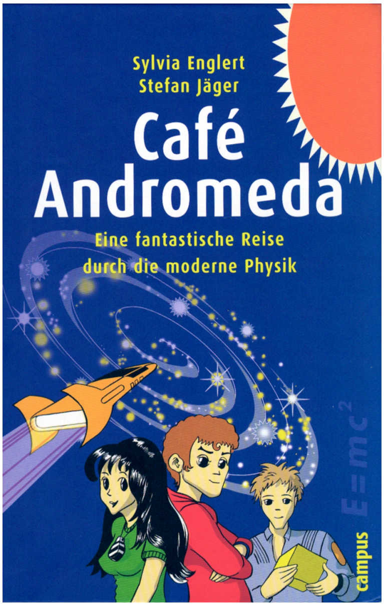
[3] J. L. Bromberg, *The Birth of the Laser*, Phys. Today **41** (1988) 10, str. 26–33.

[4] D. F. Nelson, R. J. Collins in W. Kaiser, *Bell Labs and the ruby laser*, Phys. Today **63** (2010) 1, str. 40–45; in drugi članki v posebni številki Physics Today.

[5] S. Perkowitz, *From ray-gun to Blu-ray*, Phys. World **23** (2010) 5, str. 16–20; in drugi članki v posebni številki Physics World.

[6] J. Hecht, R. F. Wuerker, I. D. Abella, V. Evtuhov in D. Langenberg, *More light on ruby laser's history*, Phys. Today **63** (2010) 5, str. 8–10.

Sylvia Englert in Stefan Jäger: CAFÉ ANDROMEDA – EINE FANTASTISCHE REISE DURCH DIE MODERNE PHYSIK, Campus Verlag, Frankfurt/New York, 2003, 208 strani.



Svobodna pisateljica in časnikarka Sylvia Englert je v Frankfurtu študirala germanistiko, anglistiko in amerikanistiko ter prostovoljno delala kot lektorica pri neki založbi. Urejala je tudi spletno revijo, ki objavlja prispevke o spremembah v gospodarstvu in družbi. Živi blizu Münchna in je avtorica številnih knjig, namenjenih predvsem mladim bralcem. Nekatere je izdala pod psevdonimom Katja Brandis. Ukvarja se tudi z mladimi in odraslimi, ki radi pišejo, jim prireja delavnice, jim bere in predava.

Stefan Jäger je študiral fiziko, doktoriral iz fizike, nato pa je nekaj časa vodil fizikalne vaje in praktikum na univerzi v Berlinu, nazadnje pa se je izpopolnjeval še na kalifornijski univerzi v Santa Cruzu. Sedaj dela na razvojnem in raziskovalnem oddelku pri neki biotehnološki firmi v Hamburgu.

Glavna junaka v ves čas napeti znanstveno fantazijski zgodbi sta Jan in Miri, brat in sestra dvojčka iz preproste družine. Jan ima v šoli težave s fiziko in bi mu ravno prav prišel kakšen temeljit in celovit pregled čez ta predmet. Kot da težav v šoli še ni dovolj, Jan v svoji trenutni nespameti stavi s sošolcem za svoj težko prigarani osebni računalnik, da bo na naslednjem testu iz fizike zbral 13 točk. Sam pri sebi sklene, da sošolec njegovega računalnika nikakor ne sme dobiti. Priložnost, da se temeljito nauči fiziko, pa se mu kmalu ponudi kar sama od sebe.

Na nekem večernem sprehodu po mestu se Jan in Miri nehote znajdeta na krovu vesoljske ladje Magellanus, ki je pristala v parku njunega mesta, in jo upravlja prijazni, sicer pa malo zmedeni kapitan Andy Zero, mladi fizik, tudi konstruktor hitrih vesoljskih plovil, sicer rojen daleč v vesolju in brez vsakršnega državljanstva. Magellanus je seveda opremljena z najnovejšo tehnologijo. Andy se sicer najraje zadržuje na vesoljski postaji Alpuri, ki ima svojo orbito nekje v ozvezdju Kentaver. Raziskuje veliko enotno teorijo. Na Zemlji, kjer je pristal, pa ravno preizkuša delovanje svojega fototunela, skozi katerega dvojčka popolnoma nepričakovano prestavi na Magellanus in v prihodnost, v 23. stoletje. Andy ju vzame s sabo na potovanje skozi prostor in čas. Na krovu vesoljske ladje se neposredno seznanita s teorijo relativnosti, Dopplerjevim pojavom, podaljšanjem časa, skrajšanjem dolžin, entropijo ter enakovrednostjo mase in energije. Jan in Miri mimogrede izvesta tudi veliko stvari o Einsteinu, Heisenbergu, Pauliju in drugih pomembnih fizikih. S tem pravzaprav začneta svoj znanstveni sprehod po moderni fiziki. Pri tem imata priložnost pogledati osnovne delce, spoznati načelo nedoločenosti, kvarke, superprevodnost, teorijo strun, supernove, rojevanje in umiranje zvezd, črne luknje, prapok, nastanek vesolja in sevanje ozadja. Dano jima je, da vse to doživita v svoji neposredni bližini in da obenem spoznata, kako so fizikalni pojavi med seboj povezani.

Da bi bila zgodba še bolj zanimiva, poskrbi prof. Dillitzer, ki je Andyju nadrejen in ki se s svojo raziskovalno skupino tudi ukvarja s podobnimi problemi kot Andy, predvsem pa ga zanimata teorija osnovnih delcev in teorija strun. Njuni interesi si pogosto nasprotujejo. Dillitzer ima za raziskovanje na voljo tudi veliko denarja, boljšo opremo kot Andy in se lahko pohvali, da je zelo zanimiv za medije. Prav tako kot Andy potuje po vesolju s svojim plovilom in si zelo prizadeva, da bi postal minister za znanost, kar je druga najpomembnejša funkcija medzvezdnega združenja, takoj za predsednikom. Zemljanom pa ni ravno naklonjen. Oba znanstvenika zaideta s svojima ploviloma preblizu neke črne luknje, kjer je Dillitzer pogubljen, Andyju pa z dvojčkoma vred uspe z zadnjimi močmi ubežati iz objema silne težnosti.

Ves čas napeta, tu in tam pa tudi šaljiva zgodba se konča s pristankom v domačem parku in Andy dvojčka skozi fototunel spet postavi v sedanjost, torej na začetek 21. stoletja. Jan, sedaj poln fizikalnega znanja, zelo dobro piše naslednji test iz fizike, toda za eno točko premalo, da bi dobil stavo. Tako je ob svoj osebni računalnik, za katerega pa z očetom tako in tako ugotovita, da je že zastarel in je potreben zamenjave.

Naslov je knjiga dobila po Kavarni Andromeda na vesoljski postaji Alpuri. V tej po vsem širnem vesolju znani kavarni, ki je Andyju nekakšna domača krčma, se radi zadržujejo vesoljski popotniki, učenjaki in bitja nečloveškega izvora. Ob umetno pridobljeni hrani in pijači pogosto razpravljajo o raznih fizikalnih teorijah in svojih doživetjih po vesolju. Kavarna je v veliki stekleni krogli, kjer ne veljajo zakoni težnosti.

Zgodba shaja brez matematike, zapletenih formul in fizikalnih konstant. Pogosto je omenjena samo svetlobna hitrost. Fizikalne pojave poskuša razložiti tako, da se opira na nekaj najbolj razumljivih fizikalnih zakonov. Nekoliko bolj strokovne razlage so zapisane v posebej označenih blokih, na primer kratki pregledi del nekaterih fizikov. Knjiga je tudi lepo ilustrirana in oblikovana.

Na koncu so še razlage manj znanih besed, ki se uporabljajo v knjigi, denimo, kaj je absolutna ničla, antimaterija, Paulijevo načelo. Nato sledita stvarno kazalo in priporočena literatura za nadaljnje branje.

Knjiga naj bi mladim pomagala k boljšemu razumevanju teorije relativnosti in kvantne fizike, brez katerih si ne moremo več zamišljati sodobne znanosti. Teoriji namreč presegata okvire klasične fizike, ki jim je še nekako razumljiva, saj jo pravzaprav srečujejo v vsakdanjem življenju. Do težav pa pride, ko se je treba spopasti s fizikalnimi problemi, ki niso več v dosegu klasične fizike in tudi vsakdanje izkušnje nič več ne pomagajo. Prav tako naj bi knjiga mladim utirala pot v teorijo osnovnih delcev in kvarkov, vsaj bežno naj bi spoznali teorijo strun in veliko enotno teorijo, izvedeli naj bi za razvoj zvezd, črne luknje, prapok in še kaj. Fizikalni pojavi marsikomu od mladih vzbudijo veliko občudovanje in knjiga Kavarna Andromeda jim za začetek lahko dobro pomaga, da jih tudi bolje razumejo. Navsezadnje lahko knjigo, ki kar dobro ustreza stanju sodobne znanosti, bere vsak tudi kar tako, za splošno izobrazbo, če ga le fizika in kozmologija vsaj malo zanimata.

Da bi zgodba sploh lahko potekala tako, kot sta si avtorja zamislila, sta namenoma uporabila nekaj neznanstvenih prijemov, vsaj s stališča današnje fizike. Fototunela, ki omogoča udobno potovanje v prostoru in času, najbrž nikoli ne bo. Prav tako so malo verjetna velika kvantna in druga nezemeljska bitja, ki nastopajo v zgodbi, pa tudi možnosti približevanja črnim luknjam in žarečim nebesnim telesom v zaščitni opremi, kakršna je opisana v knjigi.

Sicer pa so fizikalni in drugi pojavi opisani znanstveno korektno, tako da ne bi smelo biti nikomur žal, če bo knjigo prebral od začetka do konca. Upajmo, da bomo *Kavarno Andromeda (Fantastično potovanje po moderni fiziki)* kmalu dobili tudi v slovenskem prevodu.

Marko Razpet

Gudrun Schury: WER NICHT SUCHT, DER FINDET – ZUFALLSENTDECKUNGEN IN DER WISSENSCHAFT, Campus Verlag, Frankfurt/New York 2006, 200 strani.

Avtorica Gudrun Schury je študirala novejšo nemško literarno znanost in umetnostno zgodovino ter več let delala za Bavarsko akademijo znanosti. Dandanes je svobodna umetnica, dobra poznavalka Goetheja, lektorica in zunanja predavateljica na univerzi v Bambergu.

Nedvomno se lahko zahvalimo za odkritja, izume, znanje in napredek človeštva velikim znanstvenikom, inštitutom, šolam in drugim ustanovam, toda ne smemo pozabiti, da sta včasih pri tem igrala pomembno vlogo tudi sreča ali naključje. Kljub temu da niso vsa odkritja v znanosti in umetnosti, opisana v knjigi *Kdor ne išče, ta najde (Naključna odkritja v znanosti)*, povezana z matematiko, fiziko in astronomijo, si na kratko oglejmo vsako posebej.

1. Pripovedovanje se prične s potovanjem treh princev iz Serendipa. Beseda *Serendip* je perzijska in je nastala iz sanskrtske besede za otok Cejlon, dandanes Srilanka. Kralj je poslal svoje tri sinove po svetu, da bi spoznali tuje dežele, ljudi in njihove kulture. Na svoji poti so doživeli marsikaj prijetnega, pa tudi neprijetnega, toda s svojo modrostjo in znanjem ter zlasti zaradi ugodnih naključij so obvladali vse težave in nazadnje se je vse srečno končalo. Iz te zgodbe je nastala angleška beseda *serendipity*, ki velja za eno najteže prevedljivih, pomeni pa lahko odkritje nečesa po golem naključju, ko se to najmanj pričakuje.

2. Rodoški kiparji so prizor smrti trojanskega svečenika Laokoonta in njegovih dveh sinov upodobili v kamnu v prvem stoletju pred našim štetjem. Skulpturo, znano kot *Laokoontova skupina*, so Rimljani odpeljali v mesto na sedmerih gričih, kjer jo je še videl in opisal Plinij Starejši (23–79), nato pa se je za njo izgubila vsaka sled. V začetku 16. stoletja pa so jo popolnoma slučajno našli v nekem vinogradu na rimskem griču Eskvilin. Knjiga natančno opisuje, kaj se je z najdbo dogajalo kasneje.

3. Sledi znana zgodba, kako je Isaac Newton (1643–1727) začel razmišljati o težnosti, potem ko je bilo padlo na tla jabolko z jablane, pod katero je počival. Rezultat njegovega razmišljanja o tem, zakaj jabolko pade z drevesa, je splošni gravitacijski zakon.

4. Največji nemški pesnik Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832) ni bil samo besedni umetnik, ampak se je med drugim zanimal tudi za anatomijo. Na beneškem židovskem pokopališču mu je popolnoma slučajno prišla v roke ovčja, v besedilu koštrunja lobanja. Na njej je opazil kost, ki ji pravimo *medčeljustnica*, Nemci pa pogosto kar *Goetheknochen* – *Goethejeva kost*, latinsko *os incisivum*. Medčeljustnico imajo vretenčarji med zgornjima čeljustma. Pri nekaterih, vključno s človekom, se že pred rojstvom popolnoma zraste z okolico, tako da šivi niso več vidni, pri preostalih pa šivi ostanejo vse življenje.

5. Napoleonova vojska, ki jo je spremljala tudi skupina znanstvenikov, je za kratek čas zasedla Egipt z namero, da bi od tam Francozi sčasoma osvojili Indijo, ki je bila takrat angleška kolonija. V pristanišču ElRašid, tudi Rosetta, v Nilovi delti so vojaki povsem po naključju odkrili kamen, na katerem je vklesano neko besedilo v demotski, hieroglifski in grški pisavi. Francoski jezikoslovec Jean-François Champollion (1790–1832) je s svojim talentom in znanjem orientalskih jezikov ter s primerjavo zapisov besed Kleopatra in Ptolemaj na nekem obelisku, kamna iz Rosette in drugih zapisov razvozlal hieroglifsko pisavo.

6. Znamenito kölnsko gotsko katedralo, eno največjih na svetu, so pričeli graditi že v 13. stoletju, toda gradnja je napredovala počasi, ker so bile vmes vojne ter druge težave. Dogajalo se je, da je bila gradnja prekinjena za daljši čas. Izgubljali pa so se celo načrti. Pogrešali so zlasti načrt pogleda na fasado od tal do najvišjih konic zvonikov. Spet se je treba zahvaliti zgolj naključju, da so ga našli, in to na pergamentu v dveh delih, vsakega v drugem kraju. Tako so leta 1880 lahko kölnsko katedralo dokončali po srednjeveških načrtih.

7. Louis Daguerre (1787–1851) je bil spočetka scenski slikar, ki pa je izumil praktično uporaben postopek za izdelavo trajnih fotografij. Nekega dne se je med fotografiranjem zaradi slabega vremena nenadoma tako zelo stemnilo, da je ekspozicijo, ki je bila takrat dolga do osem ur, bil prisiljen prekiniti.

Bakreno fotografsko ploščo pa je odložil v laboratorijsko omaro, v kateri je hranil razne kemikalije. Čez nekaj časa je Daguerre opazil na plošči razločno sliko, čeprav je bila ekspozicija kratka. Po daljšem eksperimentiranju je ugotovil, da so za nastanek slike krive kapljice živega srebra, ki so se najbrž od kakega razbitega termometra poskrile v špranje omare.

8. Besedilo neke velikonočne odrske igre so v knjižnici švicarskega samostana Muri našli v hrbtu Biblije, natisnjene leta 1466 v latinščini. Potem ko igre niso več uprizarjali, so namreč dragoceni pergament, na katerem je bilo napisano besedilo, razrezali in uporabili za ojačenje hrbta omenjene Biblije. Sredi 19. stoletja so slučajno odkrili, da je bilo v hrbtu Biblije skrito besedilo, ki je neprecenljive vrednosti za zgodovino nemškega jezika.

9. Wilhelm C. Röntgen (1845–1923) je naključno odkril po njem imenovane *rentgenske žarke*, katerih uporabnost nam je dobro znana. Röntgen je eksperimentiral s katodno cevjo in katodnimi žarki. Nekega dne je čisto slučajno opazil, da se je na mizi, potem ko je bil vklopil aparaturo, zasvetil papir, ki je bil premazan z neko soljo. Po vseh zakonih optike bi se to ne smelo zgoditi, ker je bil vmes črn zaslon. Prišel je do sklepa, da katodna cev oddaja žarke, ki prodrejo skozi zaslon. Za svoje odkritje je leta 1901 prejel prvo Nobelovo nagrado za fiziko.

10. Britanski raziskovalec Hary H. Johnston (1858–1927) je živel nekaj časa tudi med Pigmejci v Kongu. Opazil je, da so nekateri nosili oblačila, ki so bila narejena iz kože neke njemu neznane živali. Ko so mu pokazali to bitje, je ugotovil, da gre za do takrat zadnjega neznanega sesalca, ki so mu domačini rekli *okapi*. Danes je okapi (*Okapia johnstoni*) ogrožena živalska vrsta.

11. Alexander Fleming (1881–1955) je delal na neki kliniki na bakteriološkem oddelku. Poleti leta 1928 je odšel na dopust in pozabil na bakterije v neki petrijevki. Ko se je vrnil, je opazil, da se je v njej nabrala plast plesni, ki je izločala snov, zaradi katere so bakterije v bližini izginile. Tako je bil po golem naključju odkrit penicilin, prvi antibiotik. Fleming si je leta 1945 še z dvema farmakologoma delil Nobelovo nagrado za fiziologijo ali medicino.

12. Ribiči so v bližini ustja reke Chalumna leta 1938 iz Indijskega oceana potegnili na suho neko nenavadno ribo, ki bi morala po mnenju znanstvenikov izumreti že pred več ko 60 milijoni let. V pristanišču East London v Južni Afriki so jo oddali Marjorie Courtenay–Latimer (1907–2004), skrbnici tamkajšnjega muzeja. V resnici pa je riba živi fosil, resoplavutarica (*Latimeria chalumnae*).

13. Stikljivost se včasih izplača. Tako so na primer nekega dne leta 1940 mladeniči v votlini Lascaux v francoskem departmaju Dordogne odkrili na stenah čudovite poslikave, ki jih je ustvaril jamski človek v sivi davnini. Risbe zelo realistično upodabljajo živali v gibanju.

Prav tako je neki beduin, ki je konec leta 1946 ali v začetku leta 1947 iskal izgubljeno kozo, zašel v neko votlino ob Mrtvem morju. V njej je našel vrče, v njih pa zvitke z rokopisi, ki jim danes pravimo *kumranski rokopisi*. Začela se je njihova burna novejša zgodovina: prekupčevanje, preučevanje in prevajanje.

14. Arno A. Penzias in Robert W. Wilson sta v slovitih Bellovih laboratorijih v ZDA raziskovala šum, ki prihaja iz vesolja in naj bi motil sprejem radijskega signala z umetnih satelitov. Z veliko anteno v obliki roga sta nepričakovano odkrila sevanje valovne dolžine 7,35 cm, ki prihaja iz vseh smeri vesolja enako. S tem sta si prislužila leta 1978 Nobelovo nagrado za fiziko. Pojav so kasneje razložili kot posledico prapoka (Big Bang).

15. Povsem po naključju so na Kitajskem leta 1974 odkrili še eno svetovno čudo: glineno armado kitajskega cesarja Qin Shi Huangdija (3. stoletje pr. n. št.), vojake in njihove poveljnike, konje, bojno opremo z vsemi podrobnostmi v naravni velikosti.

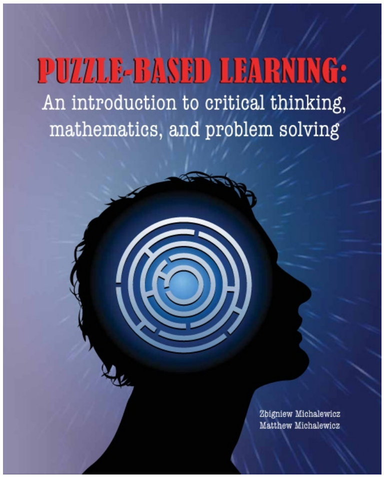
16. V Alpah so na nekem ledeniku naključni planinci leta 1991 našli posmrtne ostanke moža. Dali so mu ime *Ötzi*. Izkazalo se je, da je pokojni iz mlajše kamene dobe. Pomembno je tudi to, da je njegovo truplo dobro ohranjeno, prav tako oblačila, obutev in lovska oprema.

17. Zadnja zgodba v knjigi pripoveduje o razvpitem romanu *Lolita*, ki ga je napisal rusko-ameriški pisatelj Vladimir V. Nabokov (1899–1977). Nekega dne je bil tik pred tem, da sežge še nedokončani roman, toda namero mu je preprečila žena Vera, tako da je delo vendarle izšlo leta 1955. Nato sledi razprava o originalnosti romana, kajti nemški pisatelj Heinz von Lichberg (1890–1951) je leta 1916 tudi objavil podobno zgodbo z enakim naslovom. Ali je morda šlo spet za naključje?

V dodatku knjige je seznam manj znanih besed z razlago, seznam citatov in ilustracij ter priporočena literatura za nadaljnje branje. Knjiga v lahkotnem slogu, pa kljub temu izčrpno opisuje posamezne dogodke in bi morala pritegniti tako radovedne mlade kot tudi starejše bralce, ki so morda že malo pozabili, kaj so se nekoč učili v šoli, in jim nuditi obilo umetniških in znanstvenih užitkov. Navsezadnje opisani dogodki spadajo v splošno izobrazbo. Upajmo, da bomo knjigo kmalu dobili tudi v slovenskem prevodu.

Marko Razpet

Zbigniew Michalewicz in Matthew Michalewicz: PUZZLE-BASED LEARNING – AN INTRODUCTION TO CRITICAL THINKING, MATHEMATICS, AND PROBLEM SOLVING, Hybrid Publishers, Melbourne 2008, 328 strani.

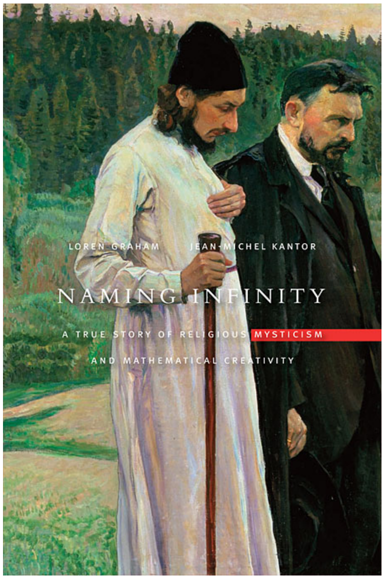


Ta simpatična knjiga prinaša predvsem množico lepo urejenih in izvrstno komentiranih rešenih ugank. Večina knjige je razumljiva tudi ljudem z minimalnim matematičnim znanjem. Na področju verjetnosti in statistike pa pri nekaterih nalogah bralcu ne bi škodilo nekaj predznanja. Seveda so mnoge uganke klasične: avtorja ne skrivata, kje sta si jih izposodila. Pisca na več mestih poudarjata, kako pomembna je precizna formulacija uganke. Upata, da bo ta knjiga pripomogla k boljšemu izražanju. Na koncu je tudi nekaj nalog brez rešitve.

Peter Legiša

Loren Graham in Jean-Michel Kantor: NAMING INFINITY – A TRUE STORY OF RELIGIOUS MYSTICISM AND MATHEMATICAL CREATIVITY, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge 2009, 239 strani.

To nenavadno knjigo sta napisala ameriški zgodovinar znanosti L. Graham in francoski matematik J.-M. Kantor. Prvi je zaslužni profesor na MIT in je študiral v Moskvi, drugi je tudi zgodovinar in esejist. Opisana dogajanja so večkrat tako presenetljiva, šokantna in grozljiva, da sem pred pisanjem recenzije nekatere stvari preverjal v drugih virih. Naslovnica kaže portret dveh sprehajalcev. To sta matematik, filozof in teolog **Pavel Aleksandrovič Florenski** (1882–1937) in ekonomist ter filozof S. N. Bulgakov, ki je bil prav tako duhovnik, čeprav je na sliki v civilni obleki. Mati Florenskega je bila iz ugledne armenske družine. Florenski je končal študij matematike na Moskovski univerzi, nato pa se je preusmeril v teologijo, postal pravoslavni duhovnik, teolog, bogoslovni profesor – in izumitelj. Imel je pet otrok. Florenski očitno še danes velja za pomembnega religioznega pisca, saj so bila nekatera njegova dela nedolgo tega prevedena tudi v slovenščino (kot lahko preberemo v slovenski Wikipediji).



Filozofsko-religiozni spisi Florenskega so bili priljubljeno branje **Dimitrija Jegorova** (1869–1930), profesorja matematike na Moskovski univerzi. Jegorov (Egorov v angleški transkripciji) je znan po izreku iz teorije mere. Imel je odlične stike z evropskim Zahodom in je svoje učence usmeril v najnovejše probleme. Njegov najboljši doktorand je bil **Nikolaj Luzin** (1883–1950). Luzinova babica je bila iz naroda Burjatov (ti živijo v okolici Bajkalskega jezera). Luzina je obojestransko nasilje v neuspeli revoluciji leta 1905 in po njej spravilo v globoko osebno krizo. Čeprav ga je Jegorov poslal v Pariz, kjer je trdo in uspešno delal, je bil še zmeraj nesrečen. Po lastnih besedah so ga iz krize rešila prav prej omenjena religiozna dela njegovega prijatelja iz študijskih let Florenskega, ki je bil verjetno precej sugestiven človek.

Luzin je bil sicer očitno šarmantna osebnost in je znal mlade nadarjene ljudi navdušiti za raziskovanje. Ni poznal razlike med službenim in zasebnim časom. Skupaj z Jegorovom sta zbirala matematike, umetnike in druge izobražence tudi na domu. On in Jegorov sta predsedovala neformalnemu matematičnemu seminarju in društvu Luzitanija, ki je bilo nekaj časa pravi vrelec idej. Jegorov in Luzin sta bila mentorja več svetovno znanim matematikom in veljata za začetnika moskovske matematične šole. Oba profesorja sta bila, kot rečeno, globoko verna in sta skupaj s Florenskim pripadala v mistiko usmerjenemu in napol razkolniškemu gibanju *častilcev imena*; rusko ime za njihovo usmeritev je *imjaslavje*.

Usoda te trojice: *Luzin, Jegorov, Florenski* je glavna nit pripovedi. Obenem pa knjiga delo ruske trojice povezuje s trojico slavnih francoskih matematikov. To so: **Émile Borel** (1871–1956), **Henri Lebesgue** (1875–1941) in **René Baire** (1874–1932). Vsi trije so šli skozi francoski šolski sistem, ki je nadarjenim in pridnim učencem – ne glede na poreklo – omogočal vpis v dobre liceje, najboljšim maturantom, ki so se izkazali tudi s trdim delom, pa vpis v elitne visoke šole. Knjiga plastično predstavi tudi te tri znanstvenike in njihove zapletene odnose.

Borel je bil vsestransko nadarjen in neverjetno aktiven človek: univerzitetni profesor, ravnatelj elitne École Normale Supérieure, novinar, župan malega mesta, izdajatelj radikalne revije, vodja znanstvenih in tehničnih služb vojnega ministrstva med prvo svetovno vojno. Kot aktivista Odpora med drugo svetovno vojno ga je zaprl Gestapo.

Lebesgueov oče je bil stavec, ki je umrl zaradi tuberkuloze. Lebesgueova mati je neutrudno delala, da bi izredno nadarjenemu, a bolehnemu sinu omogočila šolanje. Lebesgue je rad organiziral kako potegavščino.

Baire je izšel iz zelo revnih razmer; njegov oče je bil krojač. Bil je bolehen in psihično labilen. Ni blestel na ustnih izpitih, deloma zato, ker ni hotel ponavljati stvari, ki so se mu zdele problematične. Tako je najprej poučeval kot profesor v srednji šoli, kar je oviralo njegovo raziskovanje. Počutil se je zmeraj bolj odrinjenega in zapostavljenega v primerjavi z Lebesgueom. Dobil je štipendijo za študij v Italiji, pri znanem matematiku Vitu Volterri. Kasneje so prišle zaposlitve na univerzah v provinci. Pogosto ni mogel delati, predvsem zaradi psihičnih težav. Proti koncu kariere je doživel priznanje: postal je vitez častne legije in član Akademije znanosti. Vseeno je umrl tragično in v denarnih težavah.

Bralci bodo sami presodili, koliko jih prepriča glavna teza te knjige: da je namreč poudarjanje pomena imenovanja idej, značilno za častilce imena, pomagalo članom ruske skupine, da so laže prodrli v vse večjo abstrakcijo teorije množic in z njo povezane matematike. Medtem pa naj bi francoski matematiki zaradi bolj racionalne usmeritve in poudarjanja uporabe matematike na tem področju za nekaj časa zastali.

Kot pravi knjiga, pa so tudi misticizmu nasprotni nazori včasih imeli pozitiven rezultat. Peterburški profesor **Andrej Markov** (1856–1922), ateist, ki mu je mešanje matematike, teologije in filozofije šlo na živce, je hotel spodbiti nekatere tovrstne ideje na področju verjetnosti in je tako dobil dodatno spodbudo za definicijo *markovske verige*.

Knjiga opisuje žalostno usodo ruske trojice v času stalinizma. Sicer zadržanega Jegorova, ki je mirno vztrajal pri svojih prepričanjih, so najprej kot reakcionarja javno kritizirali njegovi študenti in kolegi, nato je bil skupaj z mnogimi drugimi vernimi izobraženci leta 1930 zaprt. V zaporu so ga šikanirali zaradi vsakodnevne molitve, zato je gladovno stavkal in po nekaj tednih umrl.

Florenski je tudi v sovjetskih časih trmasto vztrajal v halji pravoslavnega duhovnika in tako oblečen nastopal na znanstvenih kongresih. To je bilo zelo nevarno, saj je marksistična ideologija učila, da sta vera in znanost sovražnici. Po prvi aretaciji so ga zaradi uspešnega dela za sovjetsko vojaško industrijo izpustili. Zanj je posredovala tudi žena Maksima Gorkega, češ da bodo njegovi talenti uporabni za elektrifikacijo Sovjetske zveze. Leta 1933 so ga zaradi monografije o geometrični interpretaciji teorije relativnosti, v katero je vključil nekaj mističnih opazk, obsodili na deset let prisilnega dela in poslali najprej v taborišče na Daljni vzhod, nato v eno najbolj groznih taborišč na skrajnem severu. Tudi tu je poskušal biti koristen in je uspešno ekstrahiral jod iz morskih alg. A podtaknjen ovaduh ga je prijavil zaradi povsem nedolžnih trditev. Leta 1937 so ga izvensodno usmrtili.

Edino Luzin, ki je pod sovjetsko oblastjo skrival svoje versko prepričanje, je ostal na prostosti. Vendar je pred tem doživel zrežirano gonjo, v kateri so aktivno sodelovali številni njegovi učenci, tudi svetovno znani matematiki. Francoski kolegi so skušali diskretno posredovati v Luzinovo korist. Kot pravi knjiga, nekateri levičarji, med njimi na primer Jacques Hadamard, peticije v obrambo Luzina niso hoteli podpisati. Luzinovo prostost (in verjetno tudi življenje) je skoraj zanesljivo rešila zakulisna intervencija fizika **Pjotra Kapice**. Ta je pisal Molotovu, ki je pismo posredoval Stalinu. V pismu je Kapica zapisal, da je Luzin kot matematik za Sovjetsko zvezo tako dragocen, da morajo njegove talente izkoristiti v dobro države. Kapica je nadaljeval takole:

> *Newton, ki nam je dal gravitacijski zakon, je bil verski obsedenec. Cardano, ki nam je dal velika mehanična*[1] *in matematična odkritja, je bil pijanec in razuzdanec. Kaj bi naredili z njima, če bi živela v Sovjetski zvezi?*

Kapica se je očitno znal spustiti na raven Stalina, Molotova ... Ta odlični fizik je rešil življenje še več drugim znanstvenikom, njegove nasvete pa je vodstvo države presenetljivo pogosto upoštevalo. Luzinovo življenje je bilo kljub temu napol uničeno. Iz strahu in s tem povezanih psihičnih težav je

[1] *kardanski zglob* (op. prev.)

veliko časa preživel po sanatorijih. Imel je nezakonskega otroka z bolniško sestro.

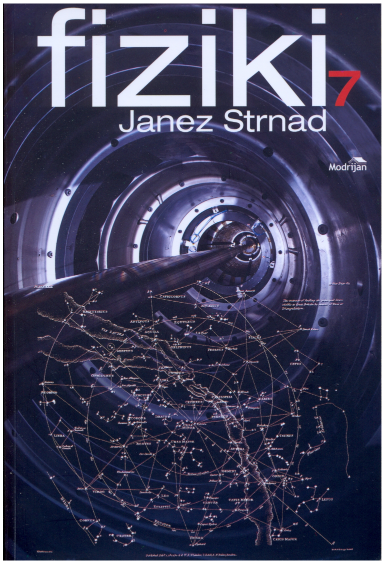
Knjiga je zelo zanimivo, večkrat šokantno branje. Verjetno bodo nekateri le na hitro preleteli dele, ki so bolj filozofsko obarvani. Opisane so nekatere druge tragične usode, denimo, kako je ruski topolog judovskega porekla **Pavel Uryson** utonil med plavanjem v viharnem morju v Bretanji v starosti komaj šestindvajset let. Na koncu je predstavljena svetla podoba matematika **Nikolaja Čebotarjova** (1894–1947) in njegove enako pogumne in požrtvovalne žene. Čebotarjov, ki je bil veteran Rdeče armade, ni hotel prevzeti profesorskega mesta Jegorova, čeprav se, kolikor je znano, ni strinjal z njegovimi verskimi prepričanji. To načelno dejanje mu je za nekaj časa uničilo kariero, njegovi ženi, ki ga je podprla, pa otežilo študij medicine. Ko je nazadnje le dobil mesto na univerzi v Kazanu, je žena zdravnica po neverjetnem spletu okoliščin dobila v oskrbo umirajočega zapornika Jegorova. Posrečilo se ji je spraviti Jegorova na svoj dom, češ da je že umrl. Čebotarjov je dal Jegorova dostojno pokopati (v neposredni bližini groba Nikolaja Lobačevskega, enega od utemeljiteljev neevklidske geometrije) in se je kot edini matematik udeležil njegovega pogreba. Čebotarjov je bil zaradi izvrstnega dela trikrat predlagan za rednega člana Akademije znanosti. Vsakič je bil zavrnjen kot politično neprimeren, skoraj gotovo zaradi pomoči Jegorovu. Po Stalinovi smrti je leta 1953 doktorand Čebotarjova V. V. Morozov dal Jegorovu na grobu postaviti skromno ploščo.

Peter Legiša

Janez Strnad: FIZIKI 7, Modrijan založba, Ljubljana 2010, 263 strani.

Letos je izšla že sedma knjiga prof. Janeza Strnada o pomembnih fizikih. Avtor v predgovoru najprej pojasnjuje, da s sedmim delom zaokrožuje *Fizike*, in nato pove, o čem bo v knjigi tekla beseda. Osrednji del je razdeljen na 31 poglavij, ki nosijo naslov po enem ali dveh junakih; prvo, ki sega najdlje v preteklost, pa celo po treh.

Glede na to, da je bilo leto 2009 mednarodno leto astronomije, začetek pripovedovanja avtor naveže na nekatere pomembne antične astronome, ki so imeli še dolgo časa velik vpliv na razvoj znanosti. Spomnimo se samo na to, kako dolgo je trajalo, preden se je uveljavil heliocentrični sistem. Ko prebiramo *Fizike*, izvemo, da je bilo za to potrebno veliko potrpljenja, odrekanja, domiselnosti, opazovanj, razumevanja okolja in oblasti, ne



navsezadnje pa tudi denarja. Raziskave seveda niso bile nikoli usmerjene samo v nebo. Sčasoma je prišlo do globljega razumevanja zračnega tlaka in odkritja toplotnih strojev. Razvoja fizike si ne moremo zamisliti brez elektrike in magnetizma. Postopoma so odkrivali nove kemijske elemente, izotope in osnovne delce. Dvajseto stoletje nam je prineslo številna nova področja raziskav v fiziki, uporabo atomske energije v miroljubne in vojne namene, ogromne pospeševalnike vseh vrst in spoznanje, da je za uspešno fizikalno raziskovanje treba dobro premišljeno in organizirano skupinsko delo. Velikim pospeševalnikom in odkrivanju osnovnih delcev je namenjen znaten del knjige.

Naslovnih junakov, ki nastopajo približno v zaporedju njihovih rojstnih letnic, je v sedmem delu knjige *Fiziki* kar 45, od teh je tretjina Nobelovih nagrajencev za fiziko. Okoli njih pa se razvrsti še veliko drugih znanstvenikov, mislecev in politikov. Nekateri so bili večkrat omenjani že v prejšnjih delih, tako da lahko najdemo med nekaterimi fiziki zanimive povezave. Dogodki in poskusi potekajo v glavnem v Nemčiji, Franciji, Veliki Britaniji, Združenih državah Amerike in v nekdanji Sovjetski zvezi. Mimogrede izvemo za celo vrsto krajev, ustanov, univerz in inštitutov, kjer so se dogajala velika pomembna fizikalna odkritja.

Posamezno poglavje se navadno začne s kratkim prikazom zgodovinskih in drugih okoliščin, v katerih je naslovni junak živel, čemur sledi podroben opis njegovega življenja in dela. Izvemo, kje, kaj in s kom je raziskoval, kaj je odkril, kaj je napisal, kje je objavljal svoje rezultate, kakšne težave je imel, kako se je znašel v raznih političnih situacijah, med vojno itd. Nekateri rezultati in naprave so v knjigi prikazani tudi grafično. Avtor skuša tudi razložiti, zakaj ta ali oni fizik kljub svojemu veličastnemu in pomembnemu delu ni prejel Nobelove nagrade ali pa zakaj se nekaj imenuje po nekom, po katerem se pravzaprav ne bi smelo.

Namesto zaključka je avtor v poglavju *Poskusi in enačbe* navedel lestvici po mnenju bralcev revije Physics World *najimenitnejših enačb* in *najlepših poskusov* in ju komentiral. Dodal je še nekaj citatov, ki izražajo odnos javnosti do znanosti. Knjiga se konča s seznamom naslovnih junakov pričujoče knjige po rojstnih letnicah in seznami junakov prvih šestih avtorjevih knjig z naslovom *Fiziki*, zadnje strani pa prinašajo še obširno imensko kazalo, ki bralcu omogoča hitrejše iskanje oseb v besedilu. Zavedati se je tudi treba, da knjiga vsebuje veliko število podatkov, ki jih je avtor preverjal, uporabljajoč različne vire.

Vseh sedem knjig toplo priporočamo vsem, ki jih zanimajo znanost, zlasti matematika, fizika in astronomija, njen razvoj in zgodovina. Učenci, dijaki, študenti, učitelji, asistenti in profesorji lahko v njih najdejo obilico koristnih informacij. Slednji lahko z njimi vsaj malo popestrijo pouk, vaje in predavanja. Žal vsi časa nimajo ravno na pretek. Najbrž bo vsak, tudi starejši bralec *Fizikov*, izvedel kaj, česar prej še ni vedel, ali pa bo malo obnovil svoje znanje. Ali še vsi veste, za kaj gre na primer pri Franck–Hertzevem in Stern–Gerlachovem poskusu? Če ne več, potem za začetek sezite po knjigi *Fiziki 7*.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 22,39 EUR.

Marko Razpet

VESTI

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi k sodelovanju na strokovnem srečanju in 62. občnem zboru, ki bosta 5. in 6. novembra 2010 v LifeClass Hotels v Portorožu.

Vodilni temi letošnjega strokovnega srečanja sta **matematika v tehniki** in **fizika v tehniki**. V ospredju bodo seveda teme, ki jih lahko učitelji uporabijo za popestritev pouka in seznanjanje učencev in dijakov z zanimivimi naravoslovnimi področji, kjer lahko uporabijo pridobljeno znanje iz matematike in fizike in se kasneje tudi lažje odločijo za študij matematike in fizike.

Svoje izkušnje in novosti z omenjenih področji (strogo vezanih na uporabo v tehniki) lahko predstavite:

- s prispevkom (20–30 minut, lahko tudi krajšim)
- s posterjem

Na voljo bodo grafoskop, projekcijsko platno in videoprojektor za prenos slike z računalnika. Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesti s seboj ali pa se morajo o tem poprej dogovoriti (sporočiti Janezu Krušiču).

Prosimo vas, da nam prispevke za izbrani temi pošljete do **30. septembra 2010** na naslov: `Janez.Krusic@fmf.uni-lj.si`. Prijave morajo vsebovati:

- naslov prispevka
- ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen, oziroma domači naslov in elektronski naslov
- kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12 pt naj ne presega pol strani A4)

Izjemoma lahko pošljete prijavo tudi po navadni pošti na naslov: **Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Janez Krušič, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana**. V tem primeru morate dodati zapis tudi v elektronski obliki (CD, DVD).

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora.

Ob letošnjem občnem zboru bosta še dve srečanji. V petek, 5. novembra, bo potekala tudi **7. konferenca fizikov v osnovnih raziskavah**. Konferenca bo nadaljevanje rednih srečanj slovenskih fizikov, ki delujejo na različnih področjih osnovnih raziskav. V okviru srečanja bodo predstavljeni največji dosežki slovenske fizike v preteklih dveh letih, poudarek bo predvsem na uspešnem in odmevnem raziskovalnem delu raziskovalcev mlajše generacije. Matematiki pa bodo organizirali **4. slovensko srečanje matematikov raziskovalcev**.

Vsa obvestila v zvezi z občnim zborom in strokovnim srečanjem bomo sproti objavljali na domači strani DMFA: `http://www.dmfa.si/`.

Predsednik DMFA Slovenije:
prof. dr. Janez Seliger

OBVESTILO

V Obzorniku za matematiko in fiziko, letnik **49**, številka 2, str. 62–63, in na domači strani DMFA `http://www.dmfa.si/` je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge (z utemeljitvami) za letošnja priznanja pošljete **do 30. septembra 2010** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana**.

Predsednik DMFA Slovenije:
prof. dr. Janez Seliger

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAJ 2010
Letnik 57, številka 3
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici je razdrt helij-neon plinski laser, ki ga je nekdaj izdelovala Iskra in je bil v široki uporabi na naših šolah. Laser oddaja 1 mm širok curek linearno polarizirane rdeče svetlobe z valovno dolžino 632,8 nm in močjo 1 mW. Stekleno cev, v kateri je zmes žlahtnih plinov, na obeh straneh zapirata zrcali, od katerih je eno polprepustno, in tako ustvarita odprti resonator. Plin v cevi seva nekoherentno v vse smeri razen v smeri laserskega curka (foto: Aleš Mohorič). Glej članek na strani 97.