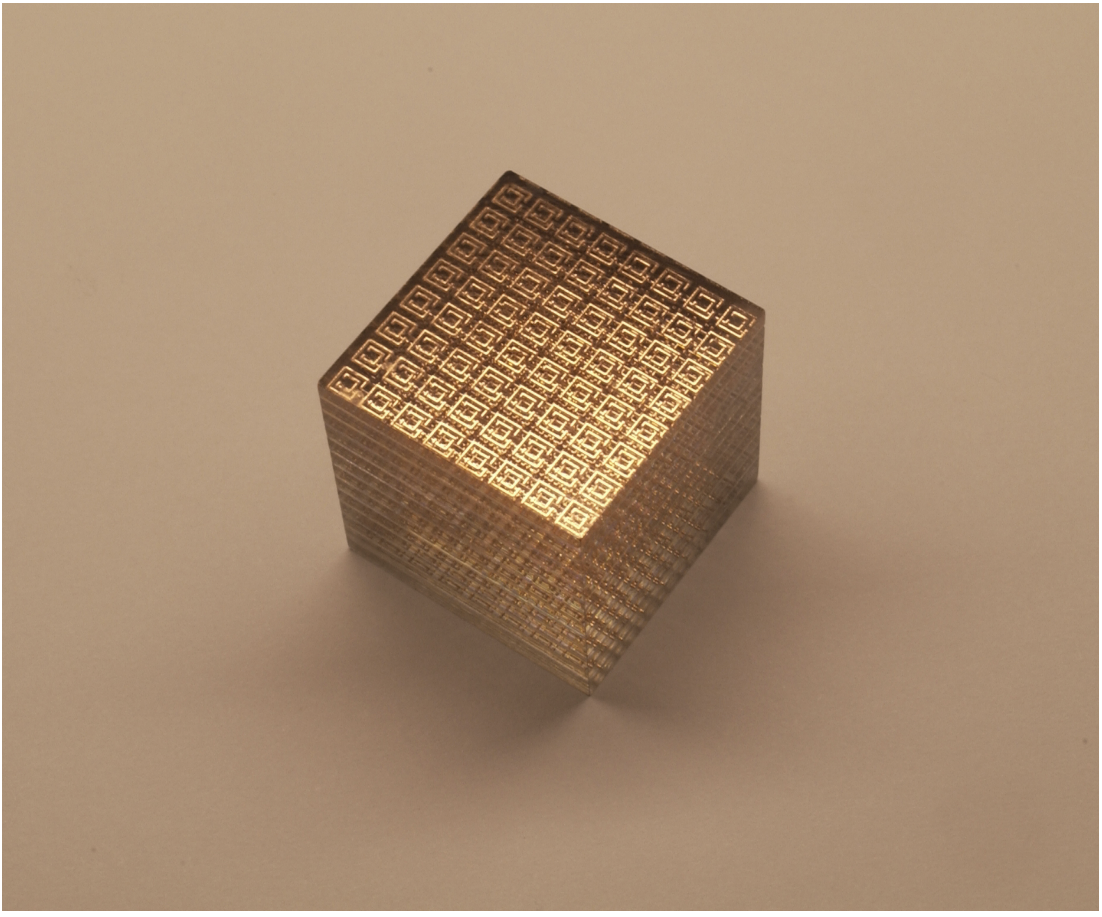
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2008
Letnik 55
5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 55 • ŠT. 5 • STR. 161–200 • SEPTEMBER 2008

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2008, letnik 55, številka 5, strani 161–200

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21,00 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 33,38 EUR, za tujino 30,00 EUR. Posamezna številka za člane stane 4,18 EUR, stare številke 2,17 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

HUYGENSOVA NALOGA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 26E60

V prispevku bomo elementarno, brez uporabe diferencialnega računa, rešili Huygensovo nalogo.

THE HUYGENS PROBLEM

The Huygens problem is solved in an elementary way, without using the differential calculus.

Holandski matematik, fizik in astronom Christiaan Huygens (1629–1695) je pri študiju centralnih trkov idealno prožnih kroglic najprej obravnaval centralni trk dveh kroglic. Kroglica z maso M s hitrostjo v_0 trči v mirujočo kroglico z maso m, pri čemer je $m < M$. Po trku naj ima kroglica z maso M hitrost u, druga kroglica pa hitrost v. Huygens je poznal zakon o ohranitvi gibalne količine in zakon o ohranitvi kinetične energije, kar bi danes zapisali v obliki:

$$Mv_0 = Mu + mv\,, \quad \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

Iz prve enačbe izrazimo hitrost u in jo vstavimo v drugo enačbo. Za hitrosti kroglic dobimo izraza:

$$v = \frac{2M}{M+m}v_0\,, \quad u = \frac{M-m}{M+m}v_0\,.$$

Zaradi pogoja $0 < m < M$ dobimo relacijo $v_0 < v < 2v_0$.

Med kroglici postavimo n drugih idealno prožnih kroglic, ki imajo po vrsti mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$, pri čemer je $m < m_1 < m_2 < \ldots < m_n < M$. Kroglica z maso M naj s hitrostjo v_0 trči v mirujočo kroglico z maso m_n. Po trku le-ta s hitrostjo $v_n = 2Mv_0/(m_n + M)$ trči v kroglico z maso m_{n-1}, ki ima po trku hitrost $v_{n-1} = 2m_nv_n/(m_{n-1} + m_n)$. Ta potem trči v mirujočo kroglico z maso m_{n-2}. Tako gredo trki naprej, dokler nazadnje kroglica z maso m_1 ne trči v mirujočo kroglico z maso m, ki se odbije s hitrostjo v. Očitno je hitrost slednje dana s formulo:

$$v = \frac{m_1m_2\cdots m_nM}{(m+m_1)(m_1+m_2)\cdots(m_{n-1}+m_n)(m_n+M)} \cdot 2^{n+1}v_0\,.$$

Huygens se je vprašal, kakšne morajo biti mase $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$, da bo hitrost v zadnje odbite kroglice največja. Videli bomo, da se to zgodi takrat, ko so mase $m < m_1 < m_2 < \ldots < m_n < M$ v geometričnem zaporedju s kvocientom $q = \sqrt[n+1]{M/m}$.

V matematični analizi pa bi Huygensovo nalogo zastavili v naslednji obliki.

1. Bodita a in b poljubni pozitivni števili, pri čemer je $a < b$. Poišči pozitivna števila $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pri katerih funkcija $u\colon \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$, podana s predpisom

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{(a + x_1)(x_1 + x_2) \cdots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}\,, \tag{1}$$

doseže maksimum. Problem najdemo v zbirki [2] v skupini nalog na temo ekstremov funkcij več spremenljivk in naj bi se reševal z uporabo parcialnih odvodov.

V primeru $n = 1$ seveda vzamemo

$$u(x_1) = \frac{x_1}{(a + x_1)(x_1 + b)}\,.$$

V Huygensovih časih verjetno takih nalog še niso reševali z odvodi. Znani pa so že bili binomski koeficienti, le da jih še niso pisali v današnji obliki. Blaise Pascal (1623–1662) jih je razvrstil v svoj trikotnik, ki pa so ga poznali nekateri matematiki že veliko prej. Pierre de Fermat (1601–1665) je poznal potrebni pogoj za ekstrem odvedljive funkcije v jeziku tangent na njen graf in Isaac Newton (1643–1727) je razvil svoj infinitezimalni račun fluent in fluksij. Zato se nekoliko vživimo v tiste čase, ko je bil diferencialni račun še v povojih, in rešimo Huygensov problem povsem elementarno, brez uporabe parcialnih odvodov.

V ta namen bomo najprej dokazali neenakost, ki nam bo hitro dala željeni rezultat. Pri tem si bomo pomagali z dobro znano neenakostjo med aritmetično in geometrično sredino pozitivnih števil. Naj bo n naravno število in $a_1, a_2, \ldots, a_n$ poljubna pozitivna števila. Izraz

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$$

imenujemo aritmetična, izraz

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

pa geometrična sredina števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Vselej velja neenakost

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq A(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{2}$$

v kateri enačaj nastopi, če in samo če je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

2. Lotimo se sedaj neenačbe, s katero bomo rešili Huygensovo nalogo.

Naj bo n naravno število in $u_1, u_2, \ldots, u_n$ poljubna pozitivna števila. Dokazali bomo, da velja neenakost

$$(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n) \geq \bigl(1 + G(u_1, u_2, \ldots, u_n)\bigr)^n, \tag{3}$$

v kateri nastopi enačaj, če in samo če je $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$.

Najprej razvijemo izraz na levi strani (3) in dobimo:

$$(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} s_k(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Pri tem so s_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, osnovni simetrični polinomi spremenljivk $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$\begin{aligned} s_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ s_2(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= u_1u_2 + u_1u_3 + \cdots + u_{n-1}u_n, \\ &\vdots \\ s_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= u_1u_2\cdots u_n. \end{aligned}$$

Kot vemo iz osnov kombinatorike, ima s_1 natanko $n = \binom{n}{1}$ členov, s_2 natanko $\binom{n}{2}$ členov, v splošnem je vsak člen v s_k produkt k faktorjev, torej je s_k vsota natanko $c(n,k) = \binom{n}{k}$ monomov $a_i = a_i(s_k)$. Za njihovo aritmetično sredino dobimo enakost

$$s_k = c(n,k)A(a_1, a_2, \ldots, a_{c(n,k)}).$$

Hitro lahko ugotovimo, da katerakoli izbrana spremenljivka u_r nastopa v s_k natanko $c(n-1, k-1)$-krat. To je tolikokrat, na kolikor načinov lahko izmed preostalih $n-1$ spremenljivk $u_1, u_2, \ldots, u_n$ brez u_r izberemo $k-1$ spremenljivk. Zato lahko izrazimo geometrično sredino monomov $a_i = a_i(s_k)$, ki sestavljajo s_k:

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_{c(n,k)}) = (a_1a_2\cdots a_{c(n,k)})^{\frac{1}{c(n,k)}} = (u_1u_2\cdots u_n)^{\frac{c(n-1,k-1)}{c(n,k)}}.$$

Sedaj uporabimo neenakost (2) za vsak s_k posebej. Dobimo neenakost

$$s_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geq c(n,k)(u_1 u_2 \cdots u_n)^{m(n,k)}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n$. Pri tem je $m(n,k) = c(n-1, k-1)/c(n,k)$.

Ker pri pogojih $n \geq 1$ in $k \geq 1$ velja

$$m(n,k) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n}\,,$$

pri čemer vzamemo $0! = 1$ in zato $c(0,0) = 1$, dobimo v splošnem neenakost

$$s_k(u_1, u_2, \ldots, u_n) \geq c(n,k)(u_1 u_2 \cdots u_n)^{k/n} = \binom{n}{k}(G(u_1, u_2, \ldots, u_n))^k.$$

Kdaj v pravkar dokazani relaciji velja enačaj? Natanko tedaj, ko je $a_1 = a_2 = \ldots = a_{c(n,k)}$ za vsak s_k, $k \geq 1$. Za s_1 se to zgodi, če in samo če je $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$. Prav tako za preostale s_k.

Tako smo našli

$$(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \big(G(u_1, u_2, \ldots, u_n)\big)^k$$

in z upoštevanjem binomske formule nazadnje iskano neenakost

$$(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n) \geq \big(1 + G(u_1, u_2, \ldots, u_n)\big)^n.$$

Damo ji lahko tudi naslednjo obliko:

$$G(1+u_1, 1+u_2, \ldots, 1+u_n) \geq 1 + G(u_1, u_2, \ldots, u_n)\,.$$

Enačaj pa v njej velja samo v primeru $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$.

Enakost z binomskimi koeficienti

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1},$$

ki smo jo izpeljali z izračunom števil $m(n,k)$, lahko interpretiramo popolnoma kombinatorično, kot je to narejeno v [1]. Recimo, da izmed n oseb izberemo k oseb za neki odbor, nekdo od teh pa bo njegov predsednik. Na koliko načinov je to možno narediti? Odbor je možno sestaviti na $\binom{n}{k}$ načinov, predsednika v njem pa na k načinov, torej lahko odbor s predsednikom naredimo na $k\binom{n}{k}$ načinov. Lahko pa ravnamo tudi takole: najprej izberemo predsednika, kar lahko naredimo na n načinov. Druge člane odbora, teh je $k-1$, pa izbiramo med preostalimi $n-1$ osebami. To lahko naredimo na $\binom{n-1}{k-1}$ načinov, torej odbor s predsednikom lahko izberemo na $n\binom{n-1}{k-1}$ načinov. Ker po obeh postopkih dobimo isto število, res velja zgornja enakost.

3. Neenakost (3) bomo sedaj še nekoliko posplošili. Vzemimo pozitivna števila a_1, a_2, …, a_n in b_1, b_2, …, b_n ter postavimo $u_1 = a_1/b_1$, $u_2 = a_2/b_2$, …, $u_n = a_n/b_n$. Neenakost (3) nam da:

$$\left(1+\frac{a_1}{b_1}\right)\left(1+\frac{a_2}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{b_n}\right) \geq \left(1+G\left(\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\ldots,\frac{a_n}{b_n}\right)\right)^n,$$

iz česar dobimo po preureditvi neenakost:

$$G(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) \geq G(a_1, a_2, \ldots, a_n) + G(b_1, b_2, \ldots, b_n)\,. \quad (4)$$

V njej pa enačaj nastopa natanko tedaj, ko sta vrstici $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ in $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ proporcionalni.

Neenačba (3) je brez dokaza navedena v [5], splošnejšo neenačbo (4) pa razvije Krečmar v [4] popolnoma drugače.

Neenakost (4) lahko korak za korakom posplošimo. Naj bodo namreč a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n in c_1, c_2, …, c_n sama pozitivna števila. Tedaj velja neenakost

$$\begin{aligned} &G(a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2, \ldots, a_n+b_n+c_n) \geq \\ &\quad \geq G(a_1, a_2, \ldots, a_n) + G(b_1, b_2, \ldots, b_n) + G(c_1, c_2, \ldots, c_n)\,. \quad (5)\end{aligned}$$

Enačaj v njej pa velja natanko tedaj, ko so vrstice $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ in $[c_1, c_2, \ldots, c_n]$ proporcionalne.

4. Postrezimo s preprostim primerom. V Krečmarjevi zbirki problemov [4] je tudi tale naloga:

Dokaži, da za poljubna pozitivna števila x, y in z velja neenakost:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz\,.$$

Kdaj v njej velja enačaj?

V zbirki je ta naloga rešena drugače. Uporabimo lahko neenakost (4) za $n = 3$ in

$$a_1 = x\,,\ a_2 = y\,,\ a_3 = z\,,\ b_1 = y\,,\ b_2 = z\,,\ b_3 = x\,.$$

Dobimo

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z)(z+x) &= (G(x+y, y+z, z+x))^3 \geq \\ &\geq (G(x,y,z) + G(y,z,x))^3 = (2\sqrt[3]{xyz})^3 = 8xyz\,,\end{aligned}$$

kar je bilo treba dokazati.

Enakost velja samo v primeru $x/y = y/z = z/x = \lambda$. To pomeni: $x = \lambda y$, $y = \lambda z$, $z = \lambda x$. Če vse te tri enačbe med seboj zmnožimo, dobimo $xyz = \lambda^3 xyz$, kar pomeni $\lambda = 1$ in s tem $x = y = z$.

5. Da bi laže poiskali maksimum funkcije (1), si oglejmo funkcijo

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{(a + x_1)(x_1 + x_2) \cdots (x_{n-1} + x_n)(x_n + b)}{x_1 x_2 \cdots x_n b}\,, \tag{6}$$

ki je obratna vrednost funkcije u, deljena z b zaradi lažjega računanja. Poiskali bomo minimum funkcije v in s tem maksimum funkcije u. Da bi lahko uporabili neenakost (3), zapišemo:

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(1 + \frac{a}{x_1}\right)\left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)\left(1 + \frac{x_n}{b}\right).$$

V zgornjem izrazu je $n + 1$ faktorjev. Sedaj lahko uporabimo neenakost (3) za spremenljivke

$$u_1 = \frac{a}{x_1}\,,\ u_2 = \frac{x_1}{x_2}\,,\ \ldots\,,\ u_n = \frac{x_{n-1}}{x_n}\,,\ u_{n+1} = \frac{x_n}{b}\,.$$

Takoj vidimo, da je njihova geometrična sredina enaka

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}) = \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}\,,$$

zato iz (3) sledi

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq \left(1 + \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}\right)^{n+1} = \frac{\left(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+1]{b}\right)^{n+1}}{b}\,.$$

Iz zveze $bu(x_1, x_2, \ldots, x_n)v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ končno dobimo

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \frac{1}{\left(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+1]{b}\right)^{n+1}}\,.$$

Sedaj bomo pokazali, pri katerem izboru spremenljivk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je v zgornji neenakosti enačaj. Takrat namreč funkcija u doseže svoj maksimum. Od prej vemo, da enačaj nastopi samo v primeru $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u_{n+1}$, oziroma natanko tedaj, ko sta proporcionalni vrstici

$$[x_1, x_2, , \ldots, x_n, b]\,, \quad [a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]\,,$$

kar pomeni, da obstaja tako pozitivno število q, za katero je

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{x_1} = \ldots = \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{b}{x_n} = q\,.$$

Iz teh relacij dobimo:

$$x_1 = aq\,,\ x_2 = x_1 q = aq^2,\ \ldots\,,\ x_n = x_{n-1}q = aq^n,\ b = aq^{n+1}.$$

Ker je $0 < a < b$, je $q > 1$ in

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b\,.$$

Nazadnje lahko ugotovimo, da števila $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$ sestavljajo naraščajoče geometrično zaporedje s kvocientom $q = \sqrt[n+1]{b/a}$. Torej doseže funkcija u svoj maksimum v točki $(aq, aq^2, \ldots, aq^n)$ prostora $\mathbb{R}^n_+$, in ta maksimum je enak $1/\left(\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+1]{b}\right)^{n+1}$. S tem smo rešili Huygensovo nalogo v celoti.

Zahvaljujem se profesorju Ivanu Puclju, ki me je opozoril na Huygensovo nalogo.

LITERATURA

[1] A. T. Benjamin in J. J. Quinn, *Proofs that really count, The art of combinatorial proof*, MAA, 2003.

[2] B. P. Demidovič, *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu*, Nauka, Moskva 1972.

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood in G. Pólya: *Inequalities*, Academic Press, Cambridge 1952.

[4] V. A. Krečmar, *Zadačnik po algebre*, Fizmatgiz, Moskva 1961.

[5] D. S. Mitrinović in D. Mihailović, *Linearna algebra, analitička geometrija, polinomi*, Građevinska knjiga, Beograd 1962.

VESTI

OB 80. OBLETNICI ROJSTVA FRANCETA KRIŽANIČA

Slovenski mislec, naravoslovec in matematik, profesor France Križanič se je rodil 3. marca 1928 v Mariboru, umrl pa je 17. januarja 2002 v Ljubljani. Šolal se je v Mariboru, Apačah ter v Ljubljani. Čeprav je večino svojega življenja preživel v našem glavnem mestu, je vselej rad poudarjal, da se počuti Štajerca. Matematiko je študiral na tedanji Prirodoslovno-matematični fakulteti Univerze v Ljubljani, kjer je leta 1951 diplomiral, leta 1955 pa doktoriral. V letih 1959 in 1960 se je izpopolnjeval v Moskvi pri znamenitem profesorju Gelfandu. Za rednega profesorja je bil izvoljen na Univerzi v Ljubljani leta 1975.

Naštejemo lahko celo vrsto uradnih ter neuradnih obveznosti in funkcij profesorja Križaniča. Med drugim je bil dvakrat predsednik Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter dekan tedanje Fakultete za naravoslovje in tehnologijo. Pomembno je prispeval k oblikovanju sedanjega Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko ter sodeloval pri snovanju podiplomskega študija matematike v Ljubljani in pri nastanku smeri tehnična matematika kot prvega nepedagoškega študija matematike na Univerzi v Ljubljani in sploh na Slovenskem.

Profesor Križanič je širši javnosti najbolj znan po svojih srednješolskih matematičnih učbenikih, ki jih je napisal v začetku šestdesetih let. Ob njih so zrasle mnoge generacije slovenskih gimnazijcev in po njih še zmerom radi segajo nekateri gimnazijski profesorji. Nekoliko manj sreče je imel z drugo generacijo svojih učbenikov, ki je bila po mnenju nekaterih naših profesorjev preveč revolucionarna in so potem kmalu utonili v pozabo.

Med največje zasluge profesorja Križaniča gotovo sodi uvajanje novih matematičnih področij in z njimi povezanih drugih področij v slovensko znanost. Že v petdesetih letih je začel uvajati seminarje, ki so se jih pogosto poleg matematikov udeleževali tudi fiziki in raziskovalci drugih področij, ne samo s Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, temveč tudi s Fakultete za elektrotehniko, Strojne fakultete ter z Instituta Jožef Stefan. Na teh seminarjih so študirali nova področja matematike, funkcionalno analizo, topološke grupe, diferencialne operatorje, komutativne Banachove algebre in aproksimativne metode.

Veda o ustroju in delovanju elektronskih računalnikov je bila ena najpomembnejših novosti, ki jih je prinesel k nam. Tako je leta 1960, takoj po vrnitvi iz Moskve, izšlo v Knjižnici Sigma prvo delo na to temo v Sloveniji, *Elektronski aritmetični računalniki*, v kateri je profesor Križanič približal tedanje stanje tega področja slovenski zainteresirani javnosti. V tistih časih je bilo treba veliko znanja in iznajdljivosti pri programiranju teh okornih računskih strojev. Mnogi med nami smo takrat iz te knjige prvič izvedeli, kako ti stroji zares delujejo in zakaj je bilo tako pomembno poznati binarni princip zapisa števil. Razvoj področja računalništva in informatike je skokovit in dandanašnji deluje informacijska tehnologija tako kompleksno, da nam pogosto za razumevanje njenega delovanja ni več treba poznati vseh podrobnosti. Tudi programiranje se ne ukvarja več s podrobnim opisom „del in nalog“, ki naj jih računalnik opravi, temveč prevladuje objektno programiranje, ki izhaja iz podatkovnih struktur. Težišče je na projektiranju aplikacije kot skupine objektov, ki medsebojno sodelujejo z izmenjavo sporočil. Seveda pa se vsaka še tako dolga in strma pot, kot pravi kitajska modrost, začne s prvim korakom.

Opisana knjižica pomeni prvi zgodovinski korak v smer računalništva in informatike na Slovenskem, hkrati pa je le del literature, ki jo je ustvaril profesor Križanič. Le njegovi sodobniki morda danes še pomnijo, da se je v mladosti ukvarjal celo z leposlovjem. Menda naj bi v starih časih v NUK-u imeli celo dve kartici z njegovim imenom in priimkom, na eni je bil zapisan kot pesnik, na drugi kot matematik. Njegov talent literata se je razmahnil predvsem v poljudnoznanstvenih delih, kot sta *Kratkočasna matematika* (1951) in *Križem po matematiki* (1960). Pa tudi v kasnejših resnih univerzitetnih učbenikih je razvijal izviren, sočen in duhovit izraz, tako v nasprotju z dotlej uveljavljenim togim in resnim pisanjem matematičnih tekstov. Kdo od matematikov ne pomni njegove *Linearne algebre in linearne analize* (1969), *Navadnih diferencialnih enačb in variacijskega računa* (1974) ter *Linearne analize na grupah* (1982). Kot učbeniki so to prave mojstrovine, ob katerih so zrasle cele generacije matematikov.

V kasnejših delih se je vse bolj usmerjal v fiziko, saj je nanjo gledal kot na nedeljivi del matematike. Njegova stara ljubezen do računalnikov se je spet pokazala, ko se je naučil jezika TeX za pisanje matematičnih besedil in opisnega jezika PostScript za izdelavo risb ter postal eden vodilnih strokovnjakov tega jezika v Sloveniji. Sam je napisal in uredil nekatere svoje monografije v celoti. V številnih člankih za Obzornik za matematiko in fiziko je prikazoval nova področja matematike, pisal o pouku matematike, predstavljal sodelavce ob njihovih življenjskih jubilejih, recenziral knjige, nekatere članke pa je tudi prevedel.

Tesno povezana z njegovim osebnim literarnim slogom je tudi njegova terminologija. V precejšnji meri odstopa od ustaljene, ki pogosto suženjsko posnema anglo-latinsko izrazje. Včasih je šel v iskanju osebne note po mnenju marsikoga korak predaleč. Ko je na primer iskal primeren prevod izraza „intertwining operator“, se je ob ruskem vzoru „spletajuščisja operator“ odločil, da gre še korak dlje in hudomušno uporabil izraz „spletična“. Ko smo ga poslušali na predavanjih, so nam iz njegovih ust taki in podobni termini zveneli naravno. Ko pa smo kasneje sami predavali to snov, se je le malokdo odločil za kak tako slogovno obarvan prevod. Po drugi strani pa na primer vsi, ki cenimo slovenjenje, uporabljamo za teorijo, v kateri nastopajo spletične, raje Križaničev prevod „upodobitve grup“ kot anglo-latinski polprevod „reprezentacije grup“. Tudi če se torej ne bodo ohranili prav vsi njegovi termini, pa bo vseeno njegov prispevek k slovenski matematični terminološki zakladnici velik.

V enem svojih govorov je profesor Križanič povedal:

„Tovariši, naivno se motite prvič: nisem znanstvenik, nisem strokovnjak, prav nič globokoumnega ni v meni. Četudi bi – ponevedoma – v misel zabredel, priobčiti bi je ne znal.

Tovariši, naivno se motite drugič: naša teorijska misel ni v škripcih. Cvete. Zavzemamo se in izpostavljamo upoštevajoč, moralni smo. Odločilo bo gospodarstvo, uporabnik, tako kot je hotel Platon. Bog var, da čevlje sodil bi kopitar.

Da ni vse rožnato, je kriva majhna pegica na našem občestvu, učitelj še vedno obremenjuje naše gospodarstvo. Pa ne bo dolgo, le še malo, našel bo obljubljeno repišče, nam vsem v nemajhen ponos in rodovom za zgled: leto 4000 bomo dosegli dva tisoč let pred rokom.

Tudi tretjič ste se zmotili: to se ni za smejat, to se je za zjokat.“

Toda motimo se, pa najsi bomo tovariši ali gospodje, če verjamemo njegovi skromni izjavi, da ni bil znanstvenik in ne strokovnjak. In še bolj se motimo, če verjamemo, da ni bilo v njem prav nič globokoumnega. In tudi tretjič se motimo in najbolj od vsega, če verjamemo, da ne bi znal priobčiti misli, pa čeprav bi ponevedoma zabredel vanjo. Prav nasprotno, profesor Križanič je bil vse to in najbolj od vsega slovenski matematični pisatelj.

Mislim da je prav, da posebej izpostavim njegovo javno delovanje v času šolske reforme „usmerjenega izobraževanja“, ko se je v razpravo večkrat polemično vključil z govori, katerih odlomke v univerzitetnih krogih včasih še danes citirajo. Med najbolj znanimi njegovimi citati je misel o klečeči univerzi: *„Univerze nimamo več in bolje je, da je ni. Klečeča in molčeča univerza je nacionalna sramota, sramota zase in sramota za tistega, pred katerim kleči in molči.“* In čeprav nam zveni njegov jezik danes nekoliko arhaično, je njegova misel še prav tako živa, kot je bila takrat. Mar ni tudi danes pred nami visokošolska reforma, pred katero so vse evropske univerze pokleknile, tako kot so pokleknile takrat univerze neke zdaj že pokojne države. Mnoge podrobnosti so drugačne, nekatere pa nas še preveč spominjajo na tiste čase, od dvostopenjskega študija do usmerjenosti programov v večjo uporabnost. Ali ni torej vzklik *„Bog var, da čevlje sodil bi kopitar“* spet na mestu?

Mar ni tudi danes zdrsnil delež sredstev, ki ga v naši državi namenjamo znanosti in visokemu šolstvu, med najnižje v Evropi? Ob tem, ko kvalitetnim in mednarodno uveljavljenim univerzam dohodek realno in celo nominalno zmanjšuje, taista država ustanavlja nove in nove univerze ter vanje usmerja že tako skromna sredstva. In medtem ko se vse več sredstev zliva v privatne univerze, pošilja država državne univerze po denar k privatnikom. Ali ni torej primerjava s Tavčarjevim letom 4000 in učiteljevim repiščem spet na mestu?

Odkar se je profesor Križanič poslovil od nas, pogrešamo predvsem njegovo duhovitost, ki nam je razsvetlila prenekateri dan. Že ob njegovi 70-letnici sem za časopis Delo napisal nekaj besed o njegovem življenju in delu. Takrat je bil že v pokoju, a je še vedno prihajal na fakulteto; in ko me je prvič po tistem srečal, se je hudomušno nasmejal in me ošvrknil, da sem članek napisal preveč „niz dlako“.

Za zaključek je morda najbolj primeren njegov tekst, ki, kolikor vem, ni bil nikoli objavljen. Gre za prijavo profesorja Križaniča za ponovno izvolitev v naziv rednega profesorja, potem ko je eden od zakonov rednim profesorjem odvzel nazive.

„Naziv rednega profesorja mi bo ugasnil, nikdar se nisem potegoval zanj, učiteljski poklic pa sem na našem TOZD z veseljem opravljal. Prav rad bom delo z njim še naprej združeval, če me seveda še potrebuje. In če se res ne da delati brez naziva, naj mi katerega dodeli, vseeno katerega.

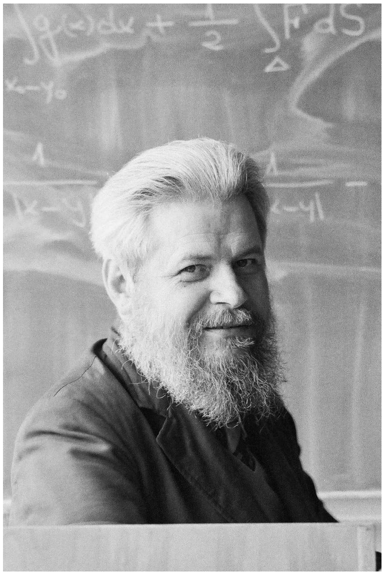
Če pa Svet TOZD Matematika in mehanika sodi, da je moje delo končano, ali pa sem po merilih kakorkoli neustrezen, naj me mirne duše preusmeri.“

Matjaž Omladič

NEKAJ SPOMINOV NA FRANCETA KRIŽANIČA

Leta 1964 sem se vpisal na II. (Šubičevo) gimnazijo v Ljubljani. Matematiko me je učila Marija Milenkovič, temperamentna in zavzeta profesorica, navdušena za novosti. Uporabljali smo povsem nove učbenike *Aritmetika, algebra in analiza I–III* Franceta Križaniča. Knjige so bile sveže, intelektualno spodbudne. (Nekaterim sošolcem pa je delal težave abstraktni začetek s kolobarji in obsegi.) Posebno všeč so mi bile aplikacije: linearno programiranje, naravna rast, enačba Ciolkovskega … Knjige so izstopale med našimi učbeniki in ime Križanič nas je fasciniralo.

Sošolec Andrej Detela je prišel nekega dne z novico, da profesor Križanič ob določenem času hodi vzdolž Rimskega zidu. In res sva tam pričakala bradatega moža. Andrej ga je fotografiral (kot je že prej na skrivaj med urami fotografiral večino naših gimnazijskih profesorjev). Profesor je to opazil in se radovedno ozrl na naju. Morda bi mu bilo všeč, če bi vedel, da je bila fotografija narejena z aparatom *Smena 8* iz zdaj kultne leningrajske tovarne *LOMO*.



Pozneje, v drugem ali tretjem letniku gimnazije, sem se udeleževal predavanj za srednješolce. Profesor Križanič je govoril o matematični indukciji, verižnih ulomkih in diofantskih enačbah. Žal sem se hitro izgubil v snovi, ki je bila sicer očitno zanimiva. Tudi enemu od drugih poslušalcev ni bilo vse jasno in je poskušal z vprašanjem. Sicer prijazni profesor je ponovil tisto, kar nam ni delalo težav. Nekako nismo mogli vzpostaviti pravega stika. Na mojo matematično samozavest ta izkušnja ni delovala najbolje.

Sredi mojega obiskovanja gimnazije je naša profesorica matematike (ponovno) odšla učit v Afriko in s tem smo se žal poslovili tudi od Križaničevih učbenikov. Sem pa sam po Križaničevi knjigi *Vektorji, matrike, tenzorji* iz Knjižnice Sigma preštudiral vektorski račun. K temu me je spodbudilo zvezno matematično tekmovanje za srednješolce, na katerem me je teplo neznanje te snovi. Knjižica mi je bila všeč; vsebovala je primere, ni pa bilo vaj.

V drugem letniku univerze smo matematiki skupaj s fiziki pri Križaniču poslušali celoletni tečaj *Diferencialne enačbe* (tri ure predavanj, dve uri vaj na teden). Kot literaturo nam je profesor navedel knjige [1, 2, 3, 4] in za vaje [5]. (Navajam zadnje izdaje in angleške prevode ruskih originalov, če obstajajo.) Za drugi semester pa nam je svetoval kak učbenik matematične fizike. Že prvo uro nas je profesor Križanič vprašal: *Ali ste se že začeli učiti? Če ne, je že prepozno.* Lahko rečem, da je bilo opozorilo umestno, saj sem se zelo hitro „izgubil“ v snovi. Predavanja so bila na zelo visokem nivoju, predavatelj stvari ni ponavljal, kak račun ali dokaz nam je prepustil za domačo nalogo. Kot profesorja Ivan Vidav in Niko Prijatelj (in verjetno še kdo drug od naših takratnih učiteljev) je profesor Križanič predaval na pamet, brez zapiskov. (Kot mi je potrdil profesor Anton Suhadolc, je France Križanič imel izreden spomin.) Vsaj deloma je vodil tudi vaje. Še danes rad študentom povem njegov rek: *Diferencialne enačbe delimo na dva tipa: tiste, ki jih* *znamo rešiti, in tiste, ki nastopajo v praksi.* Poseben vtis je name naredila elegantna obravnava problema dveh teles, vključno z izpeljavo Keplerjevih zakonov. Za pisni izpit je po pripovedovanju starejših kolegov veljalo, da klasični ortogonalni polinomi ne pridejo v poštev. Če je že prišel kak robni problem, ga je bilo mogoče rešiti z nekaj iznajdljivosti. Na mojem izpitu žal ni bilo tako. Kakorkoli sem se loteval diferencialne enačbe, ki je prišla iz Fourierove metode, ni šlo. Profesor Križanič je prišel mimo, opazoval moj brezplodni trud in končno tiho rekel: „Ali ne spoznate Laguerra?“ Takrat sem prvič videl, kakšno zlato srce ima profesor Križanič. Tudi sicer po mojih izkušnjah v primeru, ko ga je kdo prizadel, ni skušal vrniti milo za drago. Zanimivo je, da se je znal v pogovoru zelo hitro in duhovito odzvati, a teh svojih sposobnosti ni izkoriščal za to, da bi prevladal. Vsekakor pa je iskrivost njegovega duha vzbujala spoštovanje pri sogovornikih.

V poletnem semestru drugega letnika nam je profesor Križanič predaval *Višjo algebro*. Z vektorji v evklidskem prostoru, determinantami in deloma matrikami nas je zelo učinkovito seznanil že višji predavatelj Milan Ziegler v prvem letniku. Križaničev kurz je začel z enačbami tretje in četrte stopnje. Dokaz osnovnega izreka algebre je imenoval *Dama s psičkom* (po znani noveli A. P. Čehova), saj je uporabljal indeks (ovojno število) krivulje, ki se ne oddalji preveč od neke krožnice. Sledile so kvadratne matrike, končno razsežni vektorski prostori in linearni operatorji nad njimi, lastne vrednosti, unitarni in evklidski prostori, spektralna teorija za normalne operatorje, ploskve drugega reda in vztrajnostni moment sistema masnih točk. Nato smo vzeli funkcije matrik, Jordanovo formo, tenzorsko algebro (vključno s konvolucijo ali, po njegovo, *pregibom*, tenzorskim in zunanjim produktom). Tenzorji so bili za nas precej težak zalogaj, saj ni bilo pravih zgledov in vaj. Na koncu se je profesor vrnil k polinomom, vpeljal rezultanto dveh polinomov, diskriminanto in dokazal Sturmov izrek o številu realnih ničel polinoma z realnimi koeficienti. Vse to smo naredili v dveh urah predavanj in uri vaj na teden v enem semestru. Spomnim se, da mi je po pisnem izpitu pokazal eno nalog v mojem izdelku, zmajal z glavo in obrnil dlan. Sklepal sem, da bi matriko v rezultatu moral še transponirati. Vseeno mi je dal 10.

V višjih letnikih in pozneje sem se udeleževal popoldanskih četrtkovih postdiplomskih seminarjev, na katerih je predaval tudi France Križanič, med drugim o funkcijah več kompleksnih spremenljivk. Po seminarju smo imeli čaj in piškote. Ti seminarji so nekako združevali oddelek. Nanje so prihajali tudi nekateri fiziki in celo profesor Ludvik Gyergyek s Fakultete za elektrotehniko. (Gyergyekov predmet *Vezja in servomehanizmi* smo poslušali tudi študenti tehnične matematike. Tradicijo četrtkovih druženj je po mnogih letih zdaj obudil Tomaž Pisanski.)

Profesor Križanič je tudi sicer rad preštudiral kaj novega in to znanje delil z drugimi. Posebno veselje pa je imel s prevodi tujih izrazov. Kot poznavalec besedne umetnosti je znal uporabiti tudi bolj arhaične besede. Novi termini so nas včasih presenetili. Tako v Vektorjih, matrikah, tenzorjih govori o *izprijenih* ploskvah drugega reda. Marsikateri duhoviti izum se je obdržal.

V prvem letniku tretje stopnje (1972/73) nam je profesor Križanič predaval *Topološke in Liejeve grupe*. Prvi del tega kurza je verjetno imel prvič in mi je bil prav všeč.

Kmalu potem, ko sem leta 1977 doktoriral, mi je profesor Križanič predlagal, da prevzamem kurz matematike za biologe, sicer bo to moral narediti predstojnik, to pa je bil on sam. Odgovoril sem mu, da sem za to, rad pa bi, da me nekoliko razbremenijo pri vajah. Odkimal je in s tem je bilo najinega razgovora konec – predavanja je prevzel sam.

Znano je bilo, da je profesor Križanič zelo navezan na vse v zvezi z Rusijo. Včasih se je s fakultete odpeljal z avtomobilom moskvič, ki je imel prepoznavno škatlasto obliko. Kroži anekdota, da je dejal naslednje: *Po zaslugi tega avtomobila sem videl pol Evrope – ko sem se vozil z vlakom iskat rezervne dele zanj.* Večinoma pa je s Prul prihajal peš, poleti z markantnim slamnikom na glavi. Neko zimo mu je na tej poti v bližini fakultete spodrsnilo in posledica je bil kompliciran zlom noge, zaradi katerega je moral več mesecev ležati doma.

Okrog leta 1980 je prišlo do polemik o Križaničevem poskusnem učbeniku *Matematika za prvi razred srednjega usmerjenega izobraževanja* (1980). Naj poskusim stvari prikazati tako, kot se jih spomnim sam.

Po preskušanju na nekaterih šolah je Zavod za šolstvo prišel do sklepa, da ta knjiga ne bo primerna za celotno srednješolsko populacijo. Zato je Aleksander Cokan prosil Ivana Štalca (ki je pred tem napisal učbenike za srednje tehnične šole), naj čim prej pripravi alternativni učbenik za prvi letnik. Tudi ta rokopis ni bil povsem ustrezen. Težave je moral reševati Egon Zakrajšek kot vodja ustrezne komisije pri Zavodu za šolstvo. On se je v časovni stiski obrnil name, morda zato, ker sem v nekem internem dokumentu izrazil pomisleke ob nekaterih pristopih v Križaničevem poskusnem učbeniku. Še danes ne razumem, zakaj niso ponatisnili starih Križaničevih knjig, morda s kakimi minimalnimi spremembami. A verjetno avtor potem, ko je napisal nove, ne bi bil za to. Ker sva določene dele alternativne knjige napisala ali revidirala z Egonom Zakrajškom, sva postala soavtorja. Takoj je bilo treba pripraviti tudi nadaljnje zvezke. Tako sem po sili razmer „padel" v pisanje srednješolskih učbenikov. Ko je Egon kako leto kasneje odšel v ZDA, sem moral prevzeti še več dela.

Spomladi 1983 me je France Križanič klical domov, mislim, da zaradi razdelitve dela. Povedal sem mu, da prebolevam virusno pljučnico. Ko je to slišal, mi je dejal, da je sam več let zaporedoma imel enake težave natančno v času zimskih počitnic. Ko se mu je zgodilo to zadnjič, je tako rekoč iz postelje odšel z vlakom v Minsk, se tam sprostil v družbi s prijatelji s tamkajšnje univerze in po tistem se mu bolezen ni več ponovila.

Po polemikah v zvezi z učbeniki se je profesor Križanič deloma umikal iz skupnega življenja oddelka. Pri tem so praktično vsi starejši profesorji v tej debati ostali vsaj nevtralni. Profesorju Ivanu Kuščerju je bilo izrecno všeč, da je Križanič upošteval želje fizikov in dele infinitezimalnega računa dal v učbenik matematike za drugi razred srednje šole. Tudi nekateri mlajši kolegi so s profesorjem Križaničem obdržali zelo dobre odnose.

Poljudna Križaničeva knjiga *Nihalo, prostor, delci* (1982) mi je bila všeč, tako da sem z veseljem napisal recenzijo (mislim, da celo dvakrat). Pred časom sem se pogovarjal s starejšim parom, ki je v študentskih letih prijateljeval s Križaničem. Po njunem pripovedovanju je imel vzdevek *Firduzi* zaradi velikega zanimanja in tudi ukvarjanja s poezijo. To sem pozneje prebral tudi v njegovi avtobiografski knjigi [6]. Žal je v našem poklicu tako, da umetniška nadarjenost in prefinjenost nimata veliko možnosti za izraževanje. Mlajši kolegi smo pred izidom knjige [6] le iz nekaterih citatov in prebliskov v Križaničevih knjigah lahko sklepali o tej strani njegove zanimive osebnosti.

LITERATURA

[1] El'sgol'c, L. E., *Differential equations and the calculus of variations*, Mir, Moskva 1970.

[2] Petrovskij, I. G., *Ordinary differential equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.

[3] Stepanov, V. V., *Kurs differencial'nyh uravnenij*, GITL, Moskva 1958.

[4] Coddington, E. A. in Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations*, Mc Graw-Hill, New York 1955.

[5] Filippov, A. F., *Sbornik zadač po differencijal'nym uravneniam*, Nauka, Moskva 1979.

[6] Križanič, F., *Splošno in posebno (nakladanja in otepanja)*, Ljubljana, Studia humanitatis, 2003.

Peter Legiša

NEGATIVNI LOMNI KOLIČNIK

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 41.20.Jb

Zadnje čase v fizikalnih revijah pogosto obravnavajo negativni lom. Članek poskuša preprosto opisati osnove pojava in njegovo ozadje.

NEGATIVE INDEX OF REFRACTION

Lately in physics journals negative refraction is often discussed. In the article a simple description of the basics of the phenomenon and its background is given.

Lomni količnik

V ravnem elektromagnetnem valovanju v homogeni in izotropni snovi opišemo spreminjanje faze s faktorjem $\mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$. V tem primeru v Maxwellovih enačbah rotor nadomestimo z $i\vec{k}\times$ in odvod po času z $-i\omega$. Tako pridemo do zvez med jakostjo električnega polja $\vec{\mathcal{E}}$, jakostjo magnetnega polja $\vec{\mathcal{H}}$ in valovnim vektorjem $\vec{k}$:

$$\vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}=\omega\mu\mu_0\vec{\mathcal{H}} \quad \text{in} \quad \vec{k}\times\vec{\mathcal{H}}=-\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}\,.$$

Navadno vzamemo dielektričnost ε in permeabilnost μ za pozitivni. V tem primeru vektorji $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ in $\vec{k}$ sestavljajo desni trirob. Valovni vektor je enako usmerjen kot Poyntingov vektor $\vec{\mathcal{P}}=\vec{\mathcal{E}}\times\vec{\mathcal{H}}$, ki opiše gostoto energijskega toka. Fazna in skupinska hitrost imata enako smer. Fazna hitrost pove, kako hitro potuje faza, to je sprememba polja. Skupinska hitrost pa pri valovanju, ki ima disperzijo, se pravi, da je fazna hitrost odvisna od valovne dolžine, poda hitrost, s katero potujeta skupina valov in energija.

Iz zapisanih enačb pa izhaja, da vektorji $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{H}}$ in $\vec{k}$ sestavljajo levi trirob, če sta dielektričnost in permeabilnost negativni.[1] Valovni vektor ima nasprotno smer kot gostota energijskega toka, po domače valovi potujejo v nasprotno smer kot energija. Fazna hitrost ima nasprotno smer kot skupinska hitrost.

[1] Tako snov so zato imenovali *levo*. To ime pa ni posrečeno, saj pojav ni povezan z ročnostjo.

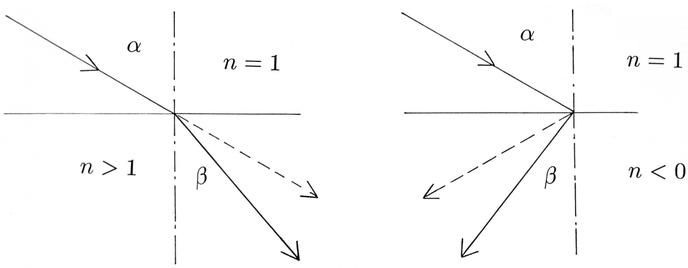
Iz Maxwellovih enačb sledi valovna enačba s kvadratom hitrosti svetlobe $c^2 = 1/(\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0)$. Če sta dielektričnost in permeabilnost pozitivni, lomni količnik snovi vpeljemo kot $n = c_0/c = (\varepsilon\mu)^{1/2}$ s hitrostjo svetlobe v vakuumu $c_0 = 1/(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$. Pri prehodu iz vakuuma v snov vpadni kot α z lomnim kotom β povezuje lomni zakon $\sin\alpha/\sin\beta = c_0/c = n$.

Leta 1904 je Horace Lamb v mehaniki prvič obdelal možnost, da ima skupinska hitrost nasprotno smer kot fazna hitrost. Odtlej so o tej možnosti velikokrat razpravljali, pogosto tudi za elektromagnetno valovanje. Leta 1967 se je Viktor G. Veselago z Inštituta ruske akademije znanosti P. N. Lebedev v Moskvi načelno vprašal, ali je mogoče, da sta dielektričnost in permeabilnost hkrati negativni [1]. Ali v tem primeru lahko po snovi potuje elektromagnetno valovanje?

Dielektričnost in permeabilnost sta analitični funkciji, katerih imaginarna dela sta povezana z absorpcijo. Na to je treba biti pozoren pri računanju. Vzemimo, da sta dielektričnost in permeabilnost enaki -1 in ju zapišimo kot $\varepsilon = \mu = \mathrm{e}^{i\pi}$. Za lomni količnik dobimo $n = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}i\pi} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}i\pi} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1$. To napelje na misel, da je treba prvotno enačbo za lomni količnik popraviti:

$$n = s(\varepsilon\mu)^{1/2}. \tag{1}$$

Če sta dielektričnost in permeabilnost obe pozitivni, je $s = +1$, če sta obe negativni, pa je $s = -1$. V obeh primerih po snovi lahko potuje elektromagnetno valovanje. Če je dielektričnost pozitivna in permeabilnost negativna ali dielektričnost negativna in permeabilnost pozitivna, pa je lomni količnik imaginaren. V teh primerih po snovi ne more potovati elektromagnetno valovanje. Na meji take snovi se valovanje odbije.

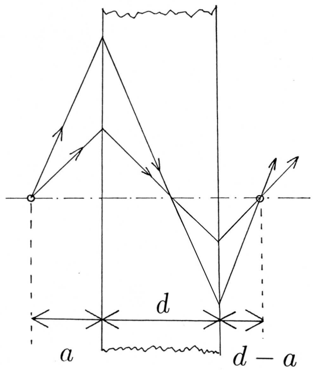


Slika 1. Pri običajnem lomu iz vakuuma v snov z $n > 1$ se žarek lomi proti vpadni pravokotnici (levo). Če je $n = 1$, se žarek ne lomi (črtkano). Pri negativnem lomu iz vakuuma v snov z $n < 0$ je lomni kot negativen (desno) in za $n = -1$ enako velik kot vpadni kot (črtkano).

Z negativnim lomnim količnikom so povezani številni nenavadni pojavi. Najprej zapišimo lomni zakon za prehod valovanja z območja 1 na območje 2:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} = \frac{s_2(\varepsilon_2\mu_2)^{1/2}}{s_1(\varepsilon_1\mu_1)^{1/2}}\,. \tag{2}$$

Pri prehodu z območja s pozitivnim lomnim količnikom na območje s pozitivnim ali z območja z negativnim lomnim količnikom na območje z negativnim velja lomni zakon v običajni obliki. Pri prehodu z območja s pozitivnim lomnim količnikom na območje z negativnim ali z območja z negativnim lomnim količnikom na območje s pozitivnim pa se v lomnem zakonu pojavi dodaten znak minus. Tedaj govorimo o *negativnem lomu*. Pri običajnem lomu merimo lomni in odbojni kot od vpadne pravokotnice v enakem smislu, tako da vpadni in lomljeni žarek ležita na nasprotnih straneh vpadne pravokotnice. Pri negativnem lomu pa je lomni kot negativen, tako da vpadni in lomljeni žarek ležita na isti strani vpadne pravokotnice (slika 1).



Slika 2. Poljubno velika planparalelna plast iz snovi z $n = -1$ preslika predmet brez napak, značilnih za leče, in brez neostrosti zaradi uklona.

Obratna vrednost goriščne razdalje leče iz snovi 2 na območju 1 je sorazmerna z razliko $n_{12} - 1$. Pri običajnem lomu je razlika enaka nič, če postane lomni količnik leče enak lomnemu količniku okolice in $n_{12} = 1$, tako da ni loma. Pri negativnem lomu pa je razlika enaka $-(|n_{12}| + 1)$. Zaradi spremenjenega znaka mora biti v tem primeru zbiralna leča na sredini tanjša kot na robovih in razpršilna na sredini debelejša kot na robovih. Zanimiv je lom na planparalelni plasti iz snovi z lomnim količnikom $n = -1$ v vakuumu. Lomni kot je enak negativnemu vpadnemu kotu, vrh tega ima snov podobne lastnosti kot vakuum, zato se na njej nič svetlobe ne odbije. Planparalelna plošča z debelino d točkast predmet v razdalji $a < d$ preslika v točkasto sliko v razdalji $d - a$ (slika 2) [1]. Pri zelo veliki plošči ni omejitve zaradi uklona, da se točkast predmet preslika v krožec s premerom valovne dolžine kot pri običajni leči [2–4]. Vendar plast nima pravih lastnosti leče, saj vzporednega šopa žarkov ne zbere v goriščni ravnini.

Na območju z negativnim lomnim količnikom bi opazili *obratni pojav Čerenkova.* Pri običajnem pojavu Čerenkova naelektreni delec, ki se giblje po snovi hitreje, kot potuje po njej elektromagnetno valovanje, seva stožčasto valovno čelo z valovnim vektorjem pod ostrim kotom proti smeri gibanja. Pri obratnem pojavu Čerenkova bi bil ta kot top. Na območju z negativnim lomnim količnikom opazijo *obratni Dopplerjev pojav.* V verigo členov, ki jih sestavljata po dva kondenzatorja in dušilka z nelinearno induktivnostjo, so poslali ostro elektromagnetno motnjo in za njo radijske valove. Valovi s frekvenco okoli 1,3 GHz so se odbili na motnji, ki se je oddaljevala s hitrostjo 0,26c, in se vrnili s frekvenco okoli 1,6 GHz [5].

Dielektričnost in permeabilnost

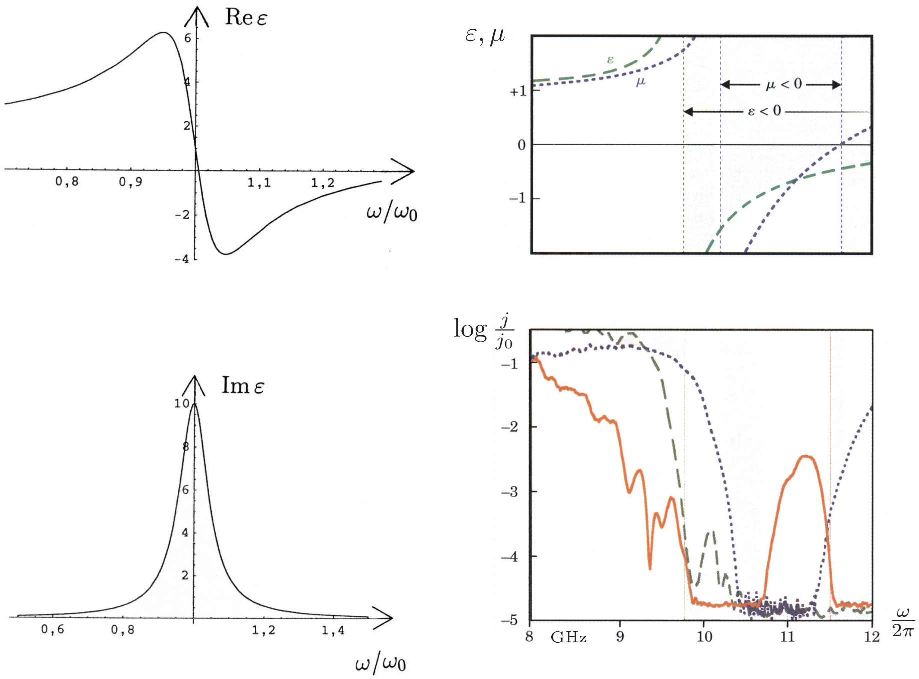
Dielektričnost in permeabilnost sta odvisni od frekvence. Na hitro si oglejmo značilno frekvenčno odvisnost dielektričnosti. Molekule snovi si mislimo sestavljene iz elektronov, ki so harmonično vezani na pozitivne molekulske ostanke. V snovi, ki ni pregosta, lahko približno vzamemo, da na elektron deluje izmenično električno polje v valovanju $\mathcal{E}_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}$. Magnetne sile zanemarimo. Enačba gibanja za elektron se glasi $m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = -e_0\mathcal{E}_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Konstanta γ upošteva dušenje, $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ pa je lastna krožna frekvenca elektrona. Električni dipolni moment elektrona $p_e = -e_0 x$ prispeva k električni polarizaciji $P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathcal{E} = Z\mathcal{N}p_e$, če je $\mathcal{N}$ število molekul v prostorninski enoti in v vsaki molekuli niha Z elektronov. Z nastavkom $x = x_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$ sledi kompleksna dielektričnost $\varepsilon = 1 + Z\mathcal{N}e_0^2/(m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega))$ z realnim in imaginarnim delom:

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon = 1 + \frac{Z\mathcal{N}e_0^2}{m\varepsilon_0} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

in

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon = \frac{Z\mathcal{N}e_0^2}{m\varepsilon_0} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\,.$$

Imaginarni del kaže značilno resonančno krivuljo, ko krožna frekvenca elektromagnetnega valovanja ω doseže in preseže lastno krožno frekvenco elektrona ω_0. Realni del, ki ga je treba upoštevati v lomnem količniku, pa po prehodu skozi resonanco lahko spremeni znak (slika 3).



Slika 3. Krivulji po zapisanih enačbah za $\mathrm{Re}\,\varepsilon$ in $\mathrm{Im}\,\varepsilon$ z $Z\mathcal{N} = 1{,}8{\cdot}10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$ in $\gamma/\omega_0 = 0{,}1$ (levo). Dielektričnost (črtkano) in permeabilnost (pikčasto) metamateriala, s katerim so D. Smith in sodelavci prvič opazovali negativni lom, na nakazanih frekvenčnih pasovih postaneta negativni (desno zgoraj). Označeni vrh prepustnosti (sklenjeno) priča, da je na ozkem frekvenčnem pasu lomni količnik negativen (desno spodaj). Narisani sta tudi prepustnosti za električni del metamateriala (črtkano) in za magnetni del (pikčasto). Po J. B. Pendryju in D. R. Smithu [3].

Negativna dielektričnost se potemtakem lahko pojavi na ozkem frekvenčnem pasu po prehodu skozi resonanco. Pri tem je treba računati tudi z disperzijo in absorpcijo. Pri kovinah, na primer srebru in aluminiju, se resonanca pojavi na vidnem območju, na katerem te kovine močno odbijajo svetlobo. V polprevodnikih pa leži resonanca na območju valovnih dolžin okoli desetine milimetra ali na infrardečem območju.

S podobnim računom je mogoče zajeti tudi permeabilnost. V snovi si mislimo drobne ovoje s tokom s harmonično vezanimi magnetnimi momenti. Dobimo podobno zvezo za permeabilnost. Tudi njen realni del lahko pri prehodu skozi resonanco postane negativen. To se primeri pri nekaterih feromagnetnih in antiferomagnetnih snoveh, le da leži resonančna frekvenca pri precej nižjih frekvencah.

Metamateriali

Da postane lomni količnik negativen, morata dielektričnost in permeabilnost biti negativni na istem frekvenčnem pasu. Take snovi v naravi niso našli. Za mikrovalove so jo naredili tako, da so sestavili iz enakih členov vezje, ki ga je mogoče opisati kot *metamaterial* z efektivno dielektričnostjo in efektivno permeabilnostjo, če so členi manjši od četrtine valovne dolžine. John B. Pendry in sodelavci z Imperialnega kolidža v Londonu so leta 1999 prišli na misel, da bi za magnetni del uporabili drobne kovinske obroče z režami [6]. Obroči z induktivnostjo in reže s kapaciteto delujejo kot nihajni krogi.

Zamisel so preizkusili David Smith in njegovi sodelavci s Kalifornijske univerze v San Diegu [7]. Na ploščice iz organskega stekla so nalepili tanke bakrene lističe v obliki dveh obročev z režama na nasprotnih straneh. Za električni del pa so na drugi strani ploščic nalepili bakrene trakove. Ploščice so sestavili v mrežo in tako dobili metamaterial z negativnima efektivnima dielektričnostjo in permeabilnostjo (slika 3). Na takem metamaterialu so opazovali negativni lom v ravnini. V valovni vodnik so vstavili prizmo iz metamateriala, tako da je vanjo valovanje s frekvenco 10 GHz vstopalo pod pravim kotom, izstopalo pa poševno [8]. Pri tem so se prepričali, da se je valovanje lomilo na nasprotno stran kot na enaki prizmi iz teflona s pozitivnim lomnim količnikom. Nekateri raziskovalci so podvomili, da je šlo za pravi negativni lom, češ da sta motili velika disperzija in oslabitev in je bil sprejemnik preblizu prizme. Dvome je ovrgla raziskovalna skupina s Kalifornijskega tehniškega inštituta, ki je ponovila poskus z bolj oddaljenim merilnikom [9]. Nato so to storile še druge raziskovalne skupine.

Nadejajo se, da bo mogoče s telesi iz nehomogenega in anizotropnega metamateriala po volji vplivati na potovanje valovanja. Pendry, Smith, ki je medtem prešel na univerzo Duke v Durhamu, in sodelavec so premislili, kako bi elektromagnetno valovanje z določeno valovno dolžino speljali mimo dela prostora in naredili telesa v njem „nevidna“ za to valovanje [10]. Izračunali so, kako bi se morali spreminjati dielektričnost in permeabilnost krogelne lupine, da ne bi mogli videti teles v njeni notranjosti. Valovanje bližnjega točkastega izvira bi bilo v oddaljenosti tako, kot da lupina ne bi metala sence.

Napravo so preizkusili v preseku krogelne lupine z ekvatorsko ravnino [11]. Zares so izdatno zmanjšali sipanje valovanja s frekvenco 8,5 GHz v smeri nazaj in v smeri naprej, tako da predmeta ni bilo mogoče „videti“ in opazovati njegove sence.

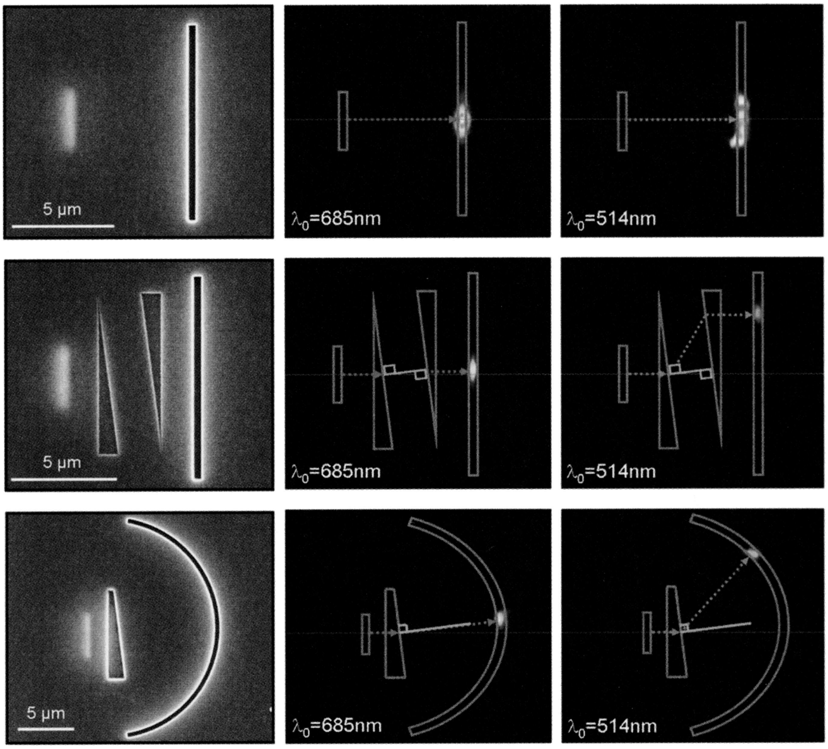
Vidna svetloba

Pred kratkim so Henri Lezec z Državnega inštituta za znanstvena raziskovanja v Parizu ter Jeniffer Dionne in Harry Atwater s Kalifornijskega tehniškega inštituta v Pasadeni opazovali negativni lom tudi z modrozeleno svetlobo [12]. Pri vidni svetlobi je bilo treba uporabiti drugačen prijem, saj ni mogoče sestaviti metamateriala iz trakov in obročev z režami. Svetlobo so speljali po valovnem vodniku iz tanke plasti silicijevega nitrida Si_3N_4 med plastema kovine. Po 500 nm debeli plasti nitrida med plastema srebra s pozitivnim lomnim količnikom je lahko potovalo valovanje, ki je ustrezalo več nihajnim načinom TM s prečnim magnetnim poljem.[2] Po 50 nm debeli plasti nitrida med plastema srebra in zlata z negativnim lomnim količnikom pa je lahko potovalo valovanje, ki je ustrezalo enemu samemu nihajnemu načinu TM. Ta posebnost v stanjšani plasti zahteva posebno pojasnilo. Valovni vodnik so na vseh straneh zaščitili s plastjo aluminija, da so se izognili motnjam od zunaj.

V tanjši plasti so fotoni delovali na površinske plazmone, to je kvante plazemskega nihanja elektronskega plina ob meji kovine z dielektrikom. S sklopitvijo površinskih plazmonov s fotoni so nastali polaritoni, s katerimi moramo opisati valovanje, namesto da bi ga opisali s fotoni. Hitrost tega valovanja je močno odvisna od frekvence. Na pasu med lastno krožno frekvenco površinskih plazmonov in plazemsko frekvenco elektronov v globini kovine postane lomni količnik negativen. S tem, da so srebro nadomestili z zlatom, so premaknili območje negativnega lomnega količnika od ultravijolične k modrozeleni svetlobi. Za rdečo svetlobo je lomni količnik ostal pozitiven.

Skozi 400 nm široko režo v vrhnjih plasteh so posvetili s polariziranim laserskim curkom z magnetnim poljem vzdolž reže. Valovanje je potovalo po

[2] V valovnih vodnikih je pri reševanju Maxwellovih enačb treba upoštevati vsakokratne robne pogoje. Vsaki od lastnih rešitev ustreza *način* (modus) z značilno krajevno odvisnostjo obeh polj. Pri transverzalnih magnetnih načinih TM je magnetno polje pravokotno na smer potovanja.



Slika 4. V valovni vodnik s 500 nm debelo plastjo silicijevega nitrida niso namestili nobene prizme (zgornja vrsta), dve ploski prizmi s 50 nm debelo plastjo nitrida (srednja vrsta) ali eno tako prizmo (spodnja vrsta). Posnetek so naredili s tipalnim elektronskim mikroskopom (levi stolpec) in z optičnim mikroskopom pri osvetlitvi z leve z rdečo svetlobo (srednji stolpec) in modrozeleno svetlobo (desni stolpec). Za modrozeleno svetlobo je bil lomni količnik negativen in je prišlo do negativnega loma, za rdečo svetlobo pa je bil lomni količnik pozitiven in ni prišlo do negativnega loma [12].

delu valovnega vodnika z debelejšo plastjo nitrida in pozitivnim lomnim količnikom. Nato je naletelo na območje s tanjšo plastjo nitrida in z negativnim lomnim količnikom. Območje je imelo obliko prizme s ploskim trikotnikom kot osnovno ploskvijo in s prvo mejno ploskvijo pravokotno na os valovnega vodnika. Uporabili so dve enaki, drugo proti drugi obrnjeni prizmi ali eno samo prizmo. Prepuščeno valovanje so skozi ravno ali ukrivljeno režo v spodnjih plasteh zaznavali z objektivom s petdesetkratno povečavo in polprevodniškim merilnikom CCD, hlajenim s tekočim dušikom. Naredili so tri vrste poskusov. Pri prvem so brez prizem opazovali premo potovanje valovanja. Pri drugem poskusu so opazovali odklon valovanja pri prehodu skozi dve prizmi, pri tretjem pa odklon pri prehodu skozi eno prizmo. Vsakega od poskusov so naredili z modrozeleno svetlobo z valovno dolžino 514 nm in z rdečo svetlobo z valovno dolžino 685 nm. Pri drugi in tretji vrsti poskusov so jasno zaznali odklon modrozelene svetlobe zaradi negativnega loma, medtem ko se rdeča svetloba ni odklonila (slika 4). Tudi izidi teh poskusov so bili vezani na ravnino.

Negativni lom vneto raziskujejo in število člankov o njem v raziskovalnih revijah precej hitro narašča. Raziskovanja v veliki meri podpirajo vojaški krogi. Tudi drugi si obetajo izboljšane naprave. Za zdaj uporabljajo izboljšane valovne vodnike, antene in leče za mikrovalove. Za bližnjo prihodnost med drugim omenjajo povečano gostoto pri zapisovanju podatkov na DVD in izboljšano ločljivost pri opazovanju bioloških vzorcev.

LITERATURA

[1] V. G. Veselago, *Elektrodinamika veščestv s odnovremenno otricatel'nymi značenijami ε i μ*, Uspehi fizičeskih nauk **92** (1967), str. 517.

[2] J. B. Pendry, *Negative Refraction Makes a Perfect Lens*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), str. 3966–3969.

[3] J. B. Pendry in D. R. Smith, *Reversing Light With Negative Refraction*, Phys. Today **57** (2004) 6, str. 37–43; *The Quest for the Superlens*, Scientific American **295** (2006) 6, str. 60–67.

[4] J. B. Pendry, *Negative refraction*, Contemp. Phys. **45** (2004), str. 191–202.

[5] N. Seddon in T. Bearpark, *Observation of the Inverse Doppler Effect*, Science **302** (2003) 5650, str. 1537–1540.

[6] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins in W. J. Stewart, *Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **47** (1999) 11, str. 2075–2084.

[7] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser in S. Schultz, *Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 18, str. 4184–4187.

[8] R. A. Shelby, D. R. Smith in S. Schultz, *Experimental Verification of a Negative Index of Refraction*, Science **292** (2001) 5514, str. 77–79.

[9] A. A. Houck, J. B. Brock in I. L. Chuang, *Experimental Observations of a Left-Handed Material That Obeys Snell's Law*, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 13, str. 137401-1–4.

[10] J. B. Pendry, D. Schurig in D. R. Smith, *Controlling Electromagnetic Fields*, Science **312** (2006) 5781, str. 1780–1782.

[11] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr in D. R. Smith, *Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies*, Science **314** (2006) 5801, str. 977–980.

[12] H. J. Lezec, J. A. Dionne in H. A. Atwater, *Negative Refraction at Visible Frequencies*, Science **316** (2007) 5823, str. 430–432.

OMEJITVE PRI OCENJEVANJU ZNANJA MATEMATIKE V GIMNAZIJAH

MARJAN JERMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

in

SAMO REPOLUSK

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2000): 97C40, 97B70

Pravilnik o ocenjevanju znanja v srednjih šolah, ki je začel veljati v šolskem letu 2005/06, in interni pravilniki posameznih gimnazij na nekaterih področjih omejujejo avtonomijo učiteljev pri ocenjevanju znanja. Avtorja skušata prikazati, kako se prednosti in slabosti trenutnih rešitev kažejo pri pouku matematike, ter vzpodbuditi premislek o trenutnem stanju in morebitnih možnih izboljšavah.

LIMITATIONS ON THE ASSESSMENT OF MATHEMATICS IN SECONDARY SCHOOLS

The state regulations on the assessment of upper secondary school students (effective as from the school year 2005/06) and internal statutes of individual secondary schools limit the autonomy of teachers in some areas of student assessment. The authors wish to present how the existing solutions influence the mathematics curiculum and to initiate a reflection on the present situation and possible improvements.

1. Uvod

Pravilnik o ocenjevanju znanja v srednjih šolah, ki je začel veljati v šolskem letu 2005/06 ([5], v nadaljevanju „pravilnik“), še bolj pa interni pravilniki posameznih gimnazij precej natančno določajo pravila in omejitve pri ocenjevanju znanja. Mnogo profesorjev je poučevalo še v obdobju, ko so bila ta pravila veliko bolj ohlapna, omejitve pa bistveno blažje in je bila avtonomija učiteljev na področju ocenjevanja neprimerno večja. Zato so nekateri učitelji še toliko bolj občutljivi za občasne zlorabe pravil. Avtorja bi rada s tem prispevkom postavila na tehtnico na eno stran željo po čim bolj prijazni šoli, pravice dijakov v čedalje bolj liberalnem svetu in varovalke pred morebitno samovoljo slabih učiteljev, ki bi svojo avtoriteto gradili na strahu in sankcijah, na drugo stran pa pogosto prepričanje, da pretirane omejitve pri ocenjevanju poleg slabega občutka nezaupanja učiteljem povzročajo tudi slabšo pripravljenost dijakov na pouk, zmanjšanje delovnih navad, slabitev računskih spretnosti, povečano število neupravičenih pritožb nad ocenami, težave z avtoriteto ter posledično slabše znanje dijakov.

Pomembno je poudariti, da namen prispevka ni vsiljevati mnenja avtorjev, temveč le spodbuditi kritično premišljanje o ustreznosti trenutnih pravilniških rešitev in šolskih praks. Učitelji bi morali biti veliko aktivneje vključeni v konstruktivno debato in politiko oblikovanja šolskih pravil. Tudi dobro premišljeni in utemeljeni pravilniki ne morejo biti večni in morajo med svojo veljavo zdržati težo razprav in strokovnih argumentov. Le s poštenim dialogom, priznavanjem legitimitete nasprotnih mnenj in z odprtostjo pri sprejemanju končnih odločitev lahko dosežemo ravnovesje.

Prav tako je pomembno vedeti, da članek ni in ne želi biti znanstveni prispevek o različnih postopkih pri ocenjevanju. Večino načinov, ki bodo v članku omenjeni, so znanstveno in statistično natančno obdelali že slovenski strokovnjaki na posamičnih področjih. Pri vsakem načinu ocenjevanja želiva spomniti le na to, da imajo poleg veliko dobrih, preizkušenih in premišljenih kvalitet vgrajene tudi pasti, ki se jim lažje izognemo, če se jih dobro zavedamo.

Kljub temu da bistveni del prispevka temelji na izkušnjah z ocenjevanjem pri pouku matematike, bi se dalo veliko premislekov skoraj brez prevedbe uporabiti tudi pri drugih predmetih.

Avtorja sta zelo hvaležna več profesorjem matematike, ki so jima med daljšimi pogovori pomagali določiti najbolj problematične točke, povedali svoje izkušnje in predloge za možne izboljšave.

2. Preverjanje znanja pred pisnim ocenjevanjem

Druga točka 5. člena pravilnika predpisuje obvezno preverjanje znanja pred pisnim ocenjevanjem. Preverjanja se ne sme ocenjevati.

Način preverjanja znanja ni natančno določen in ga lahko načeloma vsak učitelj izvaja po svoje. V dnevnik je sicer priporočljivo vpisati vsaj uro ali dve pred pisno nalogo naslov „Preverjanje znanja pred pisno nalogo“, vendar pa preverjanje znanja nikakor ne pomeni zgolj pisanja predtesta ali reševanja pričakovanih testnih nalog. Sem sodijo tudi sprotna kratka ustna preverjanja razumevanja med obravnavo snovi ali vajami, pregled domačih nalog, ki se nanašajo na ocenjevano snov, samostojno ali skupinsko reševanje delovnih listov, skupna ponovitev potrebne teorije, utrjevanje matematičnih konceptov s pomočjo IKT in še kakšen učinkovit način, ki ga je razvil vsak učitelj posebej skozi dolgoletno prakso.

Prednosti

(1) Na ta način dijaki dobijo pregled čez celotno snov, ki se bo ocenjevala.

(2) Pred ocenjevanjem dobijo vpogled v trenutno znanje in lažje načrtujejo, katere vsebine je treba še podrobneje usvojiti.

(3) Pisna ocenjevanja niso več tako stresna, ker dijak vsaj približno ve, kako bo ocenjevanje potekalo. Pri tem moramo biti zelo previdni, da dijaki ne dobijo vtisa, da so predtesti skoraj enaki testom z malenkostnimi spremembami.

Slabosti

(1) Po neuradnih informacijah nekaterih učiteljev obstaja na posameznih osnovnih šolah praksa, da učenci pred pisno nalogo pišejo predtest s podobnimi nalogami, kot bodo na samem testu, rešitve pa mora učitelj informativno točkovati, da dijaki vedo, koliko znajo. Ponekod naj bi takšno prakso od učiteljev zahtevali celo ravnatelji in jo utemeljevali s šolsko inšpekcijo. Za takšno ravnanje ni nobene zakonske osnove. To je lahko le stvar prostovoljnega dogovora celotnega kolektiva ali posameznega aktiva, nikakor pa ne dolžnost posameznikov, ki bi podlegli pritiskom staršev in grožnjam z inšpekcijo. Takšne prakse v srednji šoli ne smemo dopustiti, ker ne prispeva k vzgoji odgovorne osebnosti.

    Zaradi takšne prakse dijaki pričakujejo na pisnem preizkusu praktično identične naloge. Nekateri med njimi se tudi zato naučijo naloge reševati po receptih, brez razumevanja. Če naloge na preizkusu niso zelo podobne, seveda sledi večje razočaranje in včasih tudi iskanje krivde drugje namesto pri sebi.

(2) Poleg tega pomeni takšna praksa za učitelja dvakratno delo s sestavljanjem, pregledom in popravljanjem pisnih nalog. Učitelji so že sedaj

dovolj obremenjeni s sestavljanjem pisnih nalog, z njihovimi ponovitvami, popravami ob konferencah, popravnimi izpiti, izrednimi roki in z razredniškimi posli, ki matematikom skoraj nikoli ne uidejo. Pri takšnem načinu dela dobi učitelj občutek, da se vse njegovo življenje vrti samo še okoli sestavljanja in popravljanja testov, za profesionalno rast na področju matematike in didaktike pouka pa mu zmanjka volje in energije.

Preverjanje znanja pred pisnim ocenjevanjem je priporočljivo, načini preverjanja pa naj bodo dovolj liberalno zastavljeni in v veliki meri prepuščeni presoji učitelja. Zaradi enotnosti na šoli je morda koristno, da celoten aktiv matematikov uporablja podobne metode.

3. Vnaprej določeni kriteriji za ocenjevanje in meje za ocene

Prva in druga točka 4. člena pravilnika določata, da mora učitelj dijake vnaprej seznaniti s kriteriji za ocenjevanje, točkovnimi vrednostmi posamičnih nalog in mejami za ocene.

Prednosti

(1) Na ta način so preizkusi znanja bolj objektivno ocenjeni. Učitelj kasneje ne more spreminjati kriterijev za ocenjevanje in deležev ocene, ki jih prinesejo posamezne naloge.

(2) Učitelj praviloma bolj pazljivo sestavi test. Kasnejše reševanje neuspelih preizkusov znanja s prerazporeditvijo točk ali z nižanjem praga za pozitivno oceno ni več mogoče.

(3) Dijak ima že med pisanjem soliden pregled, kakšno oceno lahko pričakuje.

Slabosti

(1) V času pred omejitvami so profesorji po zelo slabih rezultatih preizkusa znanja pogosto upravičeno presodili, da je na primer že 45 % vseh točk dovolj za pozitivno oceno.

(2) Nekateri dijaki se, namesto da bi pokazali, koliko znajo, osredotočijo na izrabo pravil igre in na naloge, ki jim prinesejo večje število točk. Žal so znane tudi špekulacije s ponovitvami namenoma neuspelih preizkusov.

(3) Včasih pretiran normativizem ne deluje po pričakovanjih. To se sicer redko izkaže pri ocenjevanju na maturi, ko mora biti zaradi objektivnosti točkovnik zelo natančno določen. Zgodi se, da je treba zaradi zvestega sledenja točkovniku dijaka z nestandardno nepopolno rešitvijo oceniti z več ali manj točkami, kot bi si realno zaslužil.

(4) Nekateri eksperimenti (npr. [1]) kažejo, da dosleden normativizem pri točkovanju ne pripomore bistveno k objektivnosti ocene. Še več, pogosto se izkaže, da je intuitivno ocenjevanje bolj učinkovito, rezultati ocenjevanj pa primerljivi. Zato lahko učitelju prepustimo presojo, kako bo ocenjeval. Pri tem se opira na svoje matematično znanje, dolgoletne izkušnje in občutek za pravičnost.

(5) V ZDA pogosto meje za ocene določijo kasneje, tako da so ocene približno normalo porazdeljene. Na ta način se da kompenzirati nekatere nepredvidene anomalije in nepričakovane rezultate pri posameznih nalogah.

Zahteve po jasnosti kriterijev in mej za pozitivno oceno so koristne in poštene. Tudi odrasli pričakujemo jasne okvire delovanja tako v službi kot na banki, v restavracijah, na servisih itd. V tem primeru pravila niso zato, da bi grenila življenje, ampak prispevajo k boljšemu delovanju družbe. Preveč toge zahteve po enakih mejah za ocene pri vseh predmetih in pri vseh preizkusih znanja ter natančno izdelani in vnaprej določeni točkovniki zagotovo ne pripomorejo k odgovornemu, objektivnemu in poštenemu ocenjevanju.

4. Ponavljanja in neupoštevanje slabih rezultatov pri preizkusih znanja

Prva točka 13. člena pravilnika določa, da se negativne ocene ne upoštevajo, ocenjevanje pa se ponovi, če je tretjina ali več pisnih izdelkov ocenjena negativno. Druga točka istega člena dovoljuje, da se lahko pod posebno strogimi pogoji (soglasje učiteljskega zbora in dijakov že na začetku šolskega leta) tretjina zviša na mejo, ki ne presega polovice.

Prednosti

(1) Učitelj bolj pazljivo sestavi pisni preizkus, katerega teža je primerna za večino dijakov.

(2) Učitelj je motiviran, da dijake na preizkuse čim bolje pripravi.

(3) Včasih k neuspehu prispeva tudi nerodno izbran čas testiranja, na primer pred prazniki ali po njih ali pa čas, ko se piše še veliko drugih preizkusov. V teh primerih ponovno testiranje da bolj realne rezultate.

(4) Ni več mogoče, da bi se nesorazmerno težak preizkus izrabil za kaznovanje ali discipliniranje dijakov.

Slabosti

(1) Včasih tudi večje število negativnih ocen pokaže realno stanje v razredu. Z neupoštevanjem prvih ocen in ponovitvami pisnih nalog takšno stanje le preložimo ali zameglimo.

(2) To je slaba popotnica dijakom za življenje. Ne smejo pričakovati, da bodo v osebnem ali poklicnem življenju po neuspehih vedno dobili novo priložnost in se jim zato ne bo treba že prvič potruditi.

(3) Žal so znani primeri, ko se dijaki dogovorijo, da bodo z velikim deležem negativnih ocen blokirali preizkus znanja.

(4) Na nekaterih gimnazijah se je ponavljanje pisnih preizkusov znanja izrodilo do te mere, da interni pravilniki predpisujejo obvezno dvakratno zaporedno pisno preverjanje ne glede na število negativnih ocen na prvem testu. Sodelovanje pri drugem preverjanju je prepuščena odločitvi dijakov, če si želijo izboljšati oceno. Kombinacija s predtesti povzroči upravičen občutek, da je večji del pouka matematike namenjen preverjanju znanja, povzroča stalen stres in daje ogromno odvečnega dela učiteljem.

Ob zgornjih premislekih se lahko vprašamo: Ali bi se dalo najti kakšno boljše določilo glede ponavljanja pisnih nalog? Ali bi lahko namesto sedanje prakse vpisa boljše ocene morda (ponovno) vpeljali povprečno oceno obeh testov? Kaj pa, če bi zahtevo po ponavljanju preprosto črtali iz pravilniških določil in prepustili ponavljanje učiteljevi strokovni presoji? Morda pa smo zadovoljni s sedanjo rešitvijo in ni treba ničesar spreminjati?

5. Prepoved delnih ocen

Pridobivanje delnih ocen je v neskladju z več členi pravilnika. Pred uvedbo pravilnika pa so bile delne ocene pogoste, še posebej pri matematiki in pri pouku jezikov.

Tudi sedaj bi lahko delne ocene omogočili s formalnim trikom, če bi interni akt strokovnega aktiva ob strinjanju s starši delne ocene definiral kot ocene s sorazmerno manjšo težo, ki pa bi jih bilo treba dosledno zapisovati v redovalnico.

Prednosti prepovedi

(1) Delne ocene so še bolj kot ustno spraševanje odvisne od subjektivne presoje učitelja.

(2) Zaradi ogromnega števila predmetov v posameznem letniku težko od dijakov pričakujemo sprotno znanje vedno in povsod.

(3) Pri nenatančnih pravilih o zaključevanju delnih ocen lahko pride do nejasnosti, zmede in potencialnih manipulacij.

Slabosti

(1) Z delnimi ocenami se je dalo v zelo kratkem času sproti s kratkimi vprašanji ali nalogami pred tablo preverjati in delno oceniti znanje večjega števila dijakov. Dijaki so bili zato motivirani, da so pred poukom vsaj bežno preleteli osnovne pojme iz prejšnjih ur.

(2) To je bil eden od načinov, kako začeti novo šolsko uro z osvežitvijo starih vsebin.

(3) Mnogi dijaki so se rajši redno pripravljali na krajša ugotavljanja znanja kot pa enkrat na obsežnejše ustno ocenjevanje, saj so tako bolj sproti delali in lažje prišli do boljše končne ocene.

(4) Z delnimi ocenami se je ponekod občasno ocenjevalo in spodbujalo tudi opravljanje domačih nalog.

(5) Končna ocena, ki je bila po vnaprej določenih pravilih zaključena iz delnih ocen, je kazala raven znanja in delo dijaka čez daljše obdobje.

Za ukinitev delnih ocen ni bilo pravih tehtnih argumentov. Še več, mnogim dijakom je takšen način sprotnega ocenjevanja ustrezal. Če bi spet dovolili delne ocene, tega nikakor ne bi smeli narediti s sočasnim povečanjem administrativnih določil, npr. z uniformiranimi določitvami, kakšno težo naj ima posamezna delna ocena, kam naj se vpiše ipd. S tem bi učiteljem naložili še več dela in bi to pomenilo dejanski poseg v avtonomijo in nezaupnico učiteljevemu strokovnemu delu.

6. Prepoved ocenjevanja domačih nalog

Posodobljeni učni načrt [6] daje velik pomen rednim in dobro načrtovanim domačim nalogam. Dobro izbrane domače naloge ne pomagajo le pri utrjevanju snovi, obvladovanju spretnosti in pri pripravah na ure, ampak pri dijakih razvijajo tudi delovne navade.

Pravilnik nikjer izrecno ne prepoveduje ocenjevanja domačih nalog. Takšno ocenjevanje bi bilo pogojno možno ob zelo liberalni interpretaciji tretje in četrte točke 7. člena pravilnika, kjer bi domače naloge šteli pod »druge naloge« ali pa bi možnost njihovega ocenjevanja določil strokovni aktiv. Zanimivo je, da je bilo ocenjevanje domačih nalog po interpretaciji MŠŠ v izrecnem neskladju z 2. členom starega pravilnika o preverjanju in ocenjevanju znanja v gimnazijah.

Prednosti trenutne pravilniške rešitve

(1) Znanje matematike ni nujno odvisno od dijakove delavnosti. Pri zelo bistrih dijakih, ki niso konformistični in ne marajo prisile pri učenju, lahko z obveznimi domačimi nalogami vzbudimo odpor do predmeta. Prav tako ni prav, da bi zmanjšali realno oceno znanja matematike dijakom, ki jih matematika ne zanima preveč, brez večjih težav pa dosežejo pozitivno oceno.

(2) Posredno s tem pri dijakih razvijamo odgovornost. Večina jih prej ali slej sama ugotovi, da je delo domačih nalog koristno, kljub temu da ni ocenjeno.

Slabosti

(1) Nekateri učitelji se pritožujejo, da dijake težko prepričajo, naj redno delajo domače naloge, ker njihovega dela ne smejo ovrednotiti z oceno.

Dijaki tako ne delajo domačih nalog, slabo so pripravljeni na ure, ne razvijejo računskih spretnosti, učijo se kampanjsko in prej ali slej pride do težav. Znana je sicer praksa, ko učitelji posredno nagrajujejo redno opravljanje domačih nalog z obljubo po zaključevanju navzgor ob koncu leta ali pa neopravljanje domačih nalog kaznujejo z (napovedanim) ustnim spraševanjem ali pa z ukinitvijo privilegijev napovedanega ustnega spraševanja.

(2) Nekateri tuji avtorji so mnenja, da je domače naloge nujno ocenjevati, če želimo, da dosežejo svoj namen (prim. [2, str. 44]), drugi avtorji pa so previdnejši in zavračajo ocenjevanje pravilnosti oz. nepravilnosti reševanja domačih nalog, podpirajo pa ocenjevanje opravljenosti oz. neopravljenosti domačih nalog (prim. [3, str. 27–37] in [4, str. 70]).

(3) Z oceno iz domačih nalog lahko ovrednotimo dijakove sposobnosti samostojnega in časovno neomejenega reševanja problemov skozi daljše obdobje.

Prestroge sankcije pogosto povzročijo odpor, nesmiselno prepisovanje in različne načine izogibanja. Veliko več dosežemo s pozitivnim ravnanjem. Dijake poskusimo vzpodbuditi k reševanju domačih nalog npr. na naslednje načine (prim. tudi [3] in [4]):

(1) Damo manj domačih nalog, a te naj bodo skrbno izbrane, da pokrijejo čim več različnih konceptov obravnavane vsebine. Občasne izjeme so vaje, kjer je treba utrditi kakšna ključna proceduralna znanja.

(2) Redno spreminjamo oblike domačih nalog (dril, besedilni problemi, dokazi, rekreativne naloge, bralne vaje, preiskovanja, elektronska učna gradiva ...), saj takšen način razbija občutek monotonosti in veča pripravljenost za delo (prim. [3, str. 28]).

(3) Pri pregledu domačih nalog lahko predstavimo različne strategije razmišljanja in načine, kako se lotiti problemov.

(4) Dijakom redno dajemo povratno informacijo o opravljenih domačih nalogah. Če nam jih ne uspe redno pregledovati, jim omogočimo vsaj dostop do pravilnih rešitev.

(5) Dijakom napovemo, da bo pisni preizkus vseboval npr. eno nalogo, ki bo zelo podobna kakšni iz nabora domačih nalog. To je sicer zelo nevarno,

če nimamo dobre mere. Naš dober namen se lahko izrodi podobno kot je že opisano v točki (1) slabosti obveznih preverjanj znanja pred pisnim ocenjevanjem.

(6) Dijakom omogočimo, da pri ustnem ocenjevanju s predstavitvijo svojega načina reševanja domače naloge pridobijo del ustne ocene.

7. Predpisano število ustnih ocen

Druga točka 12. člena pravilnika predpisuje vsaj dve ustni oceni v šolskem letu, razen v primeru, ko je s katalogi znanj ali z učnim načrtom določeno drugače. Izkušnje večine učiteljev matematike kažejo, da je pogosto zelo težko med šolskim letom kvalitetno pridobiti dve predpisani ustni oceni. Zato sedmo poglavje posodobljenega učnega načrta o vrednotenju dosežkov predlaga *vsaj* eno ustno oceno.

Prednosti

(1) Komunikacija pri ustnih preverjanjih je veliko bolj interaktivna kot pri pisnih preverjanjih. Dober učitelj vodi dijaka skozi snov tako, da dobi celoten vpogled v dijakovo razumevanje. Če ima težave, mu pomaga s podvprašanji, idejami in praktičnimi nalogami. Če to ne pomaga, lahko spremeni temo in preveri razumevanje drugih vsebin, ki sodijo v sklop preverjanja znanja. Izkušen učitelj s pozitivnim in človeškim odnosom zna v večini primerov odpraviti dijakovo tremo in neutemeljen strah.

(2) Pri ustnem spraševanju dijak pokaže svoje sposobnosti izražanja in komunikacije. Šele pri ustnem spraševanju lahko nekateri dijaki s posebnimi potrebami (npr. slabovidni in legasteniki) pokažejo svoje pravo znanje.

(3) Ustno spraševanje je lahko tudi dobra oblika ponavljanja in utrjevanja znanja za preostale dijake v razredu.

(4) Z ustnim spraševanjem lahko zelo dobro preverjamo znanje bolj teoretičnih tem (npr. poznavanje in razumevanje definicij in izrekov) in geometrijskih predstav.

Slabosti

(1) Nekateri dijaki imajo zelo velik strah pred javnim nastopanjem ali pa težave z ustnim izražanjem. Med spraševanjem lahko popolnoma odpovedo, kljub temu da preverjane vsebine solidno obvladajo.

(2) Če želimo dati realno in pisni oceni vsaj približno enakovredno ustno oceno (z internim aktom aktiva sicer lahko težo ustne ocene tudi zmanjšamo in s tem omogočimo krajša ocenjevanja), mora biti spraševanje dovolj obsežno in temeljito. Za posamičnega dijaka lahko to pomeni časovno tudi do polovico šolske ure, kar je pri danem obsegu ur, predpisanih vsebinah in dodatnih obveznostih zelo težko (pri 32 dijakih in dveh ustnih ocenah bi samo ustno spraševanje pokrilo 32 šolskih ur, kar je enakovredno dvomesečnemu pouku matematike na gimnaziji — takšna izraba časa ni predvidena v nobenem učnem načrtu).

(3) Pri mnogih matematičnih vsebinah je bolj kot razumevanje teoretičnega ozadja pomembno solidno obvladovanje računskih spretnosti. V teh primerih je pisno preverjanje dosti bolj učinkovito in časovno ekonomično.

(4) V problematičnih razredih lahko ustno spraševanje povzroči probleme z zaposlenostjo in disciplino preostalih dijakov.

(5) Ustno spraševanje je veliko bolj subjektivno kot pisno ocenjevanje. Možnost nepoštene ocene je bolj verjetna zaradi osebnega poznavanja dijaka in morebitnih socialnih pritiskov.

Prednosti in slabosti ustnega preverjanja znanja kažejo, da je najbrž nemogoče najti univerzalno priporočilo. Pogostost in temeljitost spraševanja naj bo prepuščena predvsem učiteljevi presoji, ki pa je odvisna od tipa preverjane snovi, dinamike predelave učnega načrta ter specifičnih učiteljevih in dijakovih preferenc.

8. Napovedano ustno ocenjevanje znanja

Kljub temu da pravilnik ne predpisuje napovedanega ustnega ocenjevanja, pa napoved za teden vnaprej zahteva večina internih pravilnikov šol.

Prednosti

(1) Dijak ve, kdaj bo vprašan, zato ima dovolj časa, da se na spraševanje dobro pripravi. Za učitelja in preostale dijake je takšno spraševanje veliko bolj prijetno in koristno.

(2) Pri zares velikem številu predmetov, ki se poučujejo v istem letniku, je težko pričakovati, da bo dijak hkrati dobro pripravljen na vse predmete. Zaradi napovedanih terminov si lahko dijak vnaprej enakomerno porazdeli bolj intenzivno učenje različnih predmetov.

(3) Spraševanje tako ne more biti trenutna kazenska sankcija.

Slabosti

(1) Dijaki se lahko z različnimi neupravičenimi izgovori in izostanki izogibajo spraševanju. Nekatere šole izogibanje spraševanju kaznujejo z ukinitvijo napovedi spraševanja.

(2) Med letom dijaki niso sproti toliko pripravljeni, kot bi bili sicer. Učijo se v kosih, samo pred ocenjevanji znanja.

Ali bi morda dobro premišljena kombinacija napovedanega ustnega spraševanja (za „celo“ oceno) in redno pridobljenih (nenapovedanih) delnih ocen ohranila prednosti in se izognila slabostim? Ali obstaja še kakšna druga dobra rešitev, ki so jo učitelji izoblikovali sami (sedaj ali pa v letih pred omejitvami)? Ali lahko odločitev o napovedi prepustimo dogovoru med aktivom, učiteljem in dijaki?

9. Pritožbe nad ocenjevanjem

Na šolah včasih prihaja do pritožb nad učiteljevim delom in še posebej nad ocenjevanjem, kljub temu da se učitelj drži pravil. Temu bi se velikokrat izognili, če bi kot samoumevno sprejeli reševanje problemov po načelu postopnosti. To bi marsikje otoplilo tako odnose med kolegi v zbornici in z vodstvom. O konkretni težavi se je treba temeljito pogovoriti in jo poskušati dobronamerno rešiti, pri tem pa se je treba pri reševanju težav v naslednjem vrstnem redu obrniti:

(1) najprej na učitelja samega;

(2) če ne pride do dogovora, na razrednika, ki nikoli ne sme omalovaževati kolega pred dijaki;

(3) potem na svetovalnega delavca;

(4) šele potem na ravnatelja oz. na interno šolsko komisijo, ki je namenjena reševanju pritožb;

(5) in če res ne more priti do dogovora, na direktorja ali na inšpekcijo.

Takšen postopek je običajna praksa na nekaterih šolah in prispeva k večjemu zaupanju med učitelji v zbornici. Njegovo dosledno upoštevanje tudi pripomore k samovzgoji vseh udeležencev v učnem procesu.

10. Sklep

Spoštovanje zakonov in pravilnikov zagotavlja odgovorno in kvalitetno sobivanje ljudi v družbi. Kadar se zdi, da zakoni tega ne omogočajo dovolj, je treba o njih razpravljati in jih skušati izboljšati. Veljavni pravilnik precej radikalno omejuje učiteljevo avtonomijo pri ocenjevanju, še posebej, če pravila primerjamo s preteklo dolgoletno in v glavnem uspešno prakso. Večina pravil in omejitev je smiselna in dobro premišljena, nekatera pa se vsaj zdijo kot nezaupnica učitelju in velikokrat dosežejo napačen učinek. Zato bi bilo nujno, da v prihodnosti učitelji praktiki sodelujejo pri podobnih (in seveda tudi drugačnih) odmevih ob aktualnih vprašanjih iz življenja naše šole.

LITERATURA

[1] D. Kobal, *Iluzija objektivnosti ali objektivnost odgovornosti*, Obornik mat. fiz. **54** (2007) 1, str. 18–28

[2] S. G. Krantz, *How to Teach Mathematics* (druga izdaja), AMS, Providence, Rhode Island, 1998

[3] A. S. Posamentier, B. S. Smith in J. Stepelman, *Teaching Secondary Mathematics – Techniques and Enrichment Units* (sedma izdaja), Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey, 2006

[4] J. A. Van de Walle, *Elementary and Middle School Mathematics – Teaching Developmentally* (šesta izdaja), Pearson Education, Boston, 2007

[5] *Pravilnik o ocenjevanju znanja v srednjih šolah*, `http://www.uradni-list.si/1/content?id=57605`

[6] *Učni načrt za pouk matematike v gimnazijah*, Spletne učilnice študijskih skupin ZRSŠ, podstran Matematika-GIM, `http://info.edus.si/studijske/`

MATEMATIČNE NOVICE

Primož Moravec je rešil enega od Schurovih problemov

V članku [1] je **Primož Moravec** našel pozitiven odgovor na vprašanje, ki je mučilo že slavnega matematika **Issaia Schura (1875–1941)**. Kot mi je sam napisal:

Problem, ki ga je Schur zastavil, je bil, ali se da eksponent Schurovih multiplikatorjev končnih grup danega eksponenta n omejiti s funkcijo, ki je odvisna le od n. Dokazal sem, da to drži, celo za lokalno končne grupe.

Tedaj nisem vedel, da je to njegov problem, zato je članek v resnici bolj osredotočen na druga vprašanja. Na zgodovinsko ozadje me je opozoril Avinoam Mann (urednik v Israel J. Math.), ki pravi, da je bil problem (sicer ne pod kakšnim posebnim imenom) del folklore. Poleg tega je dokaz (pozitivnega odgovora) razmeroma kratek ..., uporablja pa še rezultat iz mojega prejšnjega članka. Vse temelji na pozitivni rešitvi skrčenega Burnsideovega problema (the restricted Burnside problem), za katero je Zelmanov leta 1994 dobil Fieldsovo medaljo.

In skromno pristavlja:

Čisto po pravici, stvari ne štejem kot hud dosežek, uporabil sem le nekaj močnih kanonov in „manjši“ trik ...

ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA – nova matematična revija s sedežem v Sloveniji

Petega septembra smo na Fakulteti za matematiko in fiziko imeli praznik: predstavitev prve številke nove revije s področja diskretne matematike. Idejni oče je **Tomaž Pisanski**. On in **Dragan Marušič** sta ustanovna in glavna urednika. Tehnična urednika sta **Ted Dobson** z Mississippi State University in **Marko Boben**. Spletno in tiskano verzijo pripravlja **Alen Orbanić**, pomagata mu **Boris Horvat** in **Primož Lukšič**. Uredniški odbor ima 31 članov iz 11 držav. Izdajatelji so **DMFA**, **IMFM** in **Univerza na Primorskem**. Revija je prosto dostopna na spletu [2]. Prva številka prinaša 10 člankov. Predvideni sta dve številki na leto. Upamo, da bomo tiskano verzijo lahko zamenjevali za druge revije in s tem pomagali naši Matematični knjižnici. Revijo v celoti recenzira Mathematical Reviews.

Glavna urednika Tomaž Pisanski in Dragan Marušič na predstavitvi prve številke revije

Na predstavitvi so poleg glavnih urednikov govorili še rektor Univerze na Primorskem **Rado Bohinc**, direktor IMFM **Matjaž Omladič**, predsednik DMFA **Milan Hladnik** in Ted Dobson (ki skrbi za razdeljevanje rokopisov recenzentom).

Najbolj iskani članki

Na strani *MaFiRaWiki* [3] najdemo (čisto na dnu) uvrstitve slovenskih matematikov na seznam Top 25 najbolj iskanih člankov četrtletja v matematičnih revijah založbe Elsevier [4]. Nekaj teh uvrstitev smo predstavili v prejšnjih novicah. Zdaj imamo po zaslugi **Tomaža Pisanskega** popoln pregled do septembra 2007. MaFiRaWiki je, kot piše v uvodu, posvečen zbiranju znanja o matematiki, fiziki in računalništvu in na njem najdemo precej zanimivega.

Holywood in matematika

Revija Notices of the American Mathematical Society (dostopna na medmrežju na [5]) ima tudi rubriko Book List. V njej je seznam matematičnih knjig, dostopnih širšemu občinstvu, ki so izšle v zadnjih dveh letih. Ustavimo se tokrat ob ameriški knjigi [6], ki naj bi otrokom, najstnicam in najstnikom v starosti 11–14 let zmanjšala strah pred šolsko matematiko. Naslov bi prevedli nekako kot *Matematika ni zoprna – kako preživiš matematiko v višjih razredih osnovne šole in pri tem ne znoriš ali si polomiš nohte.* Sama knjiga za nas verjetno ni toliko zanimiva kot dejstvo, da jo je napisala filmska igralka Danica McKellar. Dobrih trideset let stara avtorica je svojo umetniško kariero začela že kot otrok in nastopa predvsem v nadaljevankah. Vmes je štiri leta študirala matematiko na univerzi UCLA, diplomirala summa cum laude in kot dodiplomska študentka postala celo soavtorica članka iz matematične fizike [8]. Intervju z njo lahko poslušamo ali naložimo kot MP3 datoteko [7] na ameriškem National Public Radio, kjer je skupaj z drugimi gosti nastopala v oddaji Science Friday. (Upam, da bo datoteka dostopna tudi ob natisu tega Obzornika, sicer pa boste morda v arhivu našli kako drugo zanimivost.)

LITERATURA

[1] Moravec, P., *Schur multipliers and power endomorphisms of groups*, J. Algebra **308** (2007), str. 12–25.

[2] *Ars Mathematica Contemporanea*, http://amc.imfm.si/.

[3] *Glavna stran – MaFiRaWiki*, http://wiki.fmf.uni-lj.si/.

[4] *ScienceDirect Top 25 Hottest Articles* (uspehi slovenskih matematikov), http://wiki.fmf.uni-lj.si/wiki/ScienceDirect_Top_25_Hottest_Articles .

[5] *Notices of the AMS*, http://www.ams.org/notices/.

[6] McKellar, D., *Math Doesn't Suck: How to Survive Middle-School Math Without Losing Your Mind or Breaking a Nail*, Hudson Street Press 2007.

[7] *Women, Girls, and Math* (intervju z Danico McKellar), http://www.sciencefriday.com/pages/2007/Sep/hour2_092107.html .

[8] Chayes, L., McKellar, D. in Winn, B., *Percolation and Gibbs states multiplicity for ferromagnetic Ashkin-Teller models on* $\mathbb{Z}^2$, Journal of Physics A: Mathematics and General **31** (1998), str. 9055–9063.

Peter Legiša

58. TRADICIONALNO SREČANJE NOBELOVIH NAGRAJENCEV

Od 29. junija do 4. julija letos je v nemškem mestu Lindau, ki leži ob Bodenskem jezeru na Bavarskem, potekalo 58. tradicionalno srečanje Nobelovih nagrajencev. Poleg 24 dobitnikov Nobelove nagrade se ga je udeležilo

557 mladih znanstvenikov z vsega sveta. Med njimi sva bili tudi dve znanstvenici iz Slovenije, ki sva se na razpis za srečanje Nobelovih nagrajencev prijavili Slovenski akademiji znanosti in umetnosti.

Vsakoletna srečanja Nobelovih nagrajencev v mestu Lindau so svetovno priznani forum za prenos znanja med različnimi generacijami znanstvenikov. V sklopu predavanj na srečanjih se lotevajo predvsem aktualnih znanstvenih tem in predstavljajo področja znanstvenih raziskav v prihodnosti. Letos je bil forum posvečen fiziki, govorili so tudi o aktualnih problemih globalnega segrevanja in reševanja energetske krize. Mladi znanstveniki imajo tako na predavanjih, seminarjih in z medsebojnim druženjem odlično priložnost za sodelovanje in izmenjavo informacij z največjimi imeni znanstvenega sveta. Ti prihajajo v to idilično nemško mesto vse od leta 1951. Takrat sta se fizika iz Lindaua, dr. Franz Karl Hein in prof. dr. Gustav Parade, s članom švedske kraljeve družine, grofom Lennartom Bernadottom, dogovorila za srečanja, ki naj bi aktualni in prihodnji znanstveni eliti pomenila nekakšno okno v svet. Prva leta so bila srečanja namenjena le Nobelovim nagrajencem, leta 1954 pa je grof Bernadotte pričel vabiti tudi nadarjene študente z nemških univerz, kasneje pa še mlade znanstvenike z vsega sveta.

Po odhodu nobelovcev se nas je nekaj deset mladih znanstvenikov udeležilo še štiridnevnega pokonferenčnega programa. Najprej so nas sprejeli na Inštitutu za fiziko Univerze v Stuttgartu, kasneje pa še na Inštitutu za raziskavo trdne snovi Maxa Plancka, kjer smo se seznanili z raziskavami materialov in tehnologij prihodnosti kot tudi študijami kompleksnih materialov in nanostruktur. Pregled priznanih znanstvenih ustanov smo končali na Raziskovalnem centru Karlsruhe, kjer se ukvarjajo z nanotehnologijo, nuklearno fiziko in astrofiziko ter meteorologijo in klimatologijo.

Naj na koncu citiram Nobelovega nagrajenca, profesorja dr. Ivarja Giaverja iz Norveške: „Za Nobelovo nagrado moraš biti radoveden, tekmovalen, kreativen, samozavesten, skeptičen, predvsem pa moraš imeti srečo …“.

Video posnetki predavanj Nobelovih nagrajencev v mestu Lindau so zabeleženi na spletni strani srečanj `http://www.lindau-nobel.de/`.

Maja Fošner

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER 2008
Letnik 55, številka 5
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki — **Strani**

Huygensova naloga, Marko Razpet 161–167
Negativni lomni količnik, Janez Strnad 176–184

Šola

Omejitve pri ocenjevanju znanja matematike v gimnazijah,
Marjan Jerman in Samo Repolusk 185–197

Vesti

Ob 80. obletnici rojstva Franceta Križaniča, Matjaž Omladič 167–171
Nekaj spominov na Franceta Križaniča, Peter Legiša 171–175
Matematične novice, Peter Legiša 198–200
58. tradicionalno srečanje Nobelovih nagrajencev, Maja Fošner 200–XIX

CONTENTS

Articles — **Pages**

The Huygens problem, Marko Razpet 161–167
Negative index of refraction, Janez Strnad 176–184

School

Limitations on the assessment of mathematics in secondary schools,
Marjan Jerman and Samo Repolusk 185–197

News 167–XIX

Na naslovnici je kocka iz metamateriala s stranico 25 mm, ki lomi mikrovalove v „napačno“ smer. Fotografijo je posnel dr. Minas H. Tanielian pri družbi Boeing v Seattlu. Obema se zahvaljujemo za prijazno dovoljenje za objavo (glej članek na strani 176).