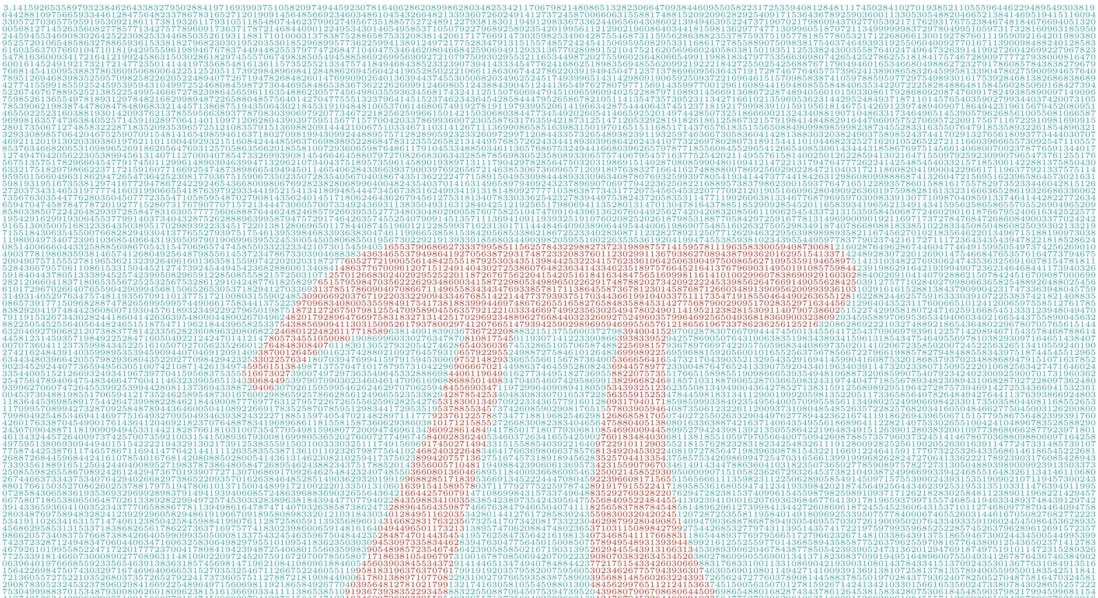
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2009
Letnik 56
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 56 • ŠT. 2 • STR. 41–80 • MAREC 2009

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2009, letnik 56, številka 2, strani 41–80

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `Zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

IRACIONALNOST KROŽNE KONSTANTE

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 11J99, 30E99

V prispevku bomo dokazali, da sta števili π in π^2 iracionalni. Pri tem bomo uporabili nekaj preprostih resnic iz realne in kompleksne analize.

THE IRRATIONALITY OF THE CIRCULAR CONSTANT

The irrationality of the circular constant is proven by using some simple facts of the real and complex calculus.

Racionalno število r lahko zapišemo kot kvocient celih števil a in b, pri čemer je $b \neq 0$: $r = a/b$. Starogrški matematiki so se veliko ukvarjali z razmerji dolžin daljic in kmalu so spoznali, da razmerje med diagonalo in stranico kvadrata, to je $\sqrt{2}$, ni racionalno število. Prav tako so vedeli, da razmerje med diagonalo in stranico pravilnega petkotnika, to je zlato razmerje $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$, ni racionalno število. Realna števila, ki niso racionalna, so iracionalna. Torej sta $\sqrt{2}$ in τ iracionalni števili.

Iracionalno število $\sqrt{2}$ je ničla polinoma $p(x) = x^2 - 2$, ki ima cela koeficienta, število τ pa je ničla polinoma $q(x) = x^2 - x - 1$, ki ima prav tako cele koeficiente. Ni pa vsako iracionalno število ničla nekega polinoma s celimi koeficienti. Zato je smiselno posebej poimenovati števila, ki so ničle polinomov s celimi koeficienti. Takim številom pravimo *algebraična števila*. Število, ki ni algebraično, je *transcendentno*. Števili $\sqrt{2}$ in τ sta torej algebraični. Očitno je vsako racionalno število algebraično. Samo po sebi se zastavlja vprašanje, kakšno je v tem pogledu število π. Šele leta 1761 je Johann Heinrich Lambert (1728–1777) dokazal, da je število π iracionalno, leta 1882 pa je Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939) dokazal, da je π transcendentno število.

Metode dokazovanja, da je neko število racionalno oziroma iracionalno, so različne. Navadno uporabljamo metodo protislovja. Včasih pa poiščemo tak polinom najnižje stopnje s celimi koeficienti, ki ima za ničlo dano število s. Če je to število racionalno, denimo $s = a/b$, potem mora a deliti prosti člen tega polinoma, b pa njegov vodilni koeficient. S preverjanjem nato ugotovimo, ali je kateri od možnih kandidatov res ničla polinoma. Če ni noben, potem je s iracionalno število. Število $\sqrt{2}$ je pozitivna ničla polinoma $p(x) = x^2 - 2$. Edina kandidata za pozitivni racionalni ničli polinoma $p(x)$ sta števili 1 in 2, toda $p(1) = -1 \neq 0$ in $p(2) = 2 \neq 0$. Torej je $\sqrt{2}$ iracionalno število. Pozitivno število τ je ničla polinoma $q(x) = x^2 - x - 1$. Edini kandidat za njegovo pozitivno racionalno ničlo je 1. Toda $q(1) = -1 \neq 0$, in zato je tudi τ iracionalno število.

Seveda pa je opisana metoda preverjanja iracionalnosti uporabna le v primeru, ko je število s algebraično, saj le tedaj polinom s celimi koeficienti, katerega ničla je s, sploh obstaja.

Že v najstarejših časih se je pojavil problem, kako izračunati obseg kroga z danim polmerom ali premerom. Prevedeno v sodobni jezik to pomeni, kolikšno je razmerje med obsegom in premerom kroga, to je število π, ki je, kot vemo, ena najpomembnejših matematičnih konstant: *krožna konstanta*. Našli so bolj ali manj točne racionalne in iracionalne približke, na primer $22/7$ in $\sqrt{10}$. Genialni Arhimed (3. stoletje pr. n. št.) je z metodo krogu včrtanih in očrtanih pravilnih mnogokotnikov ugotovil: $223/71 < \pi < 22/7$. Oba ulomka v tej relaciji sta približka števila π. Kasneje so našli še boljše približke za π, na primer $355/113$. S številom π se izraža tudi ploščina kroga. Že v antiki so poskušali samo z ravnilom in šestilom pretvoriti krog v ploščinsko enakovreden kvadrat ali pravokotnik. Pravimo, da so reševali *problem kvadrature kroga*. Več o tem najdemo na primer v [3, 5]. To jim kljub velikim naporom ni uspelo, ker pač π ni algebraično število, česar pa niso znali dokazati. Kljub temu pa so do današnjih dni kar tekmovali v računanju števila π na čim več pravilnih decimalk. V ta namen so odkrili različne algoritme, tako preproste kot zelo zapletene.

Naslednja pomembna matematična konstanta je število

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Dokaz iracionalnosti števila e je razmeroma preprost. Hitro se vidi, da velja relacija $2 < e < 3$. Predpostavimo, da je $e = a/b$, kjer sta a in b naravni števili. Najprej ugotovimo, da je $b > 1$, nato pa seštejemo začetne člene zgornje vrste do vključno člena $1/b!$ in vsoto imenujemo s, torej:

$$s = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{b!}\,.$$

Vsoto preostalih členov vrste pa ocenimo navzgor tako:

$$\frac{1}{(b+1)!}+\frac{1}{(b+2)!}+\cdots<\frac{1}{b!}\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{(b+1)^2}+\cdots\right)=\frac{1}{b!b}\,.$$

Ker velja relacija

$$s<e<s+\frac{1}{b!b}\,,$$

bi iz nje ob predpostavki $e=a/b$ dobili relacijo

$$b!bs<b!a<b!bs+1\,,$$

v kateri sta $b!bs$ in $b!a$ naravni števili. To pa je nemogoče, saj med zaporednima naravnima številoma ni nobenega naravnega števila.

Ni popolnoma znano, kdo je prvi dokazal, da je e iracionalno število. Nekateri prvi dokaz pripisujejo Leonhardu Eulerju (1707–1783). Leta 1873 je Charles Hermite (1822–1901) dokazal, da je e transcendentno število. Tudi število e so računali na vedno več decimalk natančno.

Po Eulerju se imenuje tudi konstanta

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

Za Eulerjevo konstanto γ pa sploh še ni znano, ali je iracionalno oziroma transcendentno število. Tudi napredek v računanju decimalk števila γ je bil bolj počasen.

Matematiki pa ne iščejo le novih resnic, ampak tudi znane skušajo dokazati čim bolj razumljivo, čim bolj elegantno in čim krajše. Tako je na primer Ivan Niven leta 1947 (glej [4]) na eni sami strani dokazal iracionalnost števila π. Njegov dokaz je nekoliko obširneje obdelan v [1]. Pred tem pa je Issai Schur (1875–1941) iskal razvoj funkcije $\sin(\pi x)$ na intervalu $[0,1]$ po potencah kvadratne funkcije $x(1-x)$. Obe funkciji imata ničli pri $x=0$ in $x=1$, obe imata pri $x=1/2$ lokalni ekstrem in glede na premico $x=1/2$ simetrična grafa. Schur je dokazal, da so vsi koeficienti a_n v razvoju

$$\sin(\pi x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}[x(1-x)]^n$$

pozitivni, ni pa jih izrazil eksplicitno. Uspeh je pri tem imel Leonard Carlitz (1907–1999), ki je leta 1966 zapisal:

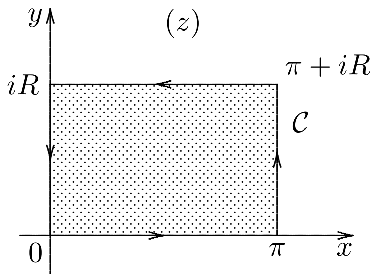
$$a_n=\frac{\pi}{2(n-1)!}\int_0^{\pi}[x(\pi-x)]^{n-1}\sin x\,dx\,.$$

S takimi integrali pa si je pomagal Ivan Niven v svojem dokazu iracionalnosti števila π.

V nadaljevanju si bomo najprej ogledali dokaz, da je število π^2 iracionalno, saj je očitno potem tudi število π iracionalno. Dokaz je dokaj preprost, saj se naslanja na nekatere temeljne izreke matematične analize.

Vzemimo célo (to je holomorfno na $\mathbb{C}$) funkcijo $f(z) = z^{2n}(\pi - z)^{2n}e^{iz}$, kjer je n poljubno nenegativno celo število, in jo integrirajmo v pozitivni smeri po obodu $\mathcal{C}$ pravokotnika z oglišči 0, π, $\pi + iR$ in iR v ravnini kompleksnih števil (z), kot kaže slika. Pri tem je R poljubno pozitivno število.

Na spodnji stranici pravokotnika je $z = x, dz = dx$ in realen x teče od 0 do π; na desni stranici je $z = \pi + iy, dz = idy$ in realen y teče od 0 do R; na zgornji stranici je $z = x + iR, dz = dx$ in realen x teče od π do 0; na levi stranici pa je $z = iy, dz = idy$ in realen y teče od R do 0.



Po Cauchyjevem izreku, ki je obrazložen na primer v [6], in z razbitjem integrala na štiri dele dobimo:

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} x^{2n}(\pi - x)^{2n}e^{ix}\,dx + i\int_0^R (\pi + iy)^{2n}(-iy)^{2n}e^{i(\pi+iy)}\,dy +$$

$$+\int_{\pi}^{0} (x + iR)^{2n}(\pi - x - iR)^{2n}e^{i(x+iR)}\,dx + i\int_R^0 (iy)^{2n}(\pi - iy)^{2n}e^{i(iy)}\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi} x^{2n}(\pi - x)^{2n}e^{ix}\,dx + ie^{\pi i}\int_0^R (-i\pi + y)^{2n}y^{2n}e^{-y}\,dy -$$

$$-\, e^{-R}\int_0^{\pi} (x + iR)^{2n}(\pi - x - iR)^{2n}e^{ix}\,dx - i\int_0^R y^{2n}(\pi i + y)^{2n}e^{-y}\,dy = 0\,.$$

Sedaj naredimo limitni proces $R \to \infty$. Integral s faktorjem e^{-R} gre pri tem proti 0, preostalo pa zapišemo v obliki:

$$\int_0^\pi x^{2n}(\pi - x)^{2n} e^{ix}\,dx = i\int_0^\infty (y - i\pi)^{2n} y^{2n} e^{-y}\,dy + i\int_0^\infty y^{2n}(\pi i + y)^{2n} e^{-y}\,dy =$$
$$= i\int_0^\infty y^{2n}[(y+\pi i)^{2n} + (y - \pi i)^{2n}]e^{-y}\,dy\,.$$

Vpeljimo polinom

$$P_n(x,a) = (x + ai)^{2n} + (x - ai)^{2n} \tag{1}$$

realne spremenljivke x, kjer je n poljubno nenegativno celo število in a realna konstanta. Potem lahko izrazimo:

$$\int_0^\pi x^{2n}(\pi - x)^{2n} e^{ix}\,dx = i\int_0^\infty y^{2n} P_n(y,\pi) e^{-y}\,dy\,.$$

Po primerjavi imaginarnih delov obeh strani dobimo enakost

$$\int_0^\pi x^{2n}(\pi - x)^{2n} \sin x\,dx = \int_0^\infty y^{2n} P_n(y,\pi) e^{-y}\,dy\,. \tag{2}$$

Polinom $P_n(x,a)$ ima stopnjo $2n$ in realne cele koeficiente, kar spoznamo po uporabi binomske formule:

$$P_n(x,a) = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} a^j i^j x^{2n-j} + \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n}{j} a^j i^j x^{2n-j}. \tag{3}$$

Vsoto na desni strani v enakosti (3) poenostavimo in dobimo:

$$P_n(x,a) = 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} a^{2k} x^{2n-2k}. \tag{4}$$

Denimo, da bi bilo število π^2 vsemu navkljub racionalno število, recimo $\pi^2 = a/b$, kjer sta a in b nenegativni tuji si celi števili. Očitno je $b > 1$, ker π^2 ni celo število. Zato bi zaradi enakosti (4) imeli

$$P_n(y,\pi) = 2\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \left(\frac{a}{b}\right)^k y^{2n-2k} = \frac{2}{b^n}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} a^k b^{n-k} y^{2n-2k},$$

in iz (2) bi dobili:

$$I_n = \frac{b^n}{(2n)!}\int_0^\pi x^{2n}(\pi - x)^{2n}\sin x\,dx = \frac{b^n}{(2n)!}\int_0^\infty y^{2n}P_n(y,\pi)e^{-y}\,dy =$$
$$= 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{(2n)!}\binom{2n}{2k}a^k b^{n-k}\int_0^\infty y^{4n-2k}e^{-y}\,dy\,.$$

Za $0 \le k \le n$ dobimo z večkratno uporabo metode integracije per partes najprej

$$\int_0^\infty y^{4n-2k}e^{-y}\,dy = (4n-2k)!\,,$$

nato pa

$$I_n = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(4n-2k)!}{(2n)!}\binom{2n}{2k}a^k b^{n-k}.$$

Ker pa je kvocient $(4n-2k)!/(2n)! = (2n+(2n-2k))!/(2n)!$ za $0 \le k \le n$ celo število, binomski koeficient $\binom{2n}{2k}$ pa tudi, bi bil integral I_n pozitivno celo število za vsak n.

Uporabimo relacijo med geometrijsko in aritmetično sredino dveh nenegativnih realnih števil in dobimo neenakost

$$\sqrt{x(\pi - x)} \le \frac{x + (\pi - x)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

za $0 \le x \le \pi$, kjer velja tudi

$$x^{2n}(\pi - x)^{2n} \le \frac{\pi^{4n}}{2^{4n}}\,,$$

tako da imamo na koncu:

$$I_n = \frac{b^n}{(2n)!}\int_0^\pi x^{2n}(\pi - x)^{2n}\sin x\,dx < \frac{b^n\pi^{4n+1}}{2^{4n}(2n)!} = \frac{\pi\alpha^{2n}}{(2n)!}\,, \quad \alpha = \frac{\pi^2\sqrt{b}}{4}\,.$$

Ni težko ugotoviti, da za vsako realno število α velja:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} = 0\,.$$

Potemtakem je za vse dovolj velike n izpolnjena relacija:

$$0 < I_n < 1\,,$$

kar pa je v protislovju z ugotovitvijo, da je I_n celo število za vsak n. To pa pomeni, da π^2 in π ne moreta biti racionalni števili.

Števili π^2 in π sta torej iracionalni števili.

Ideja za pričujoči članek je v delu [2], v katerem avtorja uporabita staro metodo Ivana Nivena (glej [4]) iz leta 1947, metodo protislovja, ki je v tem, da nas predpostavka o racionalnosti števila π^2 pripelje do obstoja naravnega števila med 0 in 1. Ivan Niven v dokazu izrazi polinom, ki ima podobno vlogo kot naš polinom $P_n(y,a)$, z odvodi, tu pa smo ga našli v kompleksnem integralu. Ključna enakost, ki nas v dokazu vodi v to, je (2).

Dokaza za transcendentnost števil π in e sta bolj zapletena, najdemo ju pa prav tako v [2].

LITERATURA

[1] F. Avsec, *Iracionalnost števila π*, Obzornik mat. fiz. **3** (1953) 4, str. 117–118.

[2] P. Eymard in J.-P. Lafon, *Autour du nombre π*, Hermann, Pariz 1999.

[3] F. Križanič, *Kvadratura kroga*, Obzornik mat. fiz. **2** (1952) 3, str. 97–107.

[4] I. Niven, *A simple proof that π is irrational*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947) 6, str. 509.

[5] P. Petek, *Kako se je godilo številu π, 1. del*, Presek **4** (1976/1977) 3, str. 139–143, *2. del*, Presek **4** (1976/1977) 4, str. 193–196.

[6] D. G. Zill in P. D. Shanahan, *A First Course in Complex Analysis*, Jones and Bartlett Publ., Boston et al. 2003.

VESTI

OBVESTILO

V Obzorniku za matematiko in fiziko, letnik **49**, številka 2, str. 62–63, in na domači strani DMFA `http://www.dmfa.si/` je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge (z utemeljitvami) za letošnja priznanja pošljete **do 30. septembra 2009** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana**.

Predsednik DMFA Slovenije:
prof. dr. Janez Seliger

KUBIČNI ZLEPKI Z MAJHNO PROŽNOSTNO ENERGIJO

GAŠPER JAKLIČ in EMIL ŽAGAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 41A05, 41A15, 65D05, 65D07, 65D17

V članku obravnavamo enega od osnovnih interpolacijskih problemov: dano je zaporedje točk v ravnini, poiskati pa želimo interpolacijsko krivuljo, ki se „dobro“ prilega podatkom. Uporabljamo kubični zlepek in metodo, ki minimizira približno prožnostno energijo krivulje. Izpeljemo pogoje za obstoj interpolanta, ki ima lepo obliko (je regularen, nima zank, osti in zavihkov) in predstavimo enostavno lokalno geometrijsko konstrukcijo.

CUBIC SPLINES WITH SMALL STRAIN ENERGY

In the paper one of the basic interpolation problems is considered. A sequence of points in the plane is given. Our goal is to find an interpolatory curve which fits the data “nicely”. Cubic splines are used and a method, which minimizes the approximate strain energy of the curve. Conditions on the existence of the interpolant, which has a nice shape (it is regular, loop-, cusp- and fold-free), are derived and a simple local geometric construction is presented.

1. Uvod

Pomembna veja raziskovanja na meji med računalništvom in matematiko je računalniško podprto geometrijsko oblikovanje (angl. Computer Aided Geometric Design ali na kratko CAGD). Problemi, s katerimi se ukvarjamo raziskovalci na tem področju, so povezani predvsem z geometrijsko predstavitvijo objektov (krivulj, ploskev, teles, ...), ki se pojavljajo v različnih raziskovalnih in industrijskih problemih (konstrukcija letal, ladij, avtomobilov, oblikovanje izdelkov, ...). Panoga je v zadnjih nekaj desetletjih doživela nesluten razvoj, saj je oblikovanje izdelkov postalo pomemben dejavnik v proizvodnem procesu.

Med standardne probleme, ki jih srečamo na omenjenem področju, sodi gotovo konstrukcija ravninskih parametričnih krivulj, ki temelji na interpolaciji danih ravninskih točk. Oglejmo si to nalogo malo podrobneje.

Dane so točke

$$\boldsymbol{T}_j \in \mathbb{R}^2, \quad j = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Iščemo ravninsko parametrično polinomsko krivuljo $\boldsymbol{p}\colon [t_0, t_n] \to \mathbb{R}^2$ stopnje $\leq n$ (torej $\boldsymbol{p}(t) = (x_n(t), y_n(t))^T$, kjer sta x_n in y_n skalarna polinoma stopnje

$\leq n$), ki interpolira podane točke pri predpisanih vrednostih naraščajočih interpolacijskih parametrov t_j, $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$\boldsymbol{p}(t_j) = \boldsymbol{T}_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n\,, \quad t_0 < t_1 < \ldots < t_n\,.$$

Konkretna izbira interpolacijskih paramerov t_j enolično določa *parametrizacijo* (x_n, y_n) interpolacijske krivulje $\boldsymbol{p}$. Znano je, da različne izbire porajajo različne parametrizacije krivulje $\boldsymbol{p}$, ki se lahko močno izražajo v njeni obliki. Med najbolj znanimi parametrizacijami so α-parametrizacije [2], pri katerih interpolacijske parametre določimo na podlagi razdalj med interpolacijskimi točkami (1), torej

$$t_{j+1} = t_j + \|\boldsymbol{T}_{j+1} - \boldsymbol{T}_j\|^{\alpha}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1\,, \quad t_0 := 0\,, \quad \alpha \in [0, 1]\,. \tag{2}$$

Pri tem smo z $\|\cdot\|$ označili evklidsko normo v $\mathbb{R}^2$. Najbolj znani primeri so: *enakomerna* parametrizacija ($\alpha = 0$), *centripetalna* parametrizacija ($\alpha = 1/2$) in *tetivna* parametrizacija ($\alpha = 1$).

Če je n veliko število, je točk preveč, da bi jih lahko interpolirali z eno samo polinomsko krivuljo $\boldsymbol{p}$. Že iz teorije interpolacije funkcij je namreč znano, da interpolacija s polinomom visoke stopnje lahko vodi v neželene oscilacije interpolacijskega polinoma. Smiselna rešitev je tako na dlani. Kopico točk razdelimo na majhne skupine (recimo po dve) in vsako skupino posebej interpoliramo s polinomsko krivuljo nizke stopnje. Če zagotovimo, da se posamezni polinomski interpolanti v stičnih točkah gladko staknejo, smo dobili *zlepek*. Z višanjem stopnje se število koeficientov polinoma na vsaki komponenti krivulje veča. Ti predstavljajo proste parametre, ki jih lahko izkoristimo za izboljšanje gladkosti. Ker je smiselno proste parametre razdeliti simetrično na robni interpolacijski točki, naj bi jih bilo na vsaki komponenti krivulje sodo mnogo, to pa je res za krivulje lihe stopnje. Zato ponavadi uporabljamo zlepke stopnje tri, pet, ... Ker višanje stopnje prinaša več računanja, je običajno sprejemljiv kompromis kubična krivulja. Zlepek, ki ga dobimo, pa je enkrat, včasih celo dvakrat zvezno odvedljiv. Oglejmo si primer gladkega kubičnega zlepka podrobneje.

Iščemo kubični parametrični ravninski zlepek $\boldsymbol{s}\colon [t_0, t_n] \to \mathbb{R}^2$, za katerega je

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{s}_i := \boldsymbol{s}|_{[t_{i-1}, t_i]} \in \mathbb{P}_3\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,\\
&\boldsymbol{s}_i(t_{i-1}) = \boldsymbol{T}_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,\\
&\boldsymbol{s}_i(t_i) = \boldsymbol{T}_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,\\
&\boldsymbol{s}_i'(t_{i-1}) = \alpha_{i,0}\boldsymbol{d}_{i-1}\,, \quad i = 2, 3, \ldots, n\,,\\
&\boldsymbol{s}_i'(t_i) = \alpha_{i,1}\boldsymbol{d}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Pri tem smo s $\mathbb{P}_3$ označili prostor ravninskih parametričnih polinomov stopnje ≤ 3, torej

$$\mathbb{P}_3 = \left\{ \boldsymbol{p};\, \boldsymbol{p}(t) = \left(\sum_{i=0}^{3} a_i t^i, \sum_{i=0}^{3} b_i t^i \right)^T,\ a_i, b_i \in \mathbb{R}\,,\ i = 0, 1, 2, 3 \right\},$$

in z $\boldsymbol{d}_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, enotske smeri tangent v stičnih točkah. Posebno pozornost si zaslužita zadnji dve enakosti v (3). Dodatna parametra $\alpha_{i,0}$ in $\alpha_{i,1}$ nista uvedena naključno. V primeru, ko za vsak i oba zavzameta vrednost 1, je parametrični zlepek $\boldsymbol{s}$ očitno zvezno odvedljiv. A v praksi velikokrat zadošča, da se odvoda sosednjih segmentov zlepka v stični točki ujemata le po smeri, ne pa tudi po velikosti. Tedaj je dovolj, da sta omenjena parametra poljubni pozitivni števili. Taki zveznosti pravimo G^1 ali *geometrijska zveznost reda 1.*

Definicija. Naj bosta $\boldsymbol{p}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ in $\boldsymbol{q}\colon [b, c] \to \mathbb{R}^2$ dve gladki ravninski parametrični krivulji, za kateri je $\boldsymbol{T} := \boldsymbol{p}(b) = \boldsymbol{q}(b)$. Če je $\boldsymbol{q}'(b) = \alpha\, \boldsymbol{p}'(b)$ za neki $\alpha > 0$, potem pravimo, da se $\boldsymbol{p}$ in $\boldsymbol{q}$ v točki $\boldsymbol{T}$ zlepita G^1 **zvezno**.

Opomba. Definicija geometrijske zveznosti reda 1 je ekvivalentna dejstvu, da se **enotska tangenta** krivulje spreminja zvezno.

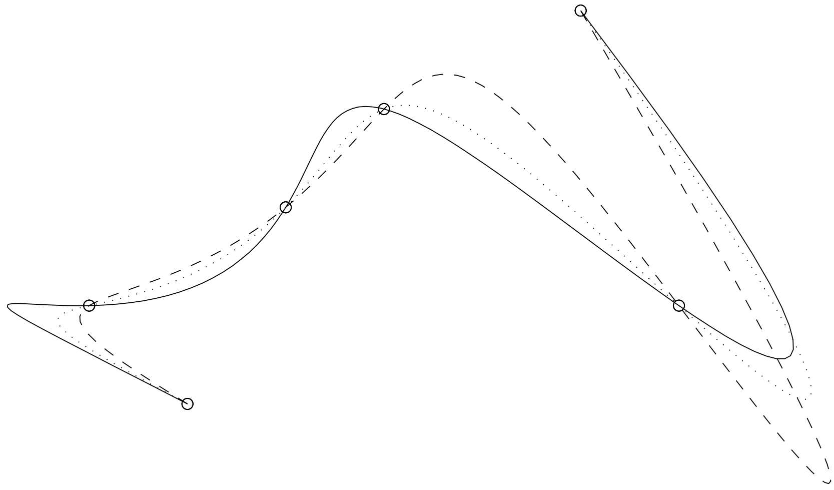
V CAGD tako zveznost pogosto srečamo, saj je za obliko objektov klasična zveznost odvodov ponavadi prehuda zahteva.

Ničesar še nismo povedali o izbiri interpolacijskih parametrov t_j in $\alpha_{j,k}$ ter enotskih vektorjev $\boldsymbol{d}_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $k = 0, 1$. Omenili smo že, da določitev interpolacijskih parametrov t_j v splošnem močno vpliva na obliko zlepka (slika 1). Vendar to ni več res, kadar zahtevamo geometrijsko zveznost. V tem primeru oblika zlepka ni odvisna od parametrizacije, kar je zelo zaželena lastnost v CAGD (ni namreč pomembno, kako smo do oblike objekta prišli, pomembne so njegove geometrijske lastnosti). Za konstrukcijo in kasnejšo uporabo zlepka pa je izbira interpolacijskih parametrov nujna. Poznamo veliko načinov, kako določiti interpolacijske parametre, a nobeden od njih ni univerzalen. Več o možnih izbirah si bralci lahko preberejo v [6].

Še bolj zanimiv problem (predvsem za geometrijsko zvezne zlepke) je izbira enotskih vektorjev $\boldsymbol{d}_i$ in parametrov $\alpha_{i,k}$, $k = 0, 1$. Ko tudi te enkrat izberemo, je zlepek enolično določen in $\boldsymbol{s}_i \in \mathbb{P}_3$, ki ga določajo enačbe (3), lahko dokaj preprosto konstruiramo z rešitvijo naslednjega matričnega sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_{i-1} & t_{i-1}^2 & t_{i-1}^3 \\ 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 \\ 0 & 1 & 2t_{i-1} & 3t_{i-1}^2 \\ 0 & 1 & 2t_i & 3t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{i-1}^T \\ \boldsymbol{T}_i^T \\ \alpha_{i,0} \boldsymbol{d}_{i-1}^T \\ \alpha_{i,1} \boldsymbol{d}_i^T \end{bmatrix}.$$

Poudarimo, da je pri G^1 zveznosti izbira zgoraj omenjenih količin bistvena za obliko zlepka. Ponavadi imamo tri možnosti:



Slika 1. Različne izbire interpolacijskih parametrov (2) vodijo do različnih interpolantov stopnje 5 na istih interpolacijskih točkah. Prikazane so enakomerna parametrizacija (polna črta), tetivna parametrizacija (črtkana črta) in centripetalna parametrizacija (pikčasta črta).

(a) smeri tangent so dane vnaprej;

(b) izbira smeri je prepuščena uporabniku;

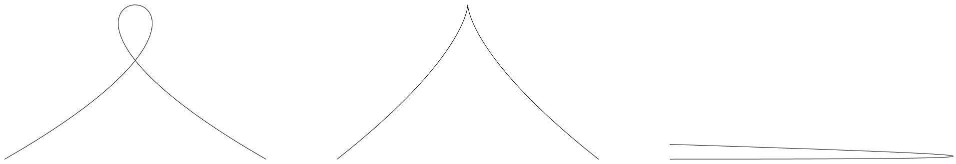
(c) za interpolacijski zlepek zahtevamo samo G^1 zveznost, medtem ko smeri tangent ne predpišemo.

Prva dva načina vodita v lokalne interpolacijske sheme (konstrukcija se izvaja segment za segmentom), zadnja pa vodi v globalno shemo, pri kateri je treba reševati (ponavadi velike) sisteme linearnih enačb. Naj opozorimo, da je druga možnost omejena le na manjše popravke že konstruiranega zlepka, saj sicer lahko „laični“ pristop uporabnika hitro zapelje v konstrukcijo zlepkov z nesprejemljivo obliko.

Za zlepek, ki zadošča (3), je pomembno predvsem to, da nima neželenih osti, zank ali zavihkov (slika 2) in da smiselno rekonstruira obliko prvotnih podatkov (1). Običajno zahtevamo, da je krivulja $\boldsymbol{s}$ *regularna*, kar zadosti nekaterim zgoraj zapisanim zahtevam. Spomnimo se, da regularnost pomeni neničelnost odvoda $\boldsymbol{s}'(t)$ pri vsakem parametru t iz domene (oz. grad $\boldsymbol{s}(t) \neq \mathbf{0}$).

2. Interpolacijski problem

Najprej predstavimo oznake, ki jih bomo uporabljali. Za $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)^T$ in $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)^T$ naj bo $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} := a_1\, b_1 + a_2\, b_2$ skalarni produkt v $\mathbb{R}^2$ ter $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$



Slika 2. Zanka (levo), ost (v sredini) in zavihek (krivulja se obrne in teče nazaj po sami sebi) (skica desno).

kot med vektorjema $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$. Spomnimo se, da je

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\,, \quad |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\||\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\,,$$

kjer je $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} := a_1b_2 - a_2b_1$ planarni vektorski produkt. Uporabljali bomo tudi standardno diferenčno notacijo $\Delta(\bullet)_i = (\bullet)_{i+1} - (\bullet)_i$.

Študirali bomo naslednji problem. Denimo, da so dane točke (1), kjer je $\boldsymbol{T}_j \neq \boldsymbol{T}_{j+1}$ in pripadajoči interpolacijski parametri $(t_j)_{j=0}^n$. Opomnimo, da se točke kasneje lahko ponovijo ($\boldsymbol{T}_{i+k} = \boldsymbol{T}_i, k \neq \pm 1$), le zaporedni dve ne smeta sovpadati. Predpostavili bomo, da so interpolacijski parametri podani vnaprej (običajno jih sicer izračunamo iz podatkov, na primer s centripetalno ali tetivno parametrizacijo (2)). Včasih so namreč tudi interpolacijski parametri neznanke, kar vodi v reševanje nelinearnih problemov in je večinoma zelo težka naloga. O takih problemih za kubične krivulje si lahko bralci kaj več preberejo v [5].

Želimo poiskati G^1 zvezen parametrični zlepek $\boldsymbol{s}\colon [t_0, t_n] \to \mathbb{R}^2$, za katerega velja (3). Obstaja neskončno rešitev problema, saj vsaka izbira $\alpha_{i,0} > 0$, $\alpha_{i,1} > 0$ in $\boldsymbol{d}_i$ poda enoličen zlepek $\boldsymbol{s}$. Tako imamo na voljo veliko število prostih parametrov, ki jih lahko uporabimo kot parametre oblike krivulje.

Naravni pristop, kako izkoristiti parametre oblike, je minimizacija ustreznega funkcionala. Ker je oblika krivulje odvisna predvsem od njene ukrivljenosti κ, je smiselno minimizirati naslednji funkcional:

$$\varphi_s(\boldsymbol{\alpha}) := \int_{t_0}^{t_n} \|\kappa(t)\|^2 \|\boldsymbol{s}'(t)\|\, dt = \int_{t_0}^{t_n} \frac{(\boldsymbol{s}'(t)\times\boldsymbol{s}''(t))^2}{\|\boldsymbol{s}'(t)\|^5}\, dt\,, \tag{4}$$

kjer je $\boldsymbol{\alpha} := ((\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{2n}$. Funkcionalu (4) pravimo *prožnostna energija* (angl. strain energy) krivulje in ima fizikalno ozadje, saj predstavlja energijo elastične palice zaradi fleksijskega zvijanja. V praksi [1, 7] se namesto (4) običajno uporablja *približna prožnostna energija* (tudi *linearizirana upogibna energija*)

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) := \int_{t_0}^{t_n} \|\boldsymbol{s}''(t)\|^2 dt\,. \tag{5}$$

Če je $\|\boldsymbol{s}'(t)\| \approx 1$, je parametrizacija blizu naravni in kot $\angle(\boldsymbol{s}'(t), \boldsymbol{s}''(t))$ blizu pravemu. Tako opazimo, da je v tem primeru (5) dobra aproksimacija (4). Odvod $\boldsymbol{s}''$ ni nujno zvezen, vendar pa ima samo končno število končnih skokov, zato integral (5) obstaja. Omenimo še, da med vsemi gladkimi interpolacijskimi krivuljami kubični C^2 zlepek minimizira linearizirano upogibno energijo [1].

Očitno lahko minimizacijo izvajamo lokalno. Velja namreč

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} \varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \min_{\boldsymbol{\alpha}_i} \varphi_i(\boldsymbol{\alpha}_i)\,,$$

kjer je

$$\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}_i) := \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\boldsymbol{s}_i''(t)\|^2 dt\,, \tag{6}$$

in $\boldsymbol{\alpha}_i := (\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1})$. Iz geometrije sledi, da morajo biti komponente $\boldsymbol{\alpha}_i$ pozitivne, sicer tangentna vektorja na $\boldsymbol{s}_i$ pri t_{i-1} in t_i ne bi imela enakih smeri kot vektorja $\boldsymbol{d}_{i-1}$ in $\boldsymbol{d}_i$. Torej moramo dejansko izvajati minimizacijo z omejitvami

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathcal{D}_i} \varphi_i(\boldsymbol{\alpha}_i)\,, \quad \mathcal{D}_i := \{\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathbb{R}^2 \,|\, \boldsymbol{\alpha}_i > \boldsymbol{0}\}\,.$$

Tu je neenakost $\boldsymbol{\alpha}_i > \boldsymbol{0}$ mišljena po komponentah. Na žalost za dani smeri tangent $\boldsymbol{d}_{i-1}$, $\boldsymbol{d}_i$, globalni minimum ni vedno v območju $\mathcal{D}_i$, kar so opazili že v [8]. Problem so rešili tako, da so dodali eno ali dve novi „umetni“ točki, s katerima so dosegli, da je minimum vedno v želenem območju. Tu se pojavi standardni problem, kako dobro izbrati nove točke. Metoda ima veliko pomanjkljivost: predpostavka, da so smeri tangent podane vnaprej, je v praksi žal vse prej kot realistična. Čeprav je postopek relativno preprost, zahteva kar nekaj dodatnega dela, kar lahko pomeni precejšnjo oviro v aplikacijah, ki imajo opravka z velikimi količinami podatkov.

V nadaljevanju bomo študirali pristop, ki se izogne gornjim problemom. Namesto dodajanja novih interpolacijskih točk in smeri tangent, če minimum φ_i ni v dopustni domeni $\mathcal{D}_i$, bomo predpostavili, da so smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$ neznane. Če vztrajamo pri fiksnem številu interpolacijskih točk, funkcional φ_i morda ne bo imel minimuma v dopustnem območju $\mathcal{D}_i$ za kakšno smer $\boldsymbol{d}_{i-1}$ ali $\boldsymbol{d}_i$. Namesto tega bomo uporabili primerno aproksimacijo funkcionala φ_i, kar vodi k bolj milim pogojem na dopustno območje za smeri tangent.

3. Minimizacija

Nadaljujmo z aproksimacijo funkcionala (6). Kot v prejšnjem razdelku predpostavljamo, da imamo dane točke $\boldsymbol{T}_i$, enotske smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$ in parametre t_i. Naraven način aproksimacije (6) je uporaba kakšnega kvadraturnega pravila. Uporabimo enega najpreprostejših, trapezno pravilo. Tako dobimo

$$\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\boldsymbol{s}_i''(t)\|^2 dt \approx \frac{\Delta t_{i-1}}{2} \left(\|\boldsymbol{s}_i''(t_{i-1})\|^2 + \|\boldsymbol{s}_i''(t_i)\|^2 \right). \tag{7}$$

Toda $\|\boldsymbol{s}_i''(t_{i-1})\|$ in $\|\boldsymbol{s}_i''(t_i)\|$ sta odvisna od obeh smeri tangent $\boldsymbol{d}_{i-1}$ in $\boldsymbol{d}_i$, zato lahko pričakujemo podobne težave in omejitve na dopustna območja kot v članku [8]. Temu se lahko izognemo z aproksimacijo izraza (7). Poiskali bomo najboljšo aproksimacijo za $\boldsymbol{s}_i''(t_{i-1})$ kot linearno kombinacijo $\boldsymbol{s}_i(t_{i-1})$, $\boldsymbol{s}_i'(t_{i-1})$ in $\boldsymbol{s}_i(t_i)$, in podobno, najboljšo aproksimacijo za $\boldsymbol{s}_i''(t_i)$ s $\boldsymbol{s}_i(t_{i-1})$, $\boldsymbol{s}_i'(t_i)$ in $\boldsymbol{s}_i(t_i)$. Tu z najboljšo aproksimacijo mislimo na aproksimacijo, ki je točna za polinome stopnje $\leq k$ za čim večji k. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_i''(t_{i-1}) &\approx \frac{2}{\Delta t_{i-1}} \left(\frac{\boldsymbol{s}_i(t_i) - \boldsymbol{s}_i(t_{i-1})}{\Delta t_{i-1}} - \boldsymbol{s}_i'(t_{i-1}) \right), \\
\boldsymbol{s}_i''(t_i) &\approx \frac{2}{\Delta t_{i-1}} \left(\boldsymbol{s}_i'(t_i) - \frac{\boldsymbol{s}_i(t_i) - \boldsymbol{s}_i(t_{i-1})}{\Delta t_{i-1}} \right),
\end{aligned}$$

in po (3) in (7) lahko aproksimiramo φ_i z

$$\varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) \approx \frac{2}{\Delta t_{i-1}} \psi_i(\boldsymbol{\alpha}), \tag{8}$$

kjer je

$$\psi_i(\boldsymbol{\alpha}) := \left\| \frac{1}{\Delta t_{i-1}} \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} - \alpha_{i,0}\, \boldsymbol{d}_{i-1} \right\|^2 + \left\| \alpha_{i,1}\, \boldsymbol{d}_i - \frac{1}{\Delta t_{i-1}} \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} \right\|^2. \tag{9}$$

Izrek 1. *Nelinearni funkcional ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ima enoličen globalni minimum v notranjosti $\mathcal{D}_i$ natanko takrat, ko velja*

$$\boldsymbol{\alpha}_i^* := \frac{1}{\Delta t_{i-1}} \left(\boldsymbol{d}_{i-1} \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}, \boldsymbol{d}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} \right)^T > \boldsymbol{0}.$$

Vrednost ekstrema je

$$\psi_i(\boldsymbol{\alpha}_i^*) = \frac{2 - c_{i,0}^2 - c_{i,1}^2}{(\Delta t_{i-1})^4} \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2,$$

kjer je

$$c_{i,k} = \cos \angle \left(\boldsymbol{d}_{i+k-1}, \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} \right), \quad k = 0, 1.$$

Dokaz. Funkcional (9) lahko poenostavimo v

$$\begin{aligned}\psi_i(\boldsymbol{\alpha}_i) =& \frac{1}{(\Delta t_{i-1})^2}\left((\Delta t_{i-1})^2\,\left(\alpha_{i,0}^2+\alpha_{i,1}^2\right)\right.\\ &\left.-\,2\Delta t_{i-1}(\alpha_{i,0}\,\boldsymbol{d}_{i-1}+\alpha_{i,1}\,\boldsymbol{d}_i)\cdot\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}+2\|\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}\|^2\right).\end{aligned}$$

Minimum ψ_i je bodisi na robu $\mathcal{D}_i$ ali pa ga dobimo prek parcialnih odvodov ψ_i. V drugem primeru je lokalni minimum pri $\boldsymbol{\alpha}_i^* := \left(\alpha_{i,0}^*, \alpha_{i,1}^*\right)^T$, kjer je

$$\alpha_{i,k}^* = \frac{\boldsymbol{d}_{i+k-1}\cdot\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}}{\Delta t_{i-1}}, \quad k=0,1\,,$$

kar vodi do

$$m := \psi_i(\boldsymbol{\alpha}_i^*) = \frac{2-c_{i,0}^2-c_{i,1}^2}{(\Delta t_{i-1})^2}\,\|\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}\|^2.$$

Pokazati je treba, da je to tudi globalni minimum. Vzemimo poljuben $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i,0},\alpha_{i,1})^T$ na robu območja $\mathcal{D}_i$. Tako je $\alpha_{i,k}=0$ za vsaj en $k\in\{0,1\}$. Če je $\alpha_{i,0}=\alpha_{i,1}=0$, potem je $\psi_i(\boldsymbol{\alpha}_i) = 2\|\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}\|^2/(\Delta t_{i-1})^2 \geq m$, in obravnavati je treba samo primer, ko je eden od $\alpha_{i,k}$ pozitiven. Zaradi simetrije je dovolj gledati $\alpha_{i,0}>0$. V tem primeru je enostavno preveriti, da funkcional $\psi_i|_{\alpha_{i,1}=0}$ doseže svoj globalni minimum pri $\alpha_{i,0} = (\boldsymbol{d}_{i-1}\cdot\Delta\boldsymbol{T}_{i-1})/\Delta t_{i-1}$, torej je $\psi_i(\alpha_{i,0},0) = \left(2-c_{i,0}^2\right)\|\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}\|^2/(\Delta t_{i-1})^2 \geq m$. S tem je dokaz končan. ∎

Minimum je lahko tudi 0. V tem primeru je $c_{i,0}=c_{i,1}=1$ (lahko bi bilo tudi -1, vendar ima krivulja tedaj nezaželeni zavihek) in kubični odsek zlepka $\boldsymbol{s}_i$ postane ravna črta

$$\boldsymbol{s}_i(t) = \boldsymbol{T}_{i-1} + \frac{t-t_{i-1}}{\Delta t_{i-1}}\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}\,.$$

Posledica 2. *Pogoji $\boldsymbol{\alpha}_i^* > \boldsymbol{0}$, $i=1,2,\ldots,n$, imajo enostavno geometrijsko interpretacijo, namreč $\angle\left(\boldsymbol{d}_{i+k-1},\Delta\boldsymbol{T}_{i-1}\right)\in[0,\frac{\pi}{2})$, $k=0,1$.*

Naj bodo predpostavke izreka 1 izpolnjene. Zastavimo si lahko pomembno vprašanje: ali je dobljeni kubični odsek zlepka $\boldsymbol{s}_i$ regularen na $[t_{i-1},t_i]$, $i=1,2,\ldots,n$. Odgovor je pritrdilen, še več, dokažemo lahko, da $\boldsymbol{s}_i$ nima osti, zank in zavihkov (slika 2).

Izrek 3. *Naj bodo izpolnjene predpostavke izreka 1 in $\boldsymbol{s}_i$, $i=1,2,\ldots,n$, dobljeni geometrijski interpolant, definiran s* (3)*. Potem je odsek zlepka $\boldsymbol{s}_i$ regularen in brez zank, osti in zavihkov.*

Zainteresirani bralci lahko dokaz preberejo v [3].

4. Konstrukcija smeri tangent

V prejšnjem razdelku smo konstruirali kubičen G^1 zlepek z minimizacijo prožnostne energije. Pri tem smo predpostavili, da so enotske smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$ znane vnaprej in da so parametri $\boldsymbol{\alpha}_i$ dobljeni prek minimizacije. Iz izreka 1 sledi, da morajo biti smeri tangent primerno izbrane, sicer zlepek ne obstaja.

V tem razdelku bomo obravnavali problem konstrukcije ustreznih smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$. Zahtevati moramo

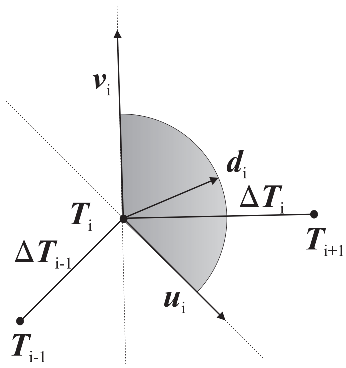
$$\boldsymbol{d}_{i+k-1} \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} > 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad k = 0, 1\,.$$

Da bi izpolnili te pogoje, obravnavajmo i-ti in $(i+1)$-i segment zlepka $\boldsymbol{s}$ (slika 3). Definirajmo rotacijo za $\pi/2$ v pozitivni smeri

$$R := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

in $z_i := \operatorname{sign}(\Delta \boldsymbol{T}_{i-1} \times \Delta \boldsymbol{T}_i)$, ter

$$\boldsymbol{u}_i := z_i R \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\,, \quad \boldsymbol{v}_i := -z_i R \Delta \boldsymbol{T}_i\,, \quad \boldsymbol{w}_i := \lambda_i\, \boldsymbol{u}_i + (1-\lambda_i)\, \boldsymbol{v}_i\,, \ \lambda_i \in \mathbb{R}\,. \tag{11}$$



Slika 3. Dopustni položaji za $\boldsymbol{d}_i$. V prikazanem primeru je $z_i = -1$.

Lema 4. *Če je $z_i \neq 0$ in $\lambda_i \in (0,1)$, potem je $\boldsymbol{w}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_j > 0$, $j = i-1, i$.*

Dokaz. Dokazali bomo, da velja $\boldsymbol{w}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_j > 0$, $j = i-1$. Dokaz za $j = i$ je podoben in ga bomo izpustili. Vzemimo poljuben $\boldsymbol{w}_i = \lambda_i\, \boldsymbol{u}_i + (1-\lambda_i)\, \boldsymbol{v}_i$ z $\lambda_i \in (0,1)$. Po (10) in (11) velja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} &= \lambda_i \boldsymbol{u}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} + (1-\lambda_i) \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} = \\ &= -(1-\lambda_i) z_i (R \Delta \boldsymbol{T}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\,, \end{aligned}$$

ker sta $\boldsymbol{u}_i$ in $\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}$ pravokotna. Očitno je dovolj preveriti

$$z_i = -\mathrm{sign}\left((R\,\Delta \boldsymbol{T}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\right).$$

Ker je $z_i \neq 0$, je $\angle\left(\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}, \Delta \boldsymbol{T}_i\right) \neq 0, \pi$, in obravnavamo dve možnosti. Če je $z_i < 0$, iz (11) in slike 3 sledi $\angle\left(R\Delta \boldsymbol{T}_i, \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\right) < \pi/2$ in je skalarni produkt $(R\Delta \boldsymbol{T}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{T}_{i-1}$ pozitiven. Podobno obravnavamo še primer $z_i > 0$. ■

Iz leme 4 sledi, da vsak $\lambda_i \in (0,1)$ določa $\boldsymbol{w}_i$, ki vodi k minimizaciji funkcionala (9). Vzamemo na primer kar $\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{w}_i/\|\boldsymbol{w}_i\|$. Tako lahko na λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, gledamo kot na proste parametre, ki vplivajo na obliko zlepka $\boldsymbol{s}$. Ena od možnih izbir je $\lambda_i = \|\boldsymbol{v}_i\|/(\|\boldsymbol{u}_i\| + \|\boldsymbol{v}_i\|)$, kar pomeni, da $\boldsymbol{d}_i$ kaže iz $\boldsymbol{T}_i$ v smeri simetrale kota $\angle(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)$ (glejte sliko 3 in posledico 6). To je naravna hevristična izbira, ker tako smer $\boldsymbol{d}_i$ postane najbolj oddaljena od neželenih smeri, ki vodijo do $\alpha_{i,k} = 0$ za $k = 0$ ali $k = 1$. Lema 4 izpušča dve možnosti, $\angle\left(\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}, \Delta \boldsymbol{T}_i\right) = 0, \pi$. Če je obravnavani kot enak 0, lahko vzamemo $\boldsymbol{w}_i = \Delta \boldsymbol{T}_i$, in spet veljajo sklepi leme. Primer, ko je kot enak π, pomeni, da ima vsaka parametrizacija takih podatkov zavihek. Torej je treba takšen primer izločiti s pomočjo poprejšnje obdelave podatkov, na primer z dodajanjem nove, „umetne“ točke zunaj premice, s čimer se izognemo nezaželenemu zavihku.

Gornje metode ne moremo uporabiti za smeri prve in zadnje tangente, vendar lahko izberemo kar $\boldsymbol{d}_0 = \Delta \boldsymbol{T}_0/\|\Delta \boldsymbol{T}_0\|$ in $\boldsymbol{d}_n = \Delta \boldsymbol{T}_{n-1}/\|\Delta \boldsymbol{T}_{n-1}\|$. Tako lahko za dane parametre oblike $\lambda_i \in (0,1)$ uporabimo algoritem 1 za konstrukcijo smeri tangent in G^1 kubičnega zlepka.

Algoritem 1. Algoritem za konstrukcijo smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$ in kubičnega G^1 zlepka $\boldsymbol{s}$:

```
for i = 1 to n − 1
    if ∠(ΔT_{i−1}, ΔT_i) = π
        Exit.
    end if
end for
d_0 = ΔT_0/‖ΔT_0‖
for i = 1 to n − 1
    if ∠(ΔT_{i−1}, ΔT_i) = 0
        d_i = ΔT_i/‖ΔT_i‖
    else
        u_i = z_i R ΔT_{i−1}
        v_i = −z_i R ΔT_i
        w_i = λ_i u_i + (1 − λ_i) v_i
        // λ_i ∈ (0, 1) so podani vnaprej ali izračunani po izreku 5
        d_i = w_i/‖w_i‖
    end if
end for
```

$\boldsymbol{d}_n = \Delta \boldsymbol{T}_{n-1}/\|\Delta \boldsymbol{T}_{n-1}\|$
for $i = 1$ **to** n
Konstruiraj segment zlepka $\boldsymbol{s}_i$ z uporabo $\boldsymbol{T}_j, \boldsymbol{d}_j$, $j = i-1, i$, in izreka 1.
end for

Izrek 1 ponuja širok nabor dopustnih smeri tangent. Nato lahko z algoritmom 1 lokalno konstruiramo zlepek. Naravno vprašanje je, katere so optimalne smeri tangent.

Izrek 5. *Minimalna vrednost funkcionala* (9) *je dosežena pri smereh tangent* $\boldsymbol{d}_i := \boldsymbol{w}_i/\|\boldsymbol{w}_i\|$ *iz* (11) *in*

$$\lambda_i = \frac{2\Delta t_i^3}{A \pm \sqrt{B}}\, \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i\,, \tag{12}$$

kjer je

$$\begin{aligned} A &:= \Delta t_{i-1}^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_i\|^2 + 2\Delta t_i^3\, \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i - \Delta t_i^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2, \\ B &:= \left(\Delta t_i^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2 - \Delta t_{i-1}^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_i\|^2\right)^2 + 4\Delta t_{i-1}^3 \Delta t_i^3 (\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i)^2. \end{aligned}$$

Če je $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \neq 0$, *predznak v imenovalcu* (12) *izberemo tako, da je* $\lambda_i \in (0,1)$, *sicer pa postavimo*

a) $\lambda_i = 0$ *za* $z_i = -1$, *ali*
b) $\lambda_i = 1$ *za* $z_i = 1$.

Dokaz. Poiskati je treba optimalne smeri tangent $\boldsymbol{d}_i$, ki minimizirajo približno prožnostno energijo (8). Če smeri tangent že poznamo, z izrekom 1 dobimo optimalne $\boldsymbol{\alpha}_i$. Ker smer $\boldsymbol{d}_i$ nastopa samo v dveh sosednjih odsekih v (9), je dovolj minimizirati izraz

$$\frac{2}{\Delta t_{i-1}} \left\| \alpha_{i,1} \boldsymbol{d}_i - \frac{1}{\Delta t_{i-1}} \Delta \boldsymbol{T}_{i-1} \right\|^2 + \frac{2}{\Delta t_i} \left\| \frac{1}{\Delta t_i} \Delta \boldsymbol{T}_i - \alpha_{i+1,0} \boldsymbol{d}_i \right\|^2.$$

Z uporabo izreka 1 in (11), izračunom parcialnih odvodov na λ_i in precej računanja dobimo naslednjo kvadratno enačbo:

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda_i) :=& \lambda_i^2 \big((\Delta t_{i-1}^3 - \Delta t_i^3) \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i + \Delta t_i^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2 - \Delta t_{i-1}^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_i\|^2 \big) + \\ &+ \lambda_i \big(\Delta t_{i-1}^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_i\|^2 + 2\Delta t_i^3 \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i - \Delta t_i^3 \|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|^2 \big) - \Delta t_i^3 \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = 0. \end{aligned}$$

Če je $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \neq 0$, je $\Lambda(0)\,\Lambda(1) = -\Delta t_{i-1}^3\, \Delta t_i^3\, (\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i)^2 < 0$, torej je natanko ena od rešitev gotovo na $(0,1)$. V primeru $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = 0$ pa sta rešitvi ravno 0 in 1. Pravo rešitev izberemo glede na (11). ∎

Za posebno izbiro parametrizacije $\alpha = 2/3$ (2) se da izraz (12) zelo poenostaviti. Opazimo, da del izraza B in koren izgineta. Tako dobimo naslednji rezultat:

Posledica 6. *Za 2/3-parametrizacijo,*

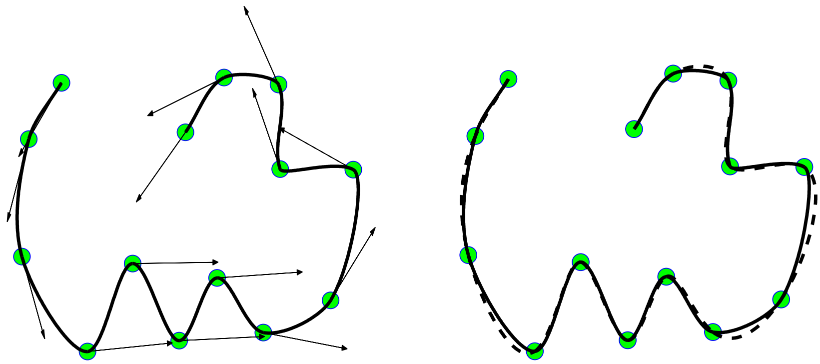
$$\frac{\Delta t_{i-1}}{\Delta t_i} = \left(\frac{\|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\|}{\|\Delta \boldsymbol{T}_i\|}\right)^{\frac{2}{3}},$$

optimalne smeri tangent ležijo na simetralah kotov $\angle(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i)$ *pri vrednostih parametrov*

$$\lambda_i := \frac{\|\Delta \boldsymbol{T}_i\|}{\|\Delta \boldsymbol{T}_{i-1}\| + \|\Delta \boldsymbol{T}_i\|}.$$

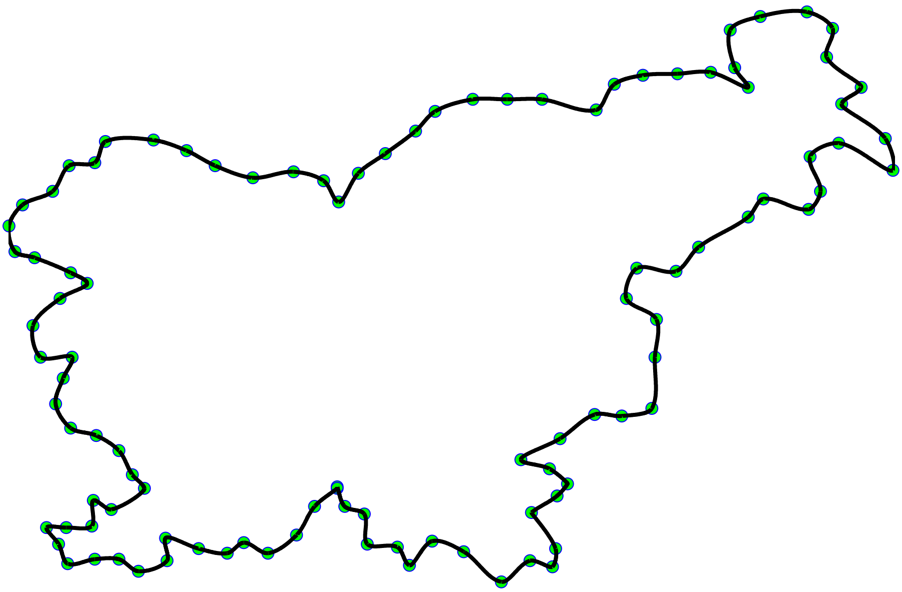
Dobljene rezultate brez težav iz ravnine posplošimo v prostor $\mathbb{R}^d, d \geq 2$ [4].

5. Numerična primera



Slika 4. Kubični G^1 interpolant (polna črta) z ustreznimi enotskimi tangentami (levo). Na desni je primerjava iste krivulje s C^2 zveznim kubičnim zlepkom (črtkana črta). Približni prožnostni energiji sta 112,0 in 55,74.

Sklenimo članek s primeroma. Kubični G^1 interpolant, dobljen z algoritmom 1, se dobro prilega C^2 kubičnemu interpolacijskemu zlepku s centripetalno parametrizacijo (slika 4 desno). Na levi sliki so prikazane optimalne smeri tangent. Za lažjo primerjavo sta izračunani tudi približni prožnostni energiji (5) za krivulji na slikah. Pričakovano je energija C^2 zlepka manjša, saj minimizira funkcional (5). Naj omenimo, da je bilo pri konstrukciji C^2 kubičnega zlepka treba rešiti globalni matrični sistem linearnih enačb, medtem ko je bil G^1 kubični zlepek konstruiran lokalno z algoritmom 1.



Slika 5. Primer geometrijskega interpolanta na realnih podatkih

Na sliki 5 je primer kubičnega G^1 zlepka na realnih podatkih.

LITERATURA

[1] C. de Boor, *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[2] M. S. Floater, *On the deviation of a parametric cubic spline interpolant from its data polygon*, Comput. Aided Geom. Design **25** (2008) 3, str. 148–156.

[3] G. Jaklič in E. Žagar, *Planar cubic Hermite G^1 splines with small strain energy*, poslano v objavo.

[4] G. Jaklič in E. Žagar, *Shape preserving interpolation by spatial cubic G^1 splines*, Annali dell'Universita di Ferrara **54** (2008) 2, str. 259–267.

[5] J. Kozak in M. Krajnc, *Geometric interpolation by planar cubic polynomial curves*, Comput. Aided Geom. Design **24** (2007) 2, str. 67–78.

[6] E. T. Y. Lee, *Choosing nodes in parametric curve interpolation*, Comput. Aided Design **21** (1989) 6, str. 363–370.

[7] J. Wallner, *Note on curve and surface energies*, Comput. Aided Geom. Design **24** (2007) 8–9, str. 494–498.

[8] J.-H. Yong in F. Cheng, *Geometric Hermite curves with minimum strain energy*, Comput. Aided Geom. Design **21** (2004) 3, str. 281–301.

BALMERJEVA ENAČBA

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.65.+g

Na vijugasti poti do kvantne mehanike so pomembno vlogo imela spektroskopska merjenja. Članek opiše, kako je Johann Jakob Balmer prišel do svoje znamenite enačbe. To je izkustveni zakon, ki bi si po vsebini in pomenu zaslužil to ime. Dal je odločilno pobudo Nielsu Bohru za model vodikovega atoma. Enega od privzetkov modela je podprl Louis de Broglie s faznimi valovi. Energije tega modela so obveljale kot lastne vrednosti Schrödingerjeve enačbe.

BALMER'S EQUATION

On the winding way towards quantum mechanics an important role fell to spectroscopical measurements. In the article it is described how Johann Jakob Balmer arrived at his famous equation. This is an empirical law which according to content and meaning would deserve this name. It gave Niels Bohr the decisive impulse for his model of the hydrogen atom. One of its postulates was endorsed by Louis de Broglie's phase waves. The energies of this model remained valid as eigenvalues of the Schrödinger equation.

Optična spektroskopija je zrasla iz spektralne analize. Joseph Fraunhofer je sestavil spektroskop, z njim v letih 1814 in 1815 ugotovil množico absorpcijskih črt v sončnem spektru in jih uporabil kot znamenja pri merjenju valovne dolžine. Robert Wilhelm Bunsen in Gustav Robert Kirchhoff sta po letu 1859 uvidela, da so emisijske in absorpcijske črte plinov značilne za element. Po njih sta odkrila rubidij in cezij, drugi pa še nekaj drugih elementov. S spektralno analizo je postalo mogoče raziskovati sestavo snovi na Soncu in drugih zvezdah. Nekateri raziskovalci so črtaste spektre plinov primerjali s spektri zvočil. Pri tem pa valovne dolžine črt v svetlobnih spektrih vsekakor niso bile v razmerju majhnih celih števil kot valovne dolžine črt v zvočnih spektrih, na primer pri struni. Eleuthère Mascart, ki je razširil raziskovanje spektrov na ultravijolično območje, je leta 1869 zapisal: „Pomembno vprašanje, ki ga nujno zastavi spektralna analiza, je, ali obstaja zveza med različnimi črtami kake snovi ali tudi med spektri podobnih snovi. [...] Težko je verjeti, da je ponavljanje naključno. Ali ni bolj naravno uvideti, da so podobne skupine črt harmoniki, povezani z molekulsko zgradbo sevajočega plina.“

Anders Jonas Ångstrøm je že tri leta pred tem izmeril valovno dolžino štirih črt v vidnem delu vodikovega spektra. Za rdečo črto H_α je dobil 656,21 nm, modro H_β 486,07 nm ter dve vijolični črti H_γ 434,01 nm in H_δ 410,12 nm. Pozneje je izmeril še valovno dolžino pete črte na meji vidnega dela spektra. Hermann Wilhelm Vogel in William Huggins sta neodvisno drug od drugega zasledila nadaljnje vodikove črte v ultravijoličnem delu spektra „belih zvezd", potem ko je leta 1880 prvič uspelo fotografirati spekter zvezde. Johnstone Stoney, znan po tem, da je za osnovni naboj skoval ime elektron, je leta 1871 tri od Ångstrømovih črt pomnožil z lomnim kvocientom zraka in tako valovne dolžine preračunal na vakuum. Nato jih je izrazil kot $\lambda = \lambda_S/n$ z $\lambda_S = 13127{,}714$ nm, ko je za n po vrsti postavil 20, 27 in 32. Arthur Schuster je leta 1882 temu nasprotoval, češ da bi imele take enačbe smisel le, če bi valovne dolžine natančno poznali.

Z valovnimi dolžinami črt v vodikovem spektru se je začel ukvarjati Johann Jakob Balmer. Rojen je bil leta 1825 v Lausnu blizu Basla. Matematiko je študiral na univerzah v Baslu, Karlsruheju in Berlinu. Leta 1849 je na univerzi v domačem kraju doktoriral z delom o cikloidah. Po tem je tam na dekliški srednji šoli poučeval matematiko do smrti leta 1898. Leta 1865 se je habilitiral za opisno geometrijo in do leta 1890 na baselski univerzi tudi predaval o opisni geometriji, grafičnem ponazarjanju v višji geometriji, načrtih starih stavb in perspektivi. Zanimal se je za arhitekturo in raziskoval razmerja v načrtih znanih starih stavb ter se zavzemal za njihovo ohranitev. Leta 1884 je v programu dekliške šole objavil članek *O projekciji kroga* in leta 1887 knjigo *Prosta perspektiva.* Dobrodelno se je ukvarjal z izobraževanjem delavcev in skrbel za njihovo bivanje in zdravje. O tem pričata knjigi *Delavčevo stanovanje* leta 1883 in *Zdravje, beseda za zdrave in bolne* leta 1885 [1].

Profesor fizike na baselski univerzi Eduard Hagenbach-Bischoff ga je opozoril na Ångstrømove meritve vodikovih valovnih dolžin. Leta 1884 je Balmer, ki sicer ni raziskoval v fiziki, v baselskem društvu naravoslovcev predaval o vodikovem spektru. V društvenem glasilu je o tem objavil članek, ki je nekoliko skrajšan izšel v Analih [2]. V društvenem glasilu je objavil dodatek, ki ga je v Analih upošteval kot opombo pri korekturi [3]. Veliko pozneje je spektrom posvetil le še en članek [4].

Balmer je izhajal iz Ångstrømovih nepopravljenih izmerkov za prve štiri valovne dolžine črt v vidnem delu vodikovega spektra. Po Stoneyevem zgledu se jih je namenil izraziti kot produkt skupnega faktorja in funkcije celega števila. V ta namen je najprej poiskal kvociente valovnih dolžin in jih izrazil kot ulomke, v katerih je števec in imenovalec razstavil na prafaktorje: $655{,}21/486{,}074 = 1{,}350 = 27/20 = 3^3/(2^2 \cdot 5)$, $656{,}21/434{,}01 = 1{,}512 = 189/125 = 7 \cdot 3^3/(5^3)$ in $656{,}21/410{,}12 = 1{,}600 = 8/5 = (2^3/5)(3^3/3^3)$. V ulomkih so se pojavila samo najnižja praštevila in vsi so vsebovali faktor

$3^3/5$. Upošteval ga je in izračunal skupni faktor:

$$\begin{aligned} 656{,}21\ \mathrm{nm} \cdot 5/3^2 &= 434{,}0\ \mathrm{nm} \cdot 7 \cdot 3/5^2 = 486{,}074\ \mathrm{nm} \cdot 3/2^2 = \\ &= 410{,}12\ \mathrm{nm} \cdot 2^4/3^2 = 364{,}56\ \mathrm{nm} = \lambda_0\,. \end{aligned}$$

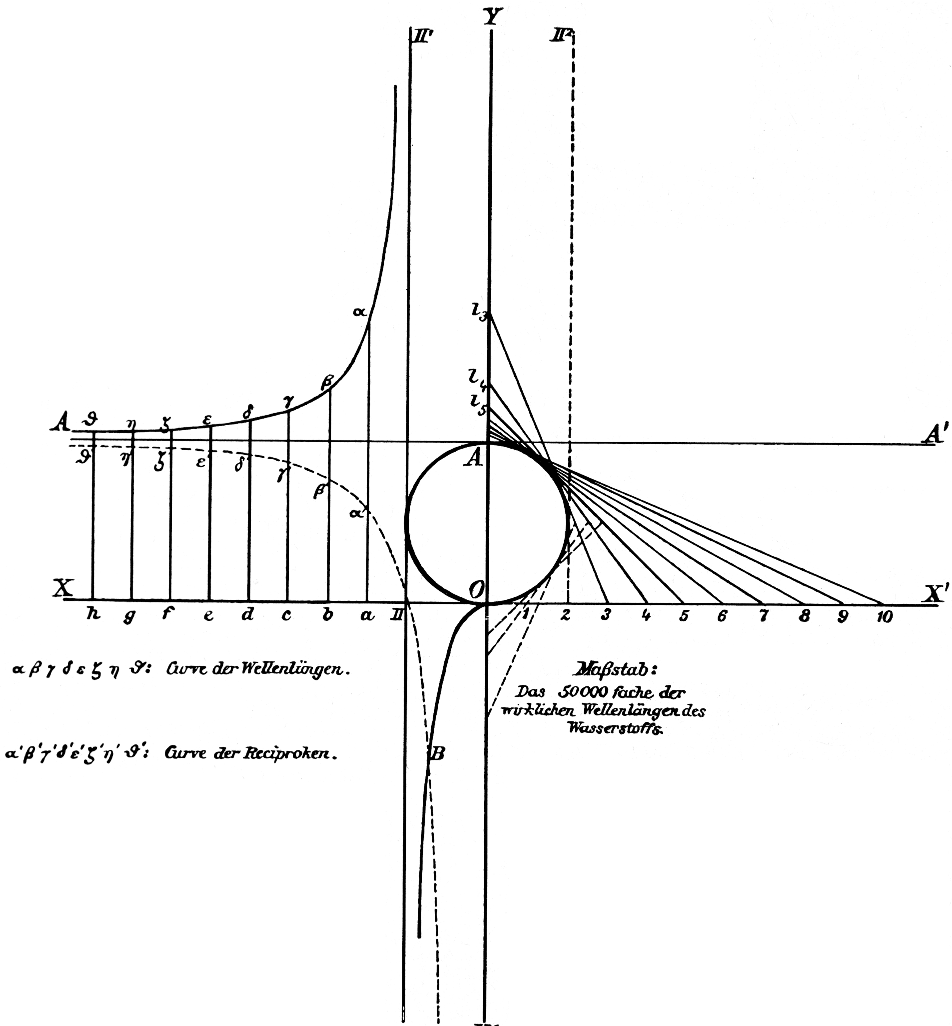
Ugotovil je: „Valovne dolžine štirih vodikovih črt dobimo, če osnovno valovno dolžino 364,56 nm po vrsti pomnožimo s koeficienti 9/5, 4/3, 25/21 in 9/8. Štirje koeficienti očitno ne sestavljajo pravilne vrste, brž ko pa razširiš drugi in četrti koeficient s 4, postane vrsta pravilna: koeficienti imajo v števcu števila 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 in v imenovalcu ustrezna števila, zmanjšana za 4.“ [2] Izračunane valovne dolžine so se po vrsti za +0,03 nm, +0,02 nm, +0,01 nm in −0,01 nm razlikovale od izmerjenih. Odstopanja je bilo mogoče zlahka pojasniti z nenatančnostjo pri merjenju. Tako je bila rojena *Balmerjeva enačba* za valovne dolžine črt *Balmerjeve serije*:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 2^2}\,, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{4}{\lambda_0}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 3,\, 4,\, \ldots \tag{1}$$

V drugi obliki so začeli enačbo uporabljati, ko so spoznali pomen frekvence $\nu = c/\lambda$ in uvedli *terme*. K temu je prispevalo tudi spoznanje Walterja Ritza iz leta 1908, da se v spektru navadno pojavi tudi črta s frekvenco, ki ustreza razliki frekvenc dveh črt. Balmerjevo delo ni teklo tako gladko, kot se morda zdi na prvi pogled. Čeprav so ga vodile jasne zamisli, je moral precej poskušati. V neobjavljenem rokopisu najdemo neuspešen poskus: $6^3\lambda_0' = 686{,}2$ nm, $\frac{5}{2}\cdot 4^3\lambda_0' = 481$ nm, $\frac{1}{7}\cdot 10^3\lambda_0' = 434$ nm, $3^3\cdot 5\lambda_0' = 410{,}1$ nm z manjšo osnovno valovno dolžino $\lambda_0' = 3{,}038$ nm [5]. Pri delu so mu prišle prav izkušnje, ki si jih je pridobil z računanjem razmerij dolžin v načrtih znanih stavb. Oprl se je tudi na geometrijsko konstrukcijo tangent na krog (slika 1).

Balmer je delal osamljen in se sicer ni ukvarjal s spektroskopijo, a je imel na voljo dovolj podatkov, ko jih je potreboval. V enačbo (1) je vstavil $n = 7$ in izračunal valovno dolžino pete črte 396,97 nm na meji ultravijoličnega območja. To se je dobro ujemalo z Ångstrømovim dodatnim izmerkom 396,81 nm. Vogel in Huggins sta izmerila še valovne dolžine petih črt v spektrih zvezd. Balmer jih je pojasnil s svojo enačbo z $n = 8$ do $n = 11$ [2]. Ujemanje je bilo nekoliko slabše, ker pri zvezdnih spektrih niso dosegli Ångstrømove natančnosti.

Balmer je poleg Balmerjeve serije v vodikovem spektru napovedal druge serije črt, če 2^2 v enačbi (1) nadomestimo z n'^2, postavimo $n' = 1, 3, 4, 5, \ldots$ in izbiramo $n > n'$. Zares je Theodore Lyman v letih od 1906 do 1914 opazoval serijo z $n' = 1$ na ultravijoličnem območju. Na infrardečem območju



Slika 1. Balmerjeva konstrukcija valovnih dolžin po njem imenovane spektralne serije [3]. V koordinatnem sistemu x, y narišemo krog s polmerom n' in središčem v točki $(0, n')$. Nanj prislonimo tangento skozi točki $(m, 0)$ in $(0, l_n)$, ki se ga dotika v točki (x_1, y_1). Z enačbo kroga $x^2 + (y - n')^2 = n'^2$ izračunamo smerni koeficient tangente $-x_1/(y_1 - n')$. Ugotovimo, da je $l_n/n = y_1/(n - x_1) = x_1/(y_1 - n')$. Zveza $nx_1 = n'y_1$ pripelje do $x_1 = 2n'^2 n/(n^2 + n'^2)$ in $y_1 = 2n'n^2/(n^2 + n'^2)$ in nazadnje do $l_n = 2n'n^2/(n^2 - n'^2)$. Vstavimo $n' = 2$ in ugotovimo, da je $l_n = 4n^2/(n^2 - 2^2) = 4\lambda/\lambda_0$. Odseki $l_3 = \alpha$, $l_4 = \beta$, … so sorazmerni z valovnimi dolžinami, odseki α', β', … pa z ustreznimi obratnimi vrednostmi. A$'$ podaja mejo serije.

so opazovali Friedrich Paschen leta 1908 serijo z $n' = 3$, Frederick Summer Brackett leta 1922 serijo z $n' = 4$, August Hermann Pfundt leta 1923 serijo z $n' = 5$ in Curtis J. Humphreys leta 1953 serijo z $n' = 6$. Balmerjeva enačba ima značaj izkustvenega zakona. Povzema rezultate poskusov, na katere se poslej ni bilo treba posebej sklicevati. Od teoretične zamisli je bilo dovolj zahtevati, da pripelje do Balmerjeve enačbe.

Johannes Robert Rydberg je leta 1890 za obratno vrednost valovne dolžine črt v vodikovem spektru zapisal enačbo:

$$\frac{1}{\lambda} = R_y\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{2}$$

z *Rydbergovo konstanto* $R_y = 4/\lambda_0 = 1{,}097216 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$, ki se je malo razlikovala od današnje vrednosti $1{,}0967758 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$. Balmer je z enačbo (1) sprožil raziskovanje, ki je pripeljalo tudi do enačb za črte v spektrih drugih elementov. Za nekatere od njih je Rydberg navedel enačbo $1/\lambda = 1/\lambda_m - R_y/(n+\alpha)^2$ z mejo serije λ_m in majhnim parametrom α. Do te enačbe se je Balmer dokopal leta 1896 [4].

Balmerjeva enačba za vodik na prvem mestu periodne preglednice z atomom z enim samim elektronom je postala zelo pomembna. Ernest Rutherford je po sipanju delcev α na kovinskih lističih za velik kot sklepal, da je pozitivni naboj v atomu zbran v jedru, veliko manjšem od atoma. Atom, v katerem se elektroni gibljejo okoli jedra, pa v klasični elektrodinamiki ne bi bil obstojen. Pospešeno se gibajoči elektron bi s sevanjem izgubljal energijo in padel v jedro. Niels Bohr je iskal opis, v katerem bi bili atomi obstojni. Ob tem se je zavedal, da bo moral uporabiti nov prijem. Zgledoval se je po Planckovi zamisli, da stena črnega telesa s sevanjem izmenjuje energijo le v kvantih $W = h\nu$ s Planckovo konstanto h. Privzel je, da je kinetična energija W_k elektrona, ki kroži okoli jedra s frekvenco ν_{kr}, sorazmerna s to frekvenco $W_k = K\nu_{kr}$ in pričakoval, da ima koeficient K velikostno stopnjo Planckove konstante. S to zvezo, ki je v klasični mehaniki ni bilo mogoče utemeljiti, je izrazil kinetično energijo elektrona v približku z zelo veliko maso jedra. Kinetična energija se ujema z negativno polno energijo atoma: $W_k = -W = \pi^2 m e_0^4/(32\pi^2\varepsilon_0^2 K^2)$, če je m masa elektrona in $-e_0$ njegov naboj.

Bohr se je spočetka omejil na osnovno stanje vodikovega atoma, ker je mislil, da je spekter sevanja preveč zapleten, da bi mogel razkriti kaj o zgradbi atoma. Potem je pri pisanju članka o zgradbi atomov zastal. Na začetku leta 1913 se je z Rutherfordovega inštituta v Manchestru vrnil v København. Tam je srečal Hansa Mariusa Hansna, ki je pred tem delal v Göttingenu in se je dobro razumel na spektroskopijo. Pogovor je nanesel na zgradbo atomov in Hansna je zanimalo, ali Bohr s svojimi računi lahko pojasni urejenost spektrov. Bohrovi pripombi, da so spektri za kaj takega preveč zapleteni, je Hansen ugovarjal in omenil Rydbergovo delo, ki ga Bohr ni poznal.

Bohr je pozneje izjavil: „Brž ko sem videl [v knjigi] Balmerjevo enačbo, mi je bilo vse jasno." V kratkem času je dokončal prvi del tridelnega članka *O zgradbi atomov in molekul*, ki je izšel leta 1913 [6]. Energijo izsevanega kvanta je izenačil z razliko energij v začetnem in končnem stanju vodikovega atoma $h\nu = hc/\lambda = W_n - W_{n'}$ in izraz primerjal z enačbo (2). Tako je uvidel, da je $K = \frac{1}{2}hn$ in dobil za energijo:

$$W_n = -\frac{me_0^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2}\,. \tag{3}$$

Sledilo je $cR_y = me_0^4/(64\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3) = 3{,}1 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$, kar se je zadovoljivo ujemalo s tedanjim izmerjenim podatkom $3{,}29 \cdot 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}$. Zvezo $K = \frac{1}{2}hn$ je pojasnil takole: elektronu zelo daleč od jedra ustreza frekvenca kroženja 0, nazadnje pa kroži s frekvenco ν_{kr}, tako da je povprečje $\frac{1}{2}(0 + \nu_{kr}) = \frac{1}{2}\nu_{kr}$. Zvezo $W_k = \frac{1}{2}h\nu_{kr}$ je predelal v enačbo za vrtilno količino elektrona $mvr = n\hbar$. Enačbo je že leto prej zapisal John William Nicholson, katerega delo je vplivalo na Bohra, čeprav je nekatere njegove sklepe odklonil. Razprava o valovnih dolžinah črt v spektru helijevega iona je pokazala, da je treba upoštevati gibanje jedra z maso M in Rydbergovo konstanto $R_{yM} = R_y/(1 + m/M)$. Bohr je s člankom naredil odločilni korak proti kvantni mehaniki. Pri tem se mu ni bilo treba neposredno sklicevati na merjenja valovnih dolžin, saj jih je že v celoti povzela Balmerjeva enačba.

Louis de Broglie je leta 1923 obravnaval svetlobne kvante kot delce z zelo majhno maso. V tem duhu je v posebni teoriji relativnosti gibajočim se elektronom priredil *fazno valovanje* z valovno dolžino $\lambda_B = h/(mv)$ v nerelativističnem približku [7]. Z zahtevo, da je obseg tirnice elektrona v vodikovem atomu cel večkratnik valovne dolžine $2\pi r = n\lambda_B$ – sicer bi se fazno valovanje oslabilo – je utemeljil Bohrovo enačbo za vrtilno količino.

Erwin Schrödinger je leta 1926 odkril kvantnomehanični zakon gibanja kot valovno enačbo za fazno valovanje. Lastne vrednosti energije v tej enačbi za vodikov atom so se ujemala z Bohrovimi energijami. Bohrovo misel o elektronih na diskretnih krožnicah in de Broglievo fazno valovanje je bilo treba opustiti, Bohrove energije vodikovega atoma (3) pa so se natanko ujemale z lastnimi vrednostmi Schrödingerjeve enačbe za elektron v vodikovem atomu ob pogoju, da je lastna funkcija povsod končna in gre v veliki razdalji od jedra proti 0. Pri tem je bilo treba spremeniti pomen števila n in amplitude faznega valovanja. Taka *reinterpretacija* je bila neizogibna, saj bi se sicer Schrödingerjeve lastne energije sploh ne razlikovale od Bohrovih. Bohrovo kvantno število $n = 1, 2, \ldots$, ki je štelo kvante vrtilne količine $\hbar$, je bilo treba reinterpretirati kot Schrödingerjevo kvantno število $n = n_r + l + 1$ s številom vozlov radialnega dela valovne funkcije $n_r = 0, 1, \ldots$ in obhodnim kvantnim številom, to je kvantnim številom velikosti vrtilne količine $l = 0, 1, \ldots$ Po Bohru ima elektron vselej od nič različno vrtilno količino – najmanjšo v osnovnem stanju –, po Schrödingerju pa so pri vseh lastnih energijah mogoča stanja z vrtilno količino 0. Amplitudo faznega valovanja je bilo treba reinterpretirati kot valovno funkcijo. Medtem ko pri valovanju v klasični mehaniki v vsaki točki lahko ugotovimo trenutno fazo, je pri kompleksni kvantnomehanični valovni funkciji (globalna) faza popolnoma nedoločena. Kot so pokazali interferenčni poskusi z elektroni in drugimi delci, pa je mogoče opazovati razliko faz.

Schrödingerjeve lastne energije so se prek Bohrove in de Broglieve enačbe skladale z Balmerjevo enačbo, tako da se Schrödingerju ni bilo treba sklicevati neposredno na merjenja. Interferenčni poskusi z elektroni in drugimi delci so enačbo podprli pozneje.

Ali sta s stališča Schrödingerjeve kvantne mehanike Bohrov model in de Broglievo fazno valovanje zgrešena? Ugotovimo lahko le, da sta bila po tedanjih kriterijih to uporabna opisa pojavov v naravi, ki jih nekateri imajo za „pojasnjevalne približne resnice“, podobno kot pri Fresnelovih enačbah [8]. Kriteriji pa so se spremenili, ko je staro kvantno mehaniko, ki je gradila na klasični mehaniki z nekaterimi dodatnimi privzetki, nadomestila dosledna teorija – kvantna mehanika Schrödingerja ter Wernerja Heisenberga, Maxa Borna in Pascuala Jordana.

LITERATURA

[1] L. Hartmann, *Johann Jakob Balmer*, Phys. Blätter **5** (1949), str. 11–14.

[2] J. J. Balmer, *Notiz über die Spektrallinien des Wasserstoffs*, Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel **7** (1884), str. 548–560; Annalen der Physik und Chemie **25** (1885), str. 80–87.

[3] J. J. Balmer, *Zweite Notiz über die Spektrallinien des Wasserstoffs*, Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel **8** (1885), str. 750–752.

[4] J. J. Balmer, *Eine neue Formel für Spektralwellen*, Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel **11** (1896) 448; Annalen der Physik und Chemie **60** (1897), str. 380–391.

[5] L. Banet, *Evolution of the Balmer series*, Am. J. Phys. **34** (1966) 6, str. 496–503; *Balmer's Manuscripts and the Construction of His Series*, Am. J. Phys. **38** (1970) 7, str. 821–828.

[6] J. Strnad, *Atomski model Nielsa Bohra*, Obzornik mat. fiz. **33** (1986) 3/4, str. 109–117.

[7] J. Strnad, *De Broglievo valovanje*, Obzornik mat. fiz. **31** (1984) 5/6, str. 151–163.

[8] J. Strnad, *O Fresnelovem etru*, Obzornik mat. fiz. **54** (2007) 4, str. 125–132.

MEDNARODNO LETO ASTRONOMIJE 2009

Po mednarodnem letu matematike 2000 in fizike 2005 so Združeni narodi 20. decembra 2007 naravoslovje počastili še z razglasitvijo leta 2009 za mednarodno leto astronomije (MLA). Pokrovitelj MLA je UNESCO. MLA obeležuje 400. obletnico prvih Galilejevih astronomskih opazovanj s teleskopom. To leto je globalna proslava astronomije in njenih prispevkov naši družbi in kulturi, z velikim poudarkom na izobraževanju in vključevanju širše javnosti ter predvsem mladih ljudi, z dogodki na nacionalni, regijski in svetovni ravni skozi celo leto. V ta namen so bila po več kot 100 državah ustanovljena nacionalna spletišča, naše najdete na naslovu `http://www.astronomija2009.si/` (vabljeni k ogledu). Preko teh spletišč je vzpostavljeno sodelovanje med profesionalnimi in amaterskimi astronomi, znanstvenimi središči in znanstvenimi „komunikatorji“, z željo da se poveča znanstveno ozaveščenost širše javnosti, promovira dostop do splošnega znanja temeljnih znanosti preko vznemirljivosti astronomije in neposrednih opazovanj neba, podpira in izboljša izobraževanje, prikaže moderno sliko znanosti in znanstvenikov, okrepi povezave med amaterskimi astronomi, učitelji, znanstveniki in novinarji ter pospeši ohranjanje in varovanje svetovne kulturne in naravne dediščine temnega neba.

Za dosego teh ciljev so v MLA tekli in še tečejo projekti, kot so:

100 ur astronomije. To so bila javna opazovanja po vsem svetu, ki so potekala med 2. in 5. aprilom v živo in tudi s prenosom z velikih svetovnih observatorijev. V 100 urah „sprehajanja“ po nebu, naj bi čim več ljudi izkoristilo priložnost, da pogleda skozi teleskop in vidi to, kar je videl Galileo pred 400 leti. Tudi v Sloveniji so astronomska društva, krožki in observatoriji v tem času organizirali javna opazovanja.

400 let teleskopa je multimedijski projekt praznovanja prvih Galilejevih opazovanj vesolja s teleskopom.

Astronomija in svetovna dediščina. Glavni namen te iniciative, ki so jo začeli UNESCO in Mednarodna astronomska zveza je vzpostaviti povezavo med znanostjo in kulturo na temelju raziskav, s katerimi bi se močneje zavedli kulturnega in znanstvenega pomena zgodovinskih predmetov in stavb, povezanih z astronomijo.

Astronomija v šolah je celoletna akcija, v katero naj bi bilo vključeno čim več mladih. V okviru te akcije bodo potekale zanimive igre in vaje z astronomsko vsebino, ki jih lahko vzgojitelji in učitelji vključijo v redno delo, naravoslovne dni, krožke, ipd.

Astronomija v vrtcih – Zavedanje vesolja je mednarodni program, ki želi zelo majhnim otrokom približati razsežnost in lepoto vesolja. Zato so ob mednarodnem letu astronomije tudi za predšolske otroke, njihove starše in vzgojitelje pripravljene ideje za igre in dejavnosti, ki se lahko izvajajo doma ali v vrtcu.

Astronomka je! Projekt spodbuja enakost spolov v astronomiji tako, da nudi internetno platformo z nevtralnimi informacijami in povezavami o enakosti spolov in drugih s tem povezanih uporabnih virov. Tej temi so namenjene tudi spletne strani, kjer astronomke predstavljajo svoje karierne poti, določene vidike svojega privatnega življenja in težave, na katere naletijo v svojih profesionalnih življenjih in med izobraževanjem, predvsem tiste, ki so v kontekstu enakosti spolov. Kot del programa prostovoljnih ambasadorjev se profesionalni astronomi pogovarjajo s študentkami v srednjih in višjih šolah in na univerzah v bližini krajev, kjer živijo in delajo.

Dnevi odprtih vrat. V okviru MLA nekateri observatoriji omogočajo oglede observatorija in pogled skozi teleskop. Pri nas se lahko prijavite za obisk na Astronomskem observatoriju Golovec in Observatoriju Zaplana.

Galileoskop. Da bi čim več ljudem omogočili pogled skozi teleskop, so organizatorji pripravili preprost, cenovno dostopen daljnogled, podoben Galilejevemu. Teleskop je naprodaj brez dobička. Uporabniki ga sestavijo sami ter pri tem spoznajo osnovno zgradbo teleskopov. Omogoča opazovanje neba tako, kot ga je videl Galileo Galilei pred 400 leti. Teleskop si lahko ogledate in ga naročite na `https://www.galileoscope.org/`.

Globalni razvoj astronomije. Projekt je osredotočen na razvoj treh ključnih področij: profesionalno, splošno ter izobraževalno na območjih, kjer astronomska skupnost še ni močno razvita. Izvedba sloni na izobraževanju, razvoju in mreženju v vsakem od treh naštetih ključnih področij. Ta projekt pomaga vzpostaviti in okrepiti regionalne strukture in mreže, ki delujejo na področju razvoja astronomije po svetu.

Jupitrovi Galilejevi sateliti. V tem projektu ste vabljeni, da se priključite mednarodni mreži opazovalcev medsebojnih mrkov in okultacij Jupitrovih Galilejevih satelitov, ki so mogoča le vsakih šest let, saj mora biti na Jupitru enakonočje. Tovrstna opazovanja so mogoča celo z majhnimi teleskopi. Obenem bodo podobni pojavi vidni tudi med Saturnovimi lunami, toda njihovo opazovanje je težje, saj jih je mogoče videti le z večjimi teleskopi.

Kozmični dnevnik. Cilj kozmičnega dnevnika je predstaviti ljudi, ki stojijo za to znanostjo. Profesionalni astronomi pišejo krajše tekste in pošiljajo slike o svojem življenju, družinah, prijateljih, hobijih in drugih svojih zanimanjih kot tudi o njihovem delu, njihovih zadnjih raziskavah in odkritjih ter izzivih, s katerimi se srečujejo med raziskovanjem. To so predstavniki astronomov in astronomk z vseh koncev sveta. Pišejo v mnogih različnih jezikih in prihajajo s petih različnih celin. Zunaj observatorijev, laboratorijev in pisarn so to glasbeniki, starši, fotografi, športniki in amaterski astronomi. Na delu pa so to vodje, opazovalci, študentje, načrtovalci projektov, konstruktorji instrumentov in analizatorji podatkov. Kozmični dnevnik bo osnova za knjigo in dokumentarec, ki bosta izšla kot zapuščina tega projekta.

Nebo je nad tabo. Odkrij ga! Ozvezdja so namišljene povezave med svetlimi zvezdami in z vsakim ozvezdjem je povezana najmanj ena prastara legenda. Glavna zamisel akcije „Nebo je nad tabo. Odkrij ga!“ je ta, da otroci svetle zvezde povežejo v svoja ozvezdja, ki predstavljajo njihove domišljijske like, in napišejo z njimi povezano kratko zgodbico. Otroci to delajo v manjših skupinah, da se lahko pogovarjajo o nebu, zvezdah in vesolju. Tako se spodbuja njihova radovednost in zanimanje za astronomijo. Obenem pa uporabljajo in razvijajo ustvarjalnost in domišljijo.

Od Zemlje do vesolja. Ta temeljni projekt naj bi predstavil najlepše astronomske slike širšim množicam na netradicionalnih krajih. V Sloveniji je organizirana potujoča razstava astronomskih fotografij, ki so izbrane med najlepšimi svetovnimi posnetki profesionalnih observatorijev, vesoljskega teleskopa Hubble in ljubiteljskih astronomov, med katere so vključene tudi najboljše fotografije slovenskih astronomov. Razstava v letu 2009 potuje po Sloveniji po šolah, muzejih, knjižnicah, galerijah, ipd.

Portal k vesolju. Spletno mesto z astronomsko vsebino na naslovu `http://www.portaltotheuniverse.org/` služi kot zbirno središče vsega, kar je povezano z astronomijo.

Program Galileo za izobraževanje učiteljev Do leta 2012 naj bi po vsem svetu ustvarili mrežo Galilejevih ambasadorjev, ki bodo poučevali t.i. Galilejeve učitelje, ti pa naj bi na čimbolj zanimiv način vključili astronomske vsebine v pouk fizike, matematike, kemije in tudi drugih predmetov.

Svet ponoči – Eno človeštvo, eno nebo. Pri tem projektu bomo ustvarili in prikazali imenitne fotografije in video posnetke najlepših novodobnih in zgodovinskih mest ponoči na ozadju zvezdnega neba.

Zavedanje pomena temnega neba. Danes se pogosto premalo zavedamo, kako škodljivo in povrhu še potratno je prekomerno osvetljevanje. Na predavanjih bo predstavljen pomen temnega neba, nove tehnike osvetljevanja urbanih področij ter povezanosti zdravja in ekosistema.

MLA se je že skoraj na pol izteklo in čas je, da si ogledamo, kaj je bilo v okviru dejavnosti narejenega. V Sloveniji smo leto začeli s slavnostno otvoritvijo pod pokroviteljstvom predsednika republike dr. Danila Türka. Na otvoritvi smo slišali predavanja:

- prof. dr. Massimo Calvani – o Galileju
- prof. dr. Andrej Čadež – o pomenu astronomije
- prof. dr. Tomaž Zwitter – o sodobni profesionalni astronomiji
- Tone Špenko – o ljubiteljski astronomiji

Otvoritev MLA 2009 v Sloveniji (foto: Andrej Guštin)

Predstavljene so bile tudi ključne akcije MLA, za glasbeni del programa pa je poskrbel Zoran Predin.

Do sedaj so potekale že mnoge dejavnosti od organiziranih opazovanj po vsej Sloveniji, dnevov odprtih vrat observatorijev, astronomskih spoznavnih večerov, astronomskih naravoslovnih noči, razstav astrofotografij in astronomskih pripomočkov, delavnic o rokovanju s teleskopom do predavanj s pisano paleto tem, od uporabe sončne ure z analemo do pojavov na pomladnem nočnem nebu. V začetku maja steče akcija risanja novih ozvezdij – „Nebo je nad tabo. Odkrij ga!“. V dogovoru z založbo Mladinska knjiga akcija poteka pod okriljem mladinskega naravoslovnega mesečnika Moj planet. K akciji so vabljene osnovne šole, društva, zavodi in domovi. Za izvedbo projekta ni potrebna dobra astronomska oprema. Rok za oddajo del je 12. junij 2009! Poleg tega tečejo projekti astronomija za otroke in mladino in na spletu lahko najdete gradivo za vaje. Na spletu se zbirajo tudi utrinki iz vrtcev. S projektom NEBO PONOČI ocenjujemo svetlobno onesnaženje v Sloveniji. MLA je naletelo na odziv tudi v širšem krogu. Tako je Telekom Slovenije v počastitev MLA izdal serijo šestih telekartic. Na MŠŠ so se odločili za sofinanciranje nakupa astronomske opreme v višini do 550 EUR na šolo. O MLA so se razpisali tudi v medijih – od tiskanih, preko radia televizije do spletnih časopisov in forumov.

Vse aktivnosti in utripe pa lahko ažurno spremljate na že omenjenem spletnem naslovu `http://www.astronomija2009.si/`.

Aleš Mohorič

PETNAJSTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Kot že vrsto let se je tudi v letu 2008 ekipa Fakultete za matematiko in fiziko udeležila mednarodnega tekmovanja študentov matematike. Tokrat so se s študenti z vsega sveta pomerili Špela Špenko iz drugega letnika, Sara Kališnik iz tretjega letnika ter Kris Stopar in Nik Stopar iz četrtega letnika. Prvič je svojega zastopnika na to tekmovanje poslala tudi Univerza na Primorskem, študenta prvega letnika Petra Muršiča.

Tekmovanje je tudi letos zraslo, tako po številu sodelujočih držav kot po številu študentov; kar 283 študentov je zastopalo 90 različnih univerz. Mnoge univerze pripeljejo dokaj številne ekipe, saj pravila, da vsaka univerza tekmuje s štirimi študenti, že nekaj let ni več. Tako je na primer iz Zagreba prišlo kar enajst tekmovalcev. Uveljavlja se tudi rangiranje univerz glede na najboljše tri dosežke, kar seveda favorizira ekipe z več študenti.

Naše ekipe se vsako leto uvrščajo nekako v zlato sredino. Tudi letos je bilo tako. Špela Špenko in Nik Stopar sta osvojila tretjo nagrado, Sara Kališnik in Kris Stopar pa pohvalo. Prav tako je pohvalo dobil Peter Muršič.

Glede na to, da mnoge univerze organizirajo posebne priprave ter izbore tekmovalcev (mi pa ne), ta uspeh ni zanemarljiv. V posebnem točkovanju univerz smo dosegli 34. mesto.

Poleg tekmovanja je velik poudarek na druženju študentov. Predsednik žirije John E. Jayne je posebej pozval k preseganju dnevnih političnih delitev. Kot primer je navedel, da kljub temu da je Francija leta 1066 napadla Anglijo, vseeno rad pokramlja s kakšnim Francozom. V študentskem domu je bilo ves čas živo, še posebej po drugem tekmovalnem dnevu, ko je (glasna) zabava trajala pozno v noč. Domačini so sicer rekli, da imajo od vseh gostov še najraje nas matematike, ker jim naredimo najmanj škode na inventarju.

Če je za študente dobro poskrbljeno (oziroma jim je omogočeno, da sami dobro poskrbijo zase), je zgodba pri vodjih ekip deloma drugačna. Izbiranje tekmovalnih nalog je zelo mukotrpen proces, pri katerem se pokažejo tudi politične delitve (na algebraike in analitike). Še slabše je pri ocenjevanju izdelkov, kjer ni dovolj nadzora nad samim procesom. Predsednik žirije je recimo v dveh dneh ocenjevanja v dvorano vstopil le dvakrat, ko nas je napodil spat in zaklenil vrata. Tega mu sicer nismo zamerili, saj se po desetih urah ocenjevanja v dvorani brez svežega zraka pri več kot 35 °C preleže polurni sprehod po spečem Blagoevgradu. Zaradi slabih razmer se veliko vodij ekip temu delu odreče, kar nujno pomeni več zabave za tiste, ki imajo dovolj čuta dolžnosti. Pisec teh vrstic je tako v dveh dneh imel čast oceniti in skoordinirati ocene okoli 200 izdelkov. Presenetljivo (ali pa morda tudi ne) so na koncu rezultati kar objektivni, vsaj tako je splošno subjektivno mnenje udeležencev.

Še nekaj besed o Blagoevgradu, kjer so tekmovanje gostili že četrtič. Mesto je zagotovo eno lepše urejenih v Bolgariji, za kar je delno zaslužna Ameriška univerza, ki ima tam sedež (v stavbi, kjer je pred leti imela sedež komunistična partija). Prav tako se pozna pritok evropskih sredstev, najbolj očitno na pred kratkim zgrajenih avtocestah. Kljub evropeizaciji se življenjski utrip na splošno ni kaj dosti spremenil, nekateri bi ob tem verjetno omenjali polotok, na katerem leži Bolgarija in njene sosednje države.

Leta 2009 bo tekmovanje v Budimpešti. Organizatorjem iz Minska, ki je bil prvi kandidat, namreč ni uspelo zagotoviti namestitve s tekočo vodo.

Oblika tekmovanja je enaka vse od začetka. Študenti dva dni po pet ur rešujejo po šest nalog. Vsak dan je prva naloga lahka in bi jo morali rešiti res skoraj vsi, naslednje tri naj bi bile srednje težavnosti, zadnji dve pa sta po navadi zelo težki. Letos komisiji ni uspelo dobro oceniti težavnosti nalog, študenti so imeli namreč prvi dan občutek, kot da rešujejo le pete in šeste naloge. Tako so bili rezultati prvega dne skoraj katastrofalni – morda je kdo pomislil, da bi test morali ponavljati. Drugi dan se je stanje normaliziralo. Oglejmo si nekaj nalog skupaj z njihovimi rešitvami. Naloge so označene po dnevih in zaporednih številih. Tako je II.3. tretja naloga drugega dne (in je bila verjetno najlažja med vsemi), II.1. je prva naloga drugega dne in je prav tako lahka (a morda malce težja od prve predstavljene), I.6. pa je zadnja naloga prvega dne in je težka. Tokrat je sicer kot najtežja obveljala naloga I.5., kjer je bil povprečen rezultat 0,2 točke od 20 možnih. Vsi trije zmagovalci so popolnoma rešili 11 nalog, pri tej pa vsi dobili ničlo.

II.3. Naj bo n naravno število. Dokažite, da je število

$$\sum_{0\le k<n/2} \binom{n}{2k+1} 5^k$$

deljivo z 2^{n-1}.

Rešitev. Če srednješolec vidi nalogo z okvirnim besedilom „dokažite, da za vsak n velja …“, verjetno pomisli na indukcijo. V tem primeru to ni prava pot. Bolje se je spomniti binomskega izreka

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Ker pa v izrazu v nalogi manjkajo lihi členi, se jih moramo znebiti. Zapišemo še

$$(-a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$$

ter izraza odštejemo, da dobimo

$$(a+b)^n - (-a+b)^n = 2 \sum_{0\le k<n/2} \binom{n}{2k+1} a^{2k+1} b^{n-2k-1}.$$

Da bi desna stran postala izraz iz naloge, ustrezno izberemo a in b.

$$(\sqrt{5}+1)^n - (-\sqrt{5}+1)^n = 2\sqrt{5} \sum_{0\le k<n/2} \binom{n}{2k+1} 5^k$$

oziroma

$$\sum_{0\leq k<n/2}\binom{n}{2k+1}5^k=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}\,.$$

Dobljeni izraz nas mora spomniti na splošni člen Fibonaccijevega zaporedja. Velja namreč, da ima rekurzivno podano zaporedje $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ z začetnima členoma $F_1 = F_2 = 1$ splošni člen enak

$$F_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\,.$$

Tako velja

$$\sum_{0\leq k<n/2}\binom{n}{2k+1}5^k=2^{n-1}F_n$$

in naloga je rešena.

II.1. Dokažite, da če za celi pozitivni števili k in n polinom $x^{2k} - x^k + 1$ deli polinom $x^{2n} + x^n + 1$, tudi polinom $x^{2k} + x^k + 1$ deli polinom $x^{2n} + x^n + 1$.

Rešitev. Ker vsak polinom lahko zapišemo kot produkt linearnih polinomov (nekateri med njimi so seveda lahko kompleksni), polinom h deli polinom g, če je vsaka kompleksna ničla polinoma h hkrati tudi ničla polinoma g. Tako naloga pravzaprav zahteva, da določimo (nekatere) ničle navedenih polinomov. Označimo $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$, $g(x) = x^{2k} - x^k + 1$ in $h(x) = x^{2k} + x^k + 1$. Dokazati moramo, da če je vsaka ničla polinoma g tudi ničla f, so potem tudi ničle h ničle f. Poti do rešitve je seveda več. Predstavimo zanimivo rešitev, ki uporabi le eno ničlo polinoma $g(x)$. Lahko bi tudi okarakterizirali vse ničle vseh treh polinomov in jih primerjali med seboj ali pa poiskali vse pare celih števil k in n, za katere g deli f, ter tiste pare k in n, za katere h deli f, ter spet izvedli primerjavo. A dela bi bilo tako več.

Ker imajo opazovani polinomi precej kompleksnih ničel, bo potrebnega nekaj računanja s kompleksnimi števili. Izkaže se, da je za začetek dovolj poiskati eno ničlo polinoma $g(x)$. Opazimo, da je $g(x)(x^k + 1) = x^{3k} + 1$. Ničle polinoma $g(x)$ so torej rešitve enačbe $x^{3k} + 1 = 0$, ki niso hkrati tudi rešitve $x^k+1 = 0$. Recimo, $x_1 = \cos\frac{\pi}{3k} + i\sin\frac{\pi}{3k}$ je ena izmed ničel polinoma $g(x)$. Naj bo $\alpha = \frac{n\pi}{3k}$. Ker $g(x)$ deli $f(x)$, je x_1 ničla polinoma $f(x)$. Tako velja

$$0 = x_1^{2n} + x_1^n + 1 = (\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)) + (\cos\alpha + i\sin\alpha) + 1\,.$$

Ker je $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ in $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, lahko zgornji izraz razstavimo:

$$\begin{aligned}(\cos^2\alpha \;-\; &\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha) + (\cos\alpha + i\sin\alpha) + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \\ &= 2\cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha + (\cos\alpha + i\sin\alpha) = \\ &= (2\cos\alpha + 1)(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,.\end{aligned}$$

Ker drugi faktor ne more biti enak 0, sledi, da je $2\cos(\alpha) + 1 = 0$. Zaključimo, da je $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi c$ za neko celo število c.

Izberimo sedaj eno izmed ničel polinoma $h(x)$ in jo označimo z x_0. Podobno kot za polinom g za h velja, da je $h(x)(x^k - 1) = x^{3k} - 1$, kar pomeni, da je $x_0 = \cos\frac{2\pi s}{3k} + i\sin\frac{2\pi s}{3k}$ za $s = 3t \pm 1$, $t \in \mathbb{Z}$. Izračunajmo sedaj $f(x_0)$. Velja

$$\begin{aligned}f(x_0) &= x_0^{2n} + x_0^n + 1 = \cos(4s\alpha) + i\sin(4s\alpha) + \cos(2s\alpha) + i\sin(2s\alpha) + 1 = \\ &= \cos^2(2s\alpha) - \sin^2(2s\alpha) + 2i\sin(2s\alpha)\cos(2s\alpha) + \\ &\quad + \cos(2s\alpha) + i\sin(2s\alpha) + \cos^2(2s\alpha) + \sin^2(2s\alpha) = \\ &= 2\cos^2(2s\alpha) + \cos(2s\alpha) + 2i\sin(2s\alpha)\cos(2s\alpha) + i\sin(2s\alpha) = \\ &= (2\cos(2s\alpha) + 1)(\cos(2s\alpha) + i\sin(2s\alpha))\,.\end{aligned}$$

Sedaj določimo vrednost prvega faktorja:

$$\begin{aligned}2\cos(2s\alpha) + 1 &= 2\cos\left(2s\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi c\right)\right) + 1 = 2\cos\frac{4s\pi}{3} + 1 = \\ &= 2\cos\frac{4(3t \pm 1)\pi}{3} + 1 = 2\cos\frac{4\pi}{3} + 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0\,.\end{aligned}$$

Tako je $f(x_0) = 0$ oziroma vsaka ničla polinoma $h(x)$ je hkrati tudi ničla polinoma $f(x)$, to pa smo želeli dokazati.

Mimogrede, obratna trditev ne velja, saj lahko vzamemo $n = k$ in potem h deli f, g pa ne. Trditev ne velja niti, če se omejimo na $k < n$, saj je recimo $x^{10} + x^5 + 1 = \big(x^2 + x + 1\big)\big(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1\big)$.

I.6. Za permutacijo σ števil 1, 2, …, n definiramo $D(\sigma) = \sum\limits_{k=1}^{n} |\sigma(k) - k|$. S $Q(n,d)$ označimo število permutacij σ števil od 1 do n, za katere velja $D(\sigma) = d$. Dokažite, da je za $d \geq 2n$ število $Q(n,d)$ sodo.

Rešitev. Kot se spodobi za rešitev težke naloge, začnemo z objekti, ki na prvi pogled nimajo zveze z nalogo. Tokrat je to determinanta, ki jo označimo z

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-1} \\ x & 1 & \cdots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Na ij-tem mestu v matriki je element $x^{|i-j|}$. Ko računamo $\Delta(x)$ po definiciji determinante, dobimo

$$\Delta(x) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} x^{D(\sigma)}, \tag{1}$$

kjer je S_n množica vseh permutacij n elementov, $\mathrm{sgn}(\sigma)$ pa predznak permutacije. Člen $x^{D(\sigma)}$ dobimo kot produkt $\prod_{k=1}^{n} x^{|\sigma(k)-k|}$ in s tem vidimo zvezo med Δ in D.

Recimo, da je $Q(n,d)$ sodo število. To pomeni, da v vsoti (1) člen x^d nastopa sodokrat, nekajkrat pomnožen s $+1$ in nekajkrat z -1. Vsota koeficientov je v vsakem primeru soda. Podobno razmislimo, da če je število $Q(n,d)$ liho, je tudi koeficient pri x^d v $\Delta(x)$ lih. Tako moramo za dokončanje naloge dokazati, da je za $d \geq 2n$ koeficient pri x^d v $\Delta(x)$ sod.

Izračunajmo $\Delta(x)$. V ta namen vsaki (razen prvi) vrstici matrike odštejemo x-krat prejšnjo vrstico. Tako dobimo matriko, ki ima pod diagonalo same ničle:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ 0 & 1-x^2 & \cdots & x^{n-3}-x^{n-1} & x^{n-2}-x^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-x^2 & x-x^3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x^2 \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)^{n-1}.$$

Koeficienti pri x^d so za $d \geq 2n-1$ enaki 0 in so sodi, torej je sodo tudi število $Q(n,d)$.

Lepota tega tekmovanja je tudi v tem, da študenti vedno najdejo kakšno alternativno rešitev. Tudi v tem primeru je bilo tako, a uradna rešitev, predstavljena tu, je nekajkrat krajša od čiste kombinatorične rešitve.

Kot zanimivost naj navedem še najtežjo nalogo skupaj z njeno „rešitvijo“.

I.5. Ali obstaja končna grupa G s podgrupo edinko H, da je $|\mathrm{Aut}\ H| > |\mathrm{Aut}\ G|$?

Rešitev. Da. Na primer za G in H lahko vzamemo podgrupi simetrične grupe S_6, G generirano z (135)(246) in (12), H pa z (12), (34) in (56). Seveda je treba preveriti, ali je avtomorfizmov na H več kot na G, pa tudi, da je H edinka v G. Bralce vabim, da to poskusijo storiti sami.

Gregor Šega

STROKOVNA EKSKURZIJA IN SINDIKALNI IZLET V OKOLICO TRSTA

Ogled sinhrotrona, raziskovalnega parka in geološkega inštituta

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter Sindikat Fakultete za matematiko in fiziko vabita svoje člane v soboto, 6. junija 2009, na strokovno ekskurzijo z ogledom Tržaškega sinhrotrona ELETTRA v Bazovici, nekaj laboratorijev v Raziskovalnem parku (AREA DI RICERCA) v Padričah ter Oceanografsko-geofizikalnega inštituta (OGS) v Briščikih.

Program izleta:

8:00	zbor pred FMF
8:15	odhod iz Ljubljane z avtobusom
9:15	ogled naprav OGS na letalu v Divači
10:00	ogled OGS v Briščikih
11:00	sprehod v Briškovsko jamo (Grotta Gigante) z ogledom geofizikalnih merilnih naprav
12:40	ogled laboratorija Mednarodnega centra za genetski inženiring in biotehnologijo (ICGEB) v Raziskovalnem parku
15:00	ogled sinhrotrona
17:00	kosilo na kmečkem turizmu Petelin v Pliskovici
19:15	odhod z avtobusom proti Ljubljani

Najem avtobusa poravnata društvo in sindikat, kosilo pa plača vsak sam (približno 12 EUR + pijačo). Vstopnin ne bo, razen morda v jami. Za obisk jame priporočamo športno obutev. Ker bo kosilo (zakuska) pozno, priporočamo, da vzamete s seboj sendvič in pijačo.

Ker je število mest omejeno, se prijavite čim prej, najpozneje do petka, 29. maja 2009, na naslov: `Mitja.Rosina@ijs.si` (predmet: TRST) in pri tem navedite točno število udeležencev.

Prisrčno vabljeni tudi družinski člani!

Mitja Rosina

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi k sodelovanju na strokovnem srečanju in 61. občnem zboru, ki bosta 6. in 7. novembra 2009 v hotelu Golf na Bledu.

Vodilni temi letošnjega strokovnega srečanja sta dve. Fiziki se bomo posvetili **astronomiji**, saj je letošnje leto razglašeno za mednarodno leto astronomije. Matematiki pa bomo govorili o **uporabi didaktičnih pripomočkov pri pouku** in njihovem vplivu na razumevanje in znanje. V ospredju bodo seveda teme, ki so vezane na konkretno uporabo pri pouku.

Svoje izkušnje in novosti z omenjenih področij lahko predstavite:

- s prispevkom (20–30 minut, lahko tudi krajšim)
- s posterjem

Na voljo bodo grafoskop, projekcijsko platno in videoprojektor za prenos slike z računalnika. Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesti s seboj ali pa se morajo o tem poprej dogovoriti (sporočiti Janezu Krušiču).

Prosimo vas, da nam prispevke z izbrano temo pošljete **do 10. septembra 2009** na naslov `Janez.Krusic@fmf.uni-lj.si`. Prijave morajo vsebovati:

- naslov prispevka
- ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen, oziroma domači naslov in elektronski naslov
- kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12 pt naj ne presega pol strani A4)

Izjemoma lahko pošljete prijavo tudi po navadni pošti na naslov: **Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Janez Krušič, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana**. V tem primeru morate dodati zapis tudi v elektronski obliki (disketa, CD, DVD).

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora.

Ob letošnjem občnem zboru bomo pripravili tudi **13. slovensko srečanje o uporabi fizike** in **3. slovensko srečanje matematikov raziskovalcev**. Vsa obvestila v zvezi z občnim zborom in strokovnim srečanjem bomo sproti objavljali na domači strani DMFA `http://www.dmfa.si/`.

Predsednik DMFA Slovenije:
prof. dr. Janez Seliger

3. SLOVENSKO SREČANJE MATEMATIKOV RAZISKOVALCEV
Hotel Golf, Bled, 6. in 7. november 2009

Že tretje leto zapored bomo ob občnem zboru DMFA Slovenije pripravili srečanje matematikov, ki raziskovalno delujejo doma ali v tujini. Ker društvo letos praznuje **60-letnico delovanja**, se bodo nekaterih dogodkov predvidoma udeležili tudi visoki državni predstavniki.

Strokovni del srečanja bo predvidoma potekal v petek, 6. novembra, v naslednjih sklopih:

- **sveže** (kratke predstavitve novih doktorskih disertacij iz matematike ali sorodnih področij);
- **uporabno** (predstavitve rezultatov s področja uporabne matematike, statistike in interdisciplinarnih projektov z gospodarstvom);
- **visokošolsko** (predstavitve novih študijskih programov, učbenikov, pedagoških pristopov, izvedenih ali načrtovanih poletnih šol, študentskih tekmovanj, natečajev, ...);
- **odmevno** (promocija in napovedi odmevnejših mednarodnih dosežkov – publikacij, patentov, dogodkov, ...);
- **razno** (različni strokovni in znanstveni prispevki)
- **letna seja Slovenskega odbora za matematiko**.

V okviru občnega zbora DMFA Slovenije bosta potekala še slavnostna akademija ob 60-letnici društva in strokovno srečanje za učitelje matematike in fizike v osnovnih in srednjih šolah.

Vabimo vas k sodelovanju s svojimi prispevki. Predstavitev bo mogoča tudi na daljavo (z internetno zvočno povezavo in prosojnicami), zato lahko aktivno sodelujete, tudi če ste v času srečanja v tujini. Za **predprijavo** nam **do 1. septembra 2009** na e-naslov `raziskovalna.mat@dmfa.si` sporočite podatke avtorja ter okvirno vsebino prispevka. Rok za **oddajo povzetkov** pa je **9. oktober 2009**. Natančnejše informacije o programu in namestitvi bodo na voljo v drugi polovici oktobra.

Predvidena kotizacija za udeležbo je 50 EUR (25 EUR za člane DMFA) oziroma 20 EUR za študente, ki niso v rednem delovnem razmerju (10 EUR za študente, člane DMFA).

V upanju na uspešno sodelovanje vas lepo pozdravljava.

Boštjan Kuzman in Emil Žagar

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAREC 2009
Letnik 56, številka 2
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici je število π na prvih nekaj deset tisoč decimalnih mest natančno (glej članek na strani 41).