

# **Konferenca slovenskih matematikov 2023**

petek, 15. september 2023 - sobota, 16. september 2023

Festivalna dvorana Bled

## **Konferenčni zbornik**

urednika: Jasna Prezelj, Aleš Mohorič

Konferenca slovenskih matematikov 2023

Konferenčni zbornik

Uredila: dr. Jasna Prezelj, dr. Aleš Mohorič

Oblikovala: dr. Jasna Prezelj

Izdalo: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Predstavnica: dr. Mojca Vilfan

Kraj in leto izida: Ljubljana, 2024

Prva elektronska izdaja objavljena na povezavi:

<https://www.dmf.si/Zalozba/Monografije/KSM2023.pdf>

Cobiss ID: 218001411

© DMFA Slovenije, 2024

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 218001411

ISBN 978-961-91896-9-6 (PDF)

# Kazalo

<b>Pedagoška sekcija</b> . . . . .	1
Kako oplemenititi pouk matematike . . . . .	1
Povezovanje matematike in fizike pri obravnavi kvadratne funkcije . . . . .	4
Volilni sistemi v Sloveniji za matematike . . . . .	5
Pouk fizike v waldorfski šoli . . . . .	10
Fiz'ka cveke pr' tiska, kemija pa zabija. Menda ne zaradi matematike? . . . . .	13
Iskanje rešitev matematičnih problemov s pomočjo umetne inteligence . . . . .	17
Matematični tabor - priprave na maturo . . . . .	20
Fizika po gasilsko (vrvne tehnike in škripci) . . . . .	22
S programiranjem v matematiko in z matematiko v programiranje . . . . .	26
Glava, telo in srce . . . . .	31
Predstavitve naravoslovnega dne z merjenjem v bližini šole . . . . .	35
Verjetnost brez mere . . . . .	36
Polinomi in pomoč sodobne IKT-tehnologije . . . . .	37
Bibliometrična analiza znanstvenih člankov s področja igrifikacije pri pouku matematike . . . . .	37
Fizika skozi čas: vzpostavitev interaktivnega muzeja za poučevanje in raziskovanje fizike . . . . .	42
<b>Raziskovalno-aplikativna sekcija</b> . . . . .	46
Lastnosti orešnih grafov ter njihove aplikacije . . . . .	46
O Maiorana-McFarland funkcijah, ki ležijo zunaj drugih pomembnih razredov . . . . .	46
Kritične povezave v Ripsovih kompleksih ter vztrajnost . . . . .	49
Tranzitivnost in slučajna cenzura . . . . .	50
Individualni razvoj škod s pomočjo strojnega učenja . . . . .	53
Linearizacija viskoelastičnosti . . . . .	57

On Laplacians on infinite metric graphs . . . . .	62
Stohastični individualni razvoj škod . . . . .	62
Parcialne preslikave, polgrupe in teorija dualnosti . . . . .	65
Vztrajna homologija in rekonstrukcijski rezultati . . . . .	69
Uporaba matematike v industriji . . . . .	72
P(izraz gramatika) . . . . .	75
O solitonih . . . . .	77
Natančne predstavitve delov sfere nad platonskimi telesi s pomočjo racionalnih S-ploskev	83
MLFMF: Podatkovne množice za strojno učenje za formalizacijo matematike . . . . .	88
Kvazikonformna kirurgija in Hermanovi kolobarji . . . . .	89
<b>Sponsorji in soorganizatorji . . . . .</b>	<b>91</b>

## PEDAGOŠKA SEKCIJA

36

### Kako oplemenititi pouk matematike - primeri iz OŠ Lila

Avtorica: Renata Babič<sup>1</sup><sup>1</sup> OŠ Lila Ljubljana

V članku so predstavljeni primeri, kako sem pouk matematike v OŠ Lila oplemenitila z različnimi dejavnostmi. Te so služile aktivnemu sodelovanju učencev, bolj poglobljenemu razumevanju vsebine, lahkotnejšemu utrjevanju ključnih znanj in osmišljanju vsebine preko povezave z resničnim življenjem.

#### 1. O osnovni šoli Lila

OŠ Lila je osnovna šola po posebnih pedagoških načelih, imenovanih Vzgoja za življenje. Po teh načelih deluje po svetu, med drugim tudi v Italiji, približno 10 šol. Program OŠ Lila je javno veljaven in sofinanciran s strani Ministrstva za vzgojo in izobraževanje. Pri pouku zavedno, sistematično in načrtno razvijamo otrokovo telo, čustva, voljo in um ter osebni stik med učiteljem in učencem, s katerim razvijamo socialne in čustvene kompetence, vključno z odnosnimi. Pri načrtovanju učne ure si prizadevamo upoštevati otrokove interese, vnesti povezave z resničnim življenjem in okolico ter jo strukturirati po načelih učenja v toku. Z organizacijskega vidika so oddelki razmeroma majhni (do 15 otrok) in starostno mešani, pri čemer sta pri vsaki učni uri prisotna dva učitelja.

V nadaljevanju bom predstavila nekaj aktivnosti, ki so bile izvedene v razredih zadnje triade. Uporabljene so bile kot uvodne aktivnosti, s katerimi sem učence navdušila nad prihajajočo vsebino, ali kot aktivnosti, kjer so v dvojicah ali skupinah sodelovali učenci različnih starostnih skupin znotraj svojega oddelka, ali pa kot aktivnosti, ki so služile utrjevanju snovi ter poglobljanju razumevanja. Predstavila bom tudi povezave z resničnim življenjem, ki so bile del nekaterih aktivnosti, ter aktivnosti, ki so služile razvoju kreativnega mišljenja in povezovanju različnih vsebin.

#### 2. Potence, koreni in medsebojna odvisnost

**2.1. Potence.** Učbeniki potence opredeljujejo zgolj formalno kot zmnožek enakih faktorjev, pri tem pa potrebe po uvedbi novega matematičnega pojma ne razlagajo. Učencem lahko uvedbo potence utemeljimo kot krajši zapis, enako kot pri množenju, kjer vsoto enakih seštevanecv skrajšamo v zapis z množenjem, a jih ta utemeljitev večinoma ne prepriča. Potrebna je torej drugačna utemeljitev pomembnosti potenc.

Potence se v vsakdanjem življenju pojavljajo v veliko primerih. Pomen naraščanja potence za velikost dobljene vrednosti smo ugotavljali pri pouku v treh življenjskih primerih, ki so osnovnošolskim učencem dobro poznani. To so potresi, prepogibanje papirja in rast bakterij. Pri prepogibanju papirja, kjer papir vedno prepognemo čez polovico, štejemo število plasti. Na začetku imamo 1 plast, kar ustreza ničtemu koraku. Pri prvem koraku imamo 2 plasti, pri drugem imamo 4 plasti, pri tretjem 8 plasti itd. Hitro vidimo, da imamo pri  $n$ -tem koraku  $2^n$  plasti. Dobra stran tega primera je, da lahko z učenci to preizkusimo. Drugi primer so potresi. Agencija republike Slovenije za okolje na svoji spletni strani navaja, da "P]orast magnitude za eno enoto pomeni približno dvaintridesetkratno povečanje sproščene seizmične energije potresa" ([1]). Za predstavo o moči potresa zadošča, da trditev za osnovnošolske učence nekoliko poenostavimo. Učencem sem tako predstavila, da vsaka naslednja stopnja po Richterjevi lestvici pomeni 30-krat močnejši potres. To pomeni, da je potres 7. stopnje 30-krat močnejši od potresa 6. stopnje in 900-krat močnejši od potresa 5. stopnje ter 27000-krat močnejši od potresa 4. stopnje itd. S tem enostavno utemeljimo potrebo po uporabi potence. Zelo podobno je z rastjo bakterij. Učencem razložimo, na kakšen način se razmnožujejo bakterije. Če v sterilno okolje spustimo eno bakterijo, se bo ta čez čas razdelila v dve. Ti dve se bosta čez čas vsaka zase ponovno razdelili in imeli bomo štiri bakterije itd. Zopet dobimo potence števila 2.

Učni uri, ki sem ju namenila povezavi teme o potencah z vsakdanjim življenjem, sem strukturirala kot delo po postajah. Vsaka postaja je imela delovni list, na katerem so morali učenci nekaj izračunati, poskusiti, narisati, razmisliti ali razložiti. Zasnovala sem 4 postaje: prepogibanje papirja, potresi, rast bakterij in zapis majhnih in velikih števil. Spodaj so na kratko predstavljena navodila za prve tri postaje.

- (a) **Prepogibanje papirja:** Preko QR-kode so dostopali do posnetka z naslovom Eksponentna rast: s prepogibanjem papirja do Lune, ki je prostodostopen na portalu YouTube ([4]). Pripravila sem jim različne vrste papirja in sami so preizkusili, kolikokrat ga lahko prepognejo. Naslednja naloga je zahtevala, da izpolnijo preglednico, kjer so za vsak korak, od prvega do desetega, izračunali število plasti. To so nato prikazali še z linijskim diagramom. Učenci devetega razreda so nato razmislili še, kakšno je razmerje števila plasti med dvema sosednjima korakoma. Za vse pa je bila še naloga, pri kateri so morali razmisliti, od česa je odvisno število možnih prepogibov lista papirja. Je lažje, če je tanjši, večji, manjši itd.?
- (b) **Potresi:** Ob danem prikazu potresov in njihovih magnitud na zemljevidu Slovenije so morali primerjati različne stopnje potresov (npr. Potres 3. stopnje je  $x$ -krat močnejši od potresa 1. stopnje.). Nato so preko QR-kode dostopali do spletne strani ARSO, kjer so zabeleženi vsi zadnji potresi v Sloveniji ([2]). Ob tem so morali razmisliti, kako pogosti so potresi v Sloveniji, in povedati, ali so kakšen potres že doživeli.
- (c) **Rast bakterij:** Na učnem listu je bil dan primer laktobacilov. To so bakterije, ki imajo ključno vlogo pri fermentaciji mlečnih izdelkov. Njihovo število se podvoji vsake pol ure (dejansko je vsakih nekaj ur, a sem pri učencih želela vzbuditi občutek hitrega deljenja). Znova so morali izračunati število bakterij po različno pretečenem času, če smo v kozarec mleka spustili eno bakterijo. Nato so morali razmisliti, zakaj bakterije ne preplavijo sveta, če se tako hitro širijo.

Čeprav zgornji primeri opisujejo eksponentno odvisnost med dvema količinama, se učencem v osnovni šoli ne razjasnjuje razlike med eksponentno in potenčno odvisnostjo. Glavni namen predstavljenih aktivnosti je razvijanje zmožnosti računanja potenc različnih števil in pridobivanje vpogleda v uporabnost matematike v vsakdanjem življenju.

**2.2. Koreni.** Obravnava korenov je najbolj smiselna takoj za obravnavo teme o potencah, saj se v sklopu potenc bolj podrobno spozna kvadriranje, iz tega pa se nato izpelje pojem kvadratnega korena. Tu sem za utrjevanje ocen korenov števil do 100 za učence pripravila naslednjo igro. Na tablo sem narisala številsko premico in na mizo položila dva kupa navadnih igralnih kart s hrbtno stranjo navzgor. Ko je učenec obrnil karto iz obeh kupov, je imel predseboj dvomestno število. Oceniti je moral, kje na številski premici leži koren njegovega števila. Npr.  $\sqrt{26}$  leži med 5 in 6.

**2.3. Medsebojna odvisnost.** Kot sem že zapisala, teme o potencah nisem izkoristila za obravnavo medsebojne odvisnosti dveh količin. Le-ta se obravnava kot posebna tema v 8. razredu, kjer se poleg samega razumevanja, kaj pomeni odvisnost dveh količin, podrobneje spozna le premo in obratno sorazmerje. Pri tem se spozna tudi pojem grafa. Za uvod v temo medsebojne odvisnosti sem učencem skupine, v katero sta bila združena 8. in 9. razred, pripravila igro spomina. Na kartice sem natisnila količine, ki so medseboj odvisne (npr. količina bencina in prepotovana razdalja). Kartice so bile obrnjene s hrbtno stranjo navzgor, učenci pa so morali po pravilih spomina iskati pare medseboj odvisnih količin. Igro sem otežila še tako, da sem dodala pare količin, ki medseboj niso odvisni (npr. čas in vreme) ter konstanto (višina Triglava). Tu bi lahko v nadaljevanju ure sledila diferenciacija glede na predznanje, pri čemer bi učenci 8. razreda nadaljevali s spoznavanjem zakonitosti medsebojne odvisnosti, učenci 9. razreda pa bi lahko spoznali pojem funkcije in raziskovali povezavo med različnimi predpisi funkcij in njihovimi grafi. Pri tem bi se lahko naslonili na njihovo predhodno znanje o potresih, prepogibanju papirja in bakterijah ter s tem nakazali na obstoj eksponentne funkcije.

Zgoraj zapisane diferenciacije nisem izpeljala, sem pa pripravila aktivnost, kjer sem želela, da se urijo v branju, skiciranju in razumevanju grafov. To je namreč zelo pomembna veščina, saj je srednješolska matematika preprejena z risanjem in branjem grafov različnih matematičnih funkcij. Učencem sem dala na voljo posode različnih oblik, njihova naloga pa je bila, da vanje čimbolj enakomerno nalivajo vodo in opazujejo, kako se spreminja višina vodne gladine. Nato so morali narisati obliko posode in pripadajoči graf.

### 3. Geometrija

**3.1. Krog in geometrijska telesa.** Z učenci 8. in 9. razreda smo se približevali koncu šolskega leta in opazila sem, da je njihova motivacija za reševanje geometrijskih nalog začela padati. Razmišljala sem, kako bi jih lahko motivirala za doseganje učnih ciljev, ki sem si jih zastavila. Učenci 8. razreda so morali še spoznati temo kroga, kjer bi spoznali obseg in ploščino kroga, dolžino krožnega loka in ploščino krožnega izseka. Učenci 9. razreda pa so v tistem času spoznavali geometrijska telesa.

Ker krog in krožni izsek hitro povežemo s pico, sem prišla na idejo, da jim bom zastavila naslednji izziv: Rešite vse naloge na temo pice, ki vam jih bom pripravila. Za nagrado bomo odpovedali vaše šolsko kosilo in vas počastili s picami! Učenci so se z izzivom strinjali in njihova motivacija za osvajanje nove snovi se je dvignila. Nekaj ur smo porabili, da smo spoznali novo snov, povadili uporabo formul ter rešili nekaj primerov. Učenci 9. razreda so nadaljevali s spoznavanjem geometrijskih teles, saj sem imela namen v naloge vključiti računanje prostornine in površine škatle za pico (prizme) in prostornino pice (če jo modeliramo z valjem). V tem času sem doma pripravila učni list s 16 nalogami. Vse razen ene naloge so avtorske. Naloge niso bile le na temo kroga, ampak so zajemale več snovi, ki smo jih že obdelali, ali v tistem šolskem letu ali prej. Navajam le nekaj najbolj zanimivih:

- (a) V piceriji XYZ ponujajo srednjo, veliko in družinsko pico. Njihovi premeri so 33 cm, 36 cm in 50 cm. Njihove cene so 9,30 EUR, 10,30 EUR in 20,10 EUR. Katera pica se cenovno najbolje splača?
- (b) Neka družina je odšla na kosilo v picerijo XYZ. Pri pici imajo raje nadev kot skorjo. Odločajo se, ali bi naročili dve veliki pici ali eno družinsko. Pri kateri odločitvi bodo dobili manj kruhove skorje, če je skorja ob robu pice debela 2 cm? Kolikšna je razlika?
- (c) Izračunaj, koliko stanejo sestavine za 1 pico. Cene izdelkov poišči v spletni trgovini Mercatorja in jih preračunaj na konkretne količine iz recepta. Nadev določi sam, za testo pa upoštevaj naslednji recept: 320 ml mlačne vode, 7 g suhega kvasa, 13 g sladkorja, 30 ml olivnega olja, ščepec soli in 500 g moke.
- (d) Koliko različnih vrst pic lahko picopek sestavi, če poleg paradižnikove mezge in sira doda še dva dodatka? Na voljo ima rukolo, jajček, papriko in gobice.
- (e) Na dom ste naročili pico s premerom 36 cm. Škatla, v kateri je bila dostavljena pica, se znotraj tesno prilega pici. Nariši skico.
  - Izračunaj obseg, ploščino in diagonalo ploskve škatle, na kateri leži pica.
  - Kolikšen odstotek spodnje ploskve škatle ne prekriva pica?
  - Izračunaj telesno diagonalo škatle, če je škatla visoka 5 cm.
  - Izračunaj površino in prostornino škatle. (Za katero telo gre?)
  - Koliko kartona je potrebno za 1 škatlo? Upoštevaj, da se nekatere mejne ploskve v resničnosti podvojijo. Koliko takih škatel gre v nahrbtnik dostavjalca? Dimenzije nahrbtnika poišči preko QR-kode.

Naloge poleg kroga in geometrijskih teles obsegajo tudi odstotke, kombinatoriko in premo sorazmerje. Druge naloge so vsebovale tudi primerjanje ulomkov, obratno sorazmerje, koordinatni sistem in dolžino loka ter ploščino krožnega izseka.

**3.2. Dva geometrijska izziva za učence.** Kot uvod v novo učno snov učencem rada zastavljam izzive. Spodaj sta zapisana dva izziva.

- (a) Pri spoznavanju romba (7.r.) in pri uporabi Pitagorovega izreka (8.r.) sem učence izzvala z enakim izzivom. Na voljo sem jim dala več različnih pravokotnih trikotnikov, kjer je imel vsak še 3 svoje kopije. Trikotniki so bili medseboj pomešani. Njihova naloga je bila, da najdejo 4 skladne trikotnike in iz njih sestavijo romb. S tem so prišli do domneve, da se diagonali v rombu sekata pod pravim kotom, saj so le na ta način lahko sestavili romb (hipotenuza trikotnika je bila torej stranica romba).
- (b) Avtorica Jo Boaler v svoji knjigi *Mathematical Mindsets* ([3]) navaja izziv, ki ga lahko uporabimo v zadnji triadi, ko obravnavamo geometrijske teme. Učenci morajo iz lista kvadratne obliki narediti naslednje:
  - kvadrat, ki ima  $\frac{1}{4}$  ploščine osnovnega kvadrata;
  - trikotnik, ki ima  $\frac{1}{4}$  ploščine osnovnega kvadrata;
  - še en tak trikotnik, ki ni podoben trikotniku iz prejšnje točke;
  - kvadrat, ki ima  $\frac{1}{2}$  ploščine osnovnega kvadrata;
  - še en tak kvadrat.

#### 4. Drugo

V tem razdelku navajam še nekaj idej, ki sem jih izpeljala.

- (a) Z učenci 8. in 9. razreda smo spoznali tudi matematično in empirično verjetnost. V razlago sem vključila poskus, kjer so z metanjem kocke in beleženjem rezultatov preizkusili trditev, da je verjetnost za posamezen izid  $\frac{1}{6}$ . Ker pa so v tistem času radi med odmorom igrali tarok, sem uro o verjetnosti nadgradila še s poslušanjem epizode Kolikšna je verjetnost, da bi pri taroku pri igri v štiri v roke dobili same taroke? v oddaji Radiovedni na Valu 202. V njej dr. Uroš Kuzman s Fakultete za matematiko in fiziko na Univerzi v Ljubljani postopoma razloži, kako bi takšno verjetnost lahko izračunali. Učencem sem pripravila učni list, ki je sledil njegovi razlagi. Skupaj smo poslušali posnetek, ga vmes ustavljali, da sem razložila profesorjeve odgovore, učenci pa so si to zapisali.
- (b) Ob koncu šolskega leta sem z učenci zadnje triade priredila filozofsko debato. Razdelila sem jih v dve skupini in jih posedla tako, da so si sedeli nasproti. Ena skupina je morala dano trditev vedno zagovarjati, druga pa spodbijati. Navajam nekaj trditev ali vprašanj iz debate: ali števila obstajajo; geometrija je lažja od algebre; matematika je lepa; nemogoče je biti matematik, ne da bi bil tudi pesnik (Sofia Kovalevskaya).
- (c) Boaler v svoji knjigi *Mathematical Mindsets* ([3]) navaja še en izziv: vsa števila od 1 do 20 zapiši samo s pomočjo štirih štiric, pri tem so dovoljene vse matematične operacije in drugi znaki. Na primer, velja  $0 = 4 + 4 - 4 - 4$  in  $1 = \frac{4}{4} + 4 - 4$ . Vedno morate uprabiti vse štiri štirice. Zanimivo je opazovati učence, ko se lotijo te naloge. Prej ali slej ugotovijo, da jih zgolj osnovne operacije nekoliko omejujejo in začnejo razmišljati še širše. To je odličen izziv za razvijanje kreativnega mišljenja.

## 5. Zaključek

Pouk matematike je pogosto kritiziran zaradi svoje togosti, neskončnega utrjevanja znanja preko novih nalog in neopažene povezave z resničnim življenjem ter pomanjkanja raznolikosti didaktičnih pristopov. Opazila sem, da se ob doslednem vključevanju predstavljenih obogatitev v pouk matematike učenci teh obogatitev veselijo. Nagovorijo jih k aktivnemu in zavzetemu sodelovanju ter v njih prižgejo lučko radovednosti. To pa je zame ključ do razvijanja pozitivnega odnosa do matematike. Predstavljene ideje bi se dalo uresničiti tudi v razrednih javnih šol, saj zahtevajo le večjo količino potrebnega materiala (več posod za risanje grafov, več kompletov kart za ocene korenov itd.), kar pa zahteva le dobro organiziranost učitelja.

[1] ARSO. (b.d.). *Vprašanja in odgovori*.

Dostopno na [https://potresi.arso.gov.si/doc/dokumenti/vprasanja\\_in\\_odgovori/](https://potresi.arso.gov.si/doc/dokumenti/vprasanja_in_odgovori/).

[2] ARSO. (b.d.). *Zadnji potresi*. Dostopno na <https://potresi.arso.gov.si>.

[3] Boaler, J. (2016). *Mathematical Mindsets. Unleashing Students' Potential Through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. Jossey Bass, Wiley.

[4] TED-Ed. (19.4.2012). *Exponential growth: How folding paper can get you to the Moon*. Dostopno na <https://www.youtube.com/watch?v=AmFMJC45f1Q>.

[5] Val 202. (3.11.2021) *Kakšna je verjetnost, da bi pri taroku pri igri v štiri v roke dobili same taroke?* Dostopno na <https://val202.rtvsl.si/podcast/radiovedni/173251211/174819111>.

## Povezovanje matematike in fizike pri obravnavi kvadratne funkcije

**Avtor:** Aljoša Berk<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Srednja tehniška in poklicna šola Trbovlje

Projektne dnevi dijakov drugega letnika programa SSI so bili posvečeni proučevanju in analizi kvadratne funkcije ter prepoznavanju parabol v vsakdanjiku. Parabole okoli nas so: poševni in vodoravni met, paraboloidno zrcalo, mavrica, vrtenje vode v čaši, vodni curek, robniki na carving smučeh, teleskopi, tir leta smučarskega skakalca ... Po uvodnem prepoznavanju paraboličnih oblik v naravi so dijaki uporabili svetovni splet in poiskali definicijo kvadratne funkcije in njenih parametrov ter



izdelali plakate. Sledilo je ustvarjanje lastnih parabol in njihova matematična analiza s pomočjo IKT. Dijaki so konstruirali parabole s šestilom in ravnilom po definiciji parabole kot stožnice. Z žaganjem lesenega stožca so matematični model stožnice potrdili v praksi. Za risanje grafov kvadratnih funkcij so uporabljali program GeoGebra. Pri eksperimentalnem delu so se ukvarjali s krogelnimi in parabolničnimi zrcali. Sferno napako kroglnega zrcala so korigirali s parabolničnim zrcalom, ki zbira vse vzporedne žarke v gorišču. Videoanaliza poševnega meta kroglice je prinesla inovativen pristop določanja funkcijskega predpisa kvadratne funkcije. Dijaki so s kamero snemali poševne mete kroglice pod različnimi izmetnimi koti, nato pa analizirali posnetke s programom Tracker. S pomočjo programa Excel so primerjali in analizirali rezultate ter iz njih pridobili funkcijske predpise parabol. Proučevali so prosto visečo verigo, ki so jo v prvem približku obravnavali kot parabolo, ustvarili parabole z vodnimi curki in določili funkcijske predpise tako nastalih parabol. S programom GeoGebra so preverjali pravilnost svojih rešitev pri zapisu razcepne, temenske in splošne oblike enačbe kvadratne funkcije. Videoanaliza gibanja težišča rotirajoče kuhavnice pri poševnem metu s programom Tracker je pokazala, da se težišče kuhavnice giblje po paraboli, katere enačbo so dijaki določili s pomočjo reševanja sistema treh enačb s tremi neznankami. Rešitev so preverili s programom GeoGebra, ki s posebnim makrom omogoča vnos koordinat točk na paraboli in izračun enačbe kvadratne funkcije. Projektno matematično delo v medpredmetni povezavi s fiziko je prineslo drugačne pristope poučevanja, pri čemer sta bila sodelovalno delo v skupinah in uporaba IKT ključnega pomena. Matematika za dijake ne sme biti le suhoparna teorija, ampak mora opisovati dejansko dogajanje v naravi. Dijaki z opisanim dinamičnim načinom dela veliko bolje razumejo dogajanje okoli sebe in se na tak način radi učijo matematiko.

48

## Volilni sistemi v Sloveniji za matematike

**Avtorji:** Andrej Bauer<sup>1</sup>, Katja Berčič<sup>2</sup>, Saša Zagorc<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, IMFM

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, IMFM

<sup>3</sup> Univerza v Ljubljani, Pravna fakulteta

**Povzetek.** Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani je leta 2022 sodelovala z Državno volilno komisijo pri preverjanju nove programske komponente za izračun rezultatov volitev. V tem prispevku povzemamo opis procesa preverjanja programske komponente in končnih izračunov volitev, ter javnega ozaveščanja.

### 1. Uvod

Leto 2022 je bilo zaznamovano s parlamentarnimi volitvami aprila, predsedniškimi volitvami oktobra in lokalnimi volitvami novembra. Na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani smo v sodelovanju z Državno volilno komisijo izvedli matematično analizo volilnih zakonov ter neodvisno preizkusili in preverili novo programsko komponento za izračun rezultatov volitev, ki jo je razvilo podjetje Genis v okviru širšega projekta. V tem besedilu povzemamo opis našega procesa preverjanja programske komponente ter končnih izračunov volitev, ki bo objavljen v [4].

Tako pravo kot tudi računalništvo sta osredotočena na formalizacijo pravil, logično konsistentnost in koherentnost. Kljub tej podobnosti pa se njuni osnovni koncepti razlikujejo. Pravna pravila se prilagajajo kompleksnosti človeških družb, medtem ko je računalniško razumevanje pravil bolj statično, objektivno in namenjeno omejenemu obsegu uporabe. Implementacija volilnih pravil v računalniški program ilustrira trk med prilagodljivostjo pravnih pravil in potrebo implementacije, da predvidi vse možne scenarije izidov, ne glede na njihovo verjetnost.

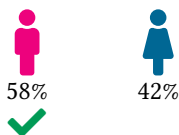
Ugotavljanje volilnega izida je v pristojnosti Državne volilne komisije in volilnih komisij volilnih enot. Zakon ni bil spremenjen že od leta 1992, kar pojasnjuje odsotnost zakonske obveznosti ali načela za prenos volilnega zakona v avtomatizirano obliko. Takšni prepisi pri nas nastajajo skozi pogodbeno sodelovanje med Državno volilno komisijo in specializiranimi podjetji za programsko opremo.

Avtomatizacija omogoča aktivnosti, ki pozitivno vplivajo na legitimnost volilnega procesa. Na primer, javno zaupanje se krepi s skoraj realnočasnim spremljanjem volilnih rezultatov in dodeljevanjem mandatov, ter posodabljanjem rezultatov med preštevanjem glasov. Naše delo prispeva k prizadevanju za nadaljnje izboljšave avtomatizacije in zanesljivosti volilnih postopkov.

**Zahvala.** To gradivo temelji na delu, ki ga podpira Air Force Office of Scientific Research pod oznako FA9550-21-1-0024 (*TydiForm*).

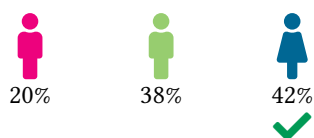
## 2. Kratek uvod v volilne sisteme

Volilni sistem, ki se uporablja na državnoborskih in na nekaterih lokalnih volitvah, je dovolj zapleten, da morajo programerji biti pri njegovi implementaciji previdni. Izbira med dvema kandidatom (slika 1) je preprosta, v vseh drugih primerih pa je treba najprej določiti način izbora.

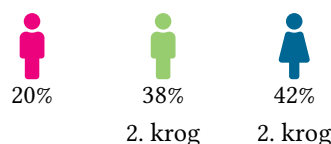


Slika 1. Izbira med dvema kandidatom

Na lokalnih volitvah za predstavnike manjšin med večimi kandidati zmagata kandidat z največjim deležem glasov (slika 2 (a)). Na predsedniških in županskih volitvah se kandidata z največ glasovi uvrstita v drugi krog volitev (slika 2 (b)), če nobeden od njiju ni prejel absolutne večine že v prvem krogu. Z večinskim sistemom lahko izberemo tudi več kandidatov, tako da mandate po vrsti podelimo



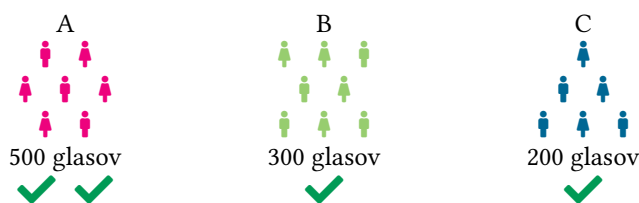
Slika 2 (a). Največji delež glasov



Slika 2 (b). Drugi krog

limo kandidatom z najvišjimi deleži glasov. Na podoben način deluje tudi večinski sistem z volilnimi enotami, pri katerem kandidate v vsaki volilni enoti izbiramo ločeno.

Poglejmo še, kako delujejo proporcionalni sistemi, kjer se za glasove potegujejo liste kandidatov. Namen takih sistemov je zagotoviti, da so mandati podeljeni listam čim bližje deležem glasov, ki so jih dobile liste. V primeru, prikazanem na sliki 3, želimo podeliti pet mandatov, pri čemer je bilo skupaj oddanih 1000 glasov. Pričakovali bi lahko, da bodo liste dobile mandat za vsakih 200 glasov.



Slika 3. Podeljevanje mandatov v proporcionalnem sistemu – kdo dobi zadnji mandat?

Številu glasov, ki jih lista potrebuje, da dobi en mandat, rečemo *volilni količnik*. Najenostavnejši je Harejev količnik, ki je enak količniku  $\frac{\text{glasovi}}{\text{mandati}}$ ; v zgornjem primeru je to ravno 200 glasov. S tem količnikom bi podelili listi A dva mandata ter listama B in C po enega. Podeliti pa je treba še en mandat. Najmanjši količnik, ki zagotavlja, da ne bomo podelili preveč mandatov, je Droopov količnik [7]:

$$\left\lfloor \frac{\text{glasovi}}{\text{mandati} + 1} \right\rfloor + 1. \quad (1)$$

V našem primeru je Droopov količnik enak 167, mandati pa se razporedijo na enak način kot pri Harejevem količniku, čeprav lista A skoraj dobi tretji mandat ( $\frac{500}{167} \approx 2,994$ ). Pomagamo si lahko z

d'Hondtovim sistemom [5],[6], ki se uporablja na volitvah v Evropski parlament, v Sloveniji pa na lokalnih volitvah. Tu je smiselno izpostaviti, da so v volilnih sistemih po svetu vpeljeni še številni drugi načini (sekundarnega) podeljevanja še nepodeljenih mandatov. V nadaljevanju prispevka bomo nekoliko podrobneje opisali podeljevanje mandatov na volitvah v državni zbor.

Količnik, s katerim podelimo ravno pravo število mandatov, izračunamo z d'Hondtovim sistemom tako, da števila glasov, ki so jih dobile liste, po vrsti delimo s števili 1, 2, 3 itd., dobljene količnike pa uredimo kot v tabeli 4. Mandate podelimo listam s prvimi petimi količniki.

Mandat	Lista	Glasovi	Delitelj	Količnik
1	A	500	1	500.00
2	B	300	1	300.00
3	A	500	2	250.00
4	A	500	3	166.67
5	B	300	2	150.00
	A	500	4	125.00
	C	200	1	100.00

Tabela 4. Primer d'Hondtovega postopka

### 3. Od zakona do programa in preverjanja rezultatov

Državnozborske volitve ureja Zakon o volitvah v Državni zbor (ZVDZ [8]). Na teh volitvah skupaj podelimo 90 mandatov, od tega dva za manjšino, preostalih 88 pa se podeli v osmih volilnih enotah. V grobem ima postopek za izračun rezultatov volitev v državni zbor dve fazi; omenimo le še, da na rezultat vpliva tudi 4% volilni prag in nekateri drugi tehnični pogoji. V prvi fazi se podelijo mandati v volilnih enotah na podlagi Droopovega količnika, v drugi fazi pa se podeli preostanek mandatov z variacijo d'Hondtove metode (oz. natančneje, z variacijo Hagenbach-Bischoffovega sistema). Ta sistem poleg proporcionalnosti glede na prejete glasove list poskuša zagotoviti tudi geografsko proporcionalnost. Podrobnejša matematična obravnava izračuna izidov volitev v državni zbor Republike Slovenije je v [1].

**3.1. Droopov količnik in 90. člen.** V Zakonu o volitvah v Državni zbor je prva faza postopka podelitve mandatov opisana v 90. členu. Ta člen na prvi pogled predpisuje matematično formulo, saj opiše Droopov količnik kot "[...] skupno število glasov, oddanih za vse liste kandidatov v volilni enoti, [ki se] deli s številom poslancev, ki se volijo v volilni enoti, povečanim za ena, kar se zaokroži na celo število navzgor. [...]" Če to zapišemo s formulo, dobimo

$$\left\lceil \frac{\text{glasovi}}{\text{mandati} + 1} \right\rceil, \quad (2)$$

kar ni enako definiciji količnika (1). Zakon uporablja izraz "zaokroži na celo število navzgor", kar je vsaj zavajajoče. Iskanje naslednjega večjega celega števila in zaokroževanje navzgor *nista* enakovredna v primeru, ko je količnik  $\frac{\text{glasovi}}{\text{mandati}+1}$  že celo število. Formulo (2) je uporabljala tudi razvojna verzija uradnega programa, ki ni bila uporabljena na volitvah. Razvijalce je prepričal primer razporeda glasov, na podlagi katerega je program izvolil 91 predstavnikov.

Na slovenskih državnozborskih volitvah je v volilni enoti podeljenih 11 mandatov, oddanih pa približno 150000 glasov, zato je Droopov količnik približno 12500. Statistično je približno  $\frac{1}{12} = 8,33\%$  verjetnost, da bo količnik celo število. Verjetnost, da sprememba Droopovega količnika za 1 povzroči spremembo rezultatov volitev, je veliko manjša, vendar bi v najslabšem primeru lahko povzročila izvolitev preveč kandidatov.

**3.2. Razporeditev mandatov po volilnih enotah po 92. in 93. členu.** V drugi fazi uporabljamo d'Hondtovo metodo na nacionalni ravni, kjer se uporabijo skupni glasovi iz vseh volilnih enot. Ko listi dodelimo mandat, moramo določiti, kateremu od njenih kandidatov je dodeljen. Ker so kandidati razporejeni po 8 volilnih enotah, od katerih vsaka prejme skupno 11 mandatov, se kandidata izbere v dveh korakih: najprej izberemo volilno enoto, ki ima prosta mesta in razpoložljive kandidate z liste, nato pa med njimi izberemo kandidata.

Postopek je opisan v 93. členu ZVDZ: "Mandati [...] se dodelijo listam v volilnih enotah, ki imajo največje ostanke glasov v razmerju do količnika v volilni enoti iz 90. člena tega zakona. Če so v

volilni enoti že razdeljeni vsi mandati, se mandat dodeli listi v volilni enoti, v kateri ima lista naslednji največji ostanek glasov v razmerju do količnika v volilni enoti. [...]”. Mandati se torej razdelijo med volilne enote, ki imajo največji količnik (relativni ostanek)  $\frac{\text{ostanek glasov}}{\text{Droopov količnik}}$ , kjer je ostanek glasov ravno ostanek pri deljenju skupnih glasov liste v volilni enoti z Droopovim količnikom v tej volilni enoti. Stavke ”Mandati [...] se dodelijo listam v volilnih enotah, ki imajo največje ostanke glasov v razmerju do količnika [...]” lahko interpretiramo tako, da volilna enota z največjim relativnim ostankom dobi vse mandate, ali pa tako, da se mandati razporedijo po enotah. Tudi s pravnega vidika bi bil tu zakon lahko bolj jasen (več o tem v [4]).

**3.3. Izenačenja.** Pri izračunu rezultatov se entitete razvrščajo glede na dodeljene numerične vrednosti. Vrstni red je lahko nejasen, kadar so te vrednosti izenačene, čemur bomo rekli ”neodločen izid”. Zakon o volitvah v Državni zbor obravnava le neodločene izide med kandidati iste liste v volilni enoti ter neodločene izide med predstavniki narodnih manjšin. Pojavijo se lahko tudi neodločeni izidi med listami (izenačeni količniki v d’Hondtovem postopku) ali med volilnimi enotami (izenačeni relativni ostanki). Za vse primere, ki jih ureja zakon, je predvidena rešitev z žrebom, ki ga izvede pooblaščen organ. Razlago zakona je smiselno razširiti na vse možne neodločene izide, čeprav to povzroča dodatne zaplete.

Neodločeni izidi se delijo na tiste, ki vplivajo na rezultat volitev, ter na tiste, ki na rezultat ne vplivajo. Če izbiramo enega kandidata izmed treh, pri čemer sta dobila drugo in tretje uvrščeni enako število glasov, to izenačenje ne vpliva na rezultat. Pri večinskih sistemih je na splošno lahko ugotoviti, ali neodločen izid vpliva na rezultat volitev, kar pa ni res v prilagojenem d’Hondtovem postopku z volilnimi enotami. Neodločeni izidi v tem sistemu so namreč lahko odvisni od rezultata prejšnjih. Na hitro si oglejmo en tak primer. Predpostavimo, da sta v d’Hondtovem postopku zadnja razpoložljiva mandata dodeljena listama  $A$  in  $B$ , ki sta v neodločenem izidu. Če žreb da prednost listi  $A$ , lahko ta dobi zadnji razpoložljivi mandat v volilni enoti  $V_1$ , s čimer prisili listo  $B$ , da dobi mandat v drugi volilni enoti  $V_2$ , kjer so njihovi kandidati v neodločenem izidu. Če bi žreb dal prednost listi  $B$ , bi morda ta dobila mandat v volilni enoti  $V_1$  in se s tem izognila neodločenemu izidu v  $V_2$ . Matematično gledano imamo opravka z drevesom, katerega vozlišča so neodločeni izidi. Neodločen izid ne vpliva na rezultat volitev, če ima vsako od njegovih poddreves enako porazdelitev rezultatov.

Program avtorjev zazna vse neodločene izide in poroča o neodločenih izidih, ki vplivajo na rezultate. Razen žrebov predpisanih z zakonom, naš program ni zaznal takih neodločenih izidov na realnih podatkih. Neodločenih izidov, ki ne vplivajo na rezultat volitev in ki jih zakon ne omenja, je v postopku lahko veliko, zato ni dobrega razloga, da bi se za vsak tak neodločen izid izvajal žreb. Rezultati neodločenih izidov se lahko izvedejo vnaprej z naključno ureditvijo entitet.

**3.4. Metodologija in zmanjševanje tveganja.** Pri preverjanju programov se običajno uporabljajo trije pristopi:

1. *Testiranje:* Izvajanje programa na testnih primerih in primerjava rezultatov s referenčnimi rezultati.
2. *Verifikacija:* Ugotavljanje pravilnosti kode s formalnimi matematičnimi dokazi.
3. *Redundanca:* Razvoj več različic programa za isto nalogo, ki se izvajajo neodvisno, njihove rezultate pa se primerja.

Verifikacija zagotavlja najvišjo stopnjo zaupanja, vendar je tudi najbolj zahtevna. Ta pristop v našem primeru ni bil izvedljiv, saj uradna koda deluje v varnem okolju z omejenim dostopom. Namesto tega smo uporabili teste in lastno implementacijo programa za izračun rezultatov volitev. Glavni tveganji, povezani z našim delom, sta bili *veljavnost podatkov* in *prisotnost programskih napak*. Zmanjševali smo ju z več protiukrepi. Podatki so bili predmet preverjanja na različnih ravneh. Poleg tega smo zagotovili redundanco pri izračunu rezultatov, kar je zmanjšalo možnost napak. Na koncu smo izvedli številne stresne teste, ki so nam pomagali odkriti in odpraviti morebitne napake v naši programski opremi.

#### 4. Ozaveščanje javnosti in 2. faza projekta

Vpeljava nove programske opreme je imela zamudo, zaradi česar so se leta 2022 na državnozborskih volitvah rezultati še zadnjič računali s staro programsko komponento.

Tako so se primerjali trije neodvisni izračuni: izračuna starega in novega uradnega programska ter programa avtorjev. Rezultati starega uradnega programa so se razlikovali od rezultatov novega

uradnega programa in programa avtorjev, ki sta bila med seboj usklajena. Izkazalo se je, da je stara programska komponenta napačno izvajala postopek iz 93. člena ZVDZ tako, da je spremenila izbor kandidatov znotraj list.

Števila mandatov dodeljena listam so bila pravilna, vendar je program izbral skupno šest napačnih kandidatov. Po odpravi napake so se ujeli vsi izračuni. Državna volilna komisija je potrdila rezultate po posvetovanju s predstavniki Genisa in Fakultete za matematiko in fiziko ter razpravi. Zanimanje medijev je bilo veliko, kar nas je postavilo v vlogo strokovnjakov za volitve, ki so našli napako, in jo morali pojasniti javnosti. Ta izkušnja nas je naučila, kako pomembna je priprava na javno komunikacijo in kako koristno je proaktivno ozaveščanje.

Za drugo fazo projekta, jeseni leta 2022, je bila nova programska oprema nameščena in pripravljena za uporabo. Opravili smo načrtovane teste in validacijo, ter v sodelovanju z Državno volilno komisijo razširili svoje dejavnosti na ozaveščanje javnosti o volilnih postopkih. Fakulteta za matematiko in fiziko je objavila neodvisne izračune rezultatov volitev na svoji spletni strani [2], tik pred lokalnimi volitvami pa smo organizirali tudi javno predavanje [3] o slovenskih volilnih sistemih.

#### 4.1. Preverljiva potrdila.

Med posvetom z Državno volilno komisijo se je pojavilo vprašanje, kako najbolje ročno preveriti rezultate volitev. Rešitev smo oblikovali po zgledu računalniških potrdil, ki se uporabljajo za preverjanje pravilnosti izračunov. Enostaven primer je preverjanje dejstva, da neko število ni praštevilo. Veliko lažje je preveriti, da 97921 ni praštevilo, tako da preverimo, da velja  $181 \times 541 = 97921$ , kot da poiščemo vsaj enega delitelja tega števila. Preverljiva potrdila so podrobna poročila, ki prikazujejo, kako so bili rezultati volitev doseženi. Koraki za preverjanje poročila so dovolj preprosti, da jih izvede vztrajen posameznik. Idejo lahko ponazorimo s pomočjo primera iz tabele 4. Če je rezul-

Lista	Glasovi
A	500
B	300
C	200

Tabela 5 (a)

Lista	Količnik
A	$500/1 = 500.00$
B	$300/1 = 300.00$
A	$500/2 = 250.00$
A	$500/3 = 166.67$
B	$300/2 = 150.00$

Tabela 5 (b)

Lista	Naslednji količnik liste
A	$500/4 = 125$
B	$300/3 = 100$
C	$300/1 = 100$

Tabela 5 (c)

tat programa le, da  $A$  dobi tri mandate,  $B$  in  $C$  pa po enega, bi za preverjanje pravilnosti morali znova izvesti celoten d'Hondtov postopek. Program je enostavno dopolniti tako, da vrne tudi tabelo z d'Hondtovim postopkom (tabela 5 (b)) in tabelo 5 (c), s katero lahko preverimo, da nismo izpustili nobenega količnika. Preveriti moramo, ali so števila glasov za liste v tabelah 5 (a), 5 (b) in 5 (c) pravilna, ter da so količniki v tabelah 5 (b) in 5 (c) pravilno izračunani. V tabeli 5 (b) preverimo, da:

- levi stolpec šteje do 6,
- količniki za posamezno listo so zaporedni, s števili 1, 2, 3, . . . ,
- vrstice tabele so urejene padajoče po količnikih.

V tabeli 5 (c) je treba preveriti še, da

- se v njej pojavijo vse liste,
- je za vsako listo količnik res naslednji po vrsti in da so
- vsi količniki manjši od količnikov v srednji tabeli.

Za pravilnost števila mandatov je treba preveriti le še, da se  $A$  v srednji tabeli pojavi trikrat,  $B$  dvakrat in  $C$  enkrat.

#### 5. Zaključki

V skupnem projektu z Državno volilno komisijo in nadaljnjem sodelovanju matematikov, računalničarjev in pravnikov smo si prizadevali potrditi skladnost, natančnost in verodostojnost prevoda

zakonodajnih pravil v algoritmično obliko in računalniško implementacijo. Identificirali in razjasnili smo več pomanjkljivosti v zakonodajnem besedilu, ki so ključne za volilne postopke. Sodelovanje je privedlo do boljšega razumevanja problemov in natančno določilo pravne vrzeli, ki jih ni mogoče rešiti ne s pravnimi interpretativnimi orodji ne z matematično in algoritmično analizo.

Menimo, da lahko rezultati našega interdisciplinarnega pristopa služijo kot zbirka priporočil Državnemu zboru, Državni volilni komisiji in podjetjem, ki sodelujejo pri razvoju programja za volilne postopke. Naša nadaljnja prizadevanja bodo usmerjena v ozaveščanje splošne javnosti in strokovnih skupnosti o potrebi po spremembah in prilagoditvah obstoječih pravil, da bodo lahko izpolnjevala najvišje ustavne in mednarodne volilne standarde ter zagotavljala trden pravni temelj za računalniško vodeno izvajanje volilnih postopkov.

## Viri

- [1] Andrej Bauer. Matematična obravnava izračuna izidov volitev v državni zbor Republike Slovenije (Mathematical analysis of computation of results of National Assembly elections in the Republic of Slovenia). Faculty of mathematics and Physics, University of Ljubljana, <https://volitve.fmf.uni-lj.si/volitve-v-drzavni-zbor.pdf>, 2022.
- [2] Andrej Bauer and Katja Berčič. Slovenian electoral systems and elections 2022. Faculty of mathematics and Physics, University of Ljubljana, <https://volitve.fmf.uni-lj.si>, 2022.
- [3] Andrej Bauer and Katja Berčič. Volilni sistemi na slovenskih lokalnih volitvah – javno predavanje (Electoral systems in Slovenian local elections – public lecture. Faculty of mathematics and Physics, University of Ljubljana, <https://volitve.fmf.uni-lj.si/javno-predavanje-2022.html>, 2022.
- [4] Andrej Bauer, Katja Berčič, and Saša Zagorc. Validation of slovenian national and local elections in 2022. *Journal of Cross-disciplinary Research in Computational Law*, sprejet v objavo
- [5] Victor d'Hondt. *Système pratique et raisonné de représentation proportionnelle*, par V. d'Hondt... C. Muquardt, Bruxelles, 1882.
- [6] Victor d'Hondt. *Exposé du système pratique de représentation proportionnelle*. Gante, Imprimerie Eug. Van der Haeghen, 1885.
- [7] H. R. Droop. On Methods of Electing Representatives. *Journal of the Statistical Society of London*, 44(2), 141–202, 1881.
- [8] Zakon o volitvah v državni zbor. Uradni list RS, št. 109/06 – uradno prečiščeno besedilo, 54/07 – odl. US, 23/17 in 29/21.

30

## Pouk fizike v waldorfski šoli

**Avtorica:** Tjaša Černoša<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Waldorfska šola Savinja, Žalec*

Malo predmetov učence tako zdrami kot fizika. Učenci jo pričakujejo z velikim veseljem. V waldorfski šoli se pouk fizike začne v 6. razredu z vsebinami naravoslovja. Način poučevanja in waldorfski učni načrt sta prilagojena razvojni stopnji otrok v tem obdobju. Vsako razvojno obdobje otroka ima svoje značilnosti in temu je prilagojen način poučevanja. Torej s poučevanjem fizikalnih vsebin v waldorfski šoli začnemo v 12. letu starosti učencev. To je obdobje predpubertete. V tem obdobju so otroci zelo radovedni. Tudi porednost učencev postane sedaj drugačna. Majhni otroci si ne morejo pomagati, da ne bi bili poredni, saj se ne morejo kontrolirati. Otroci v tem obdobju pa »načrtujejo lumparije«. Za njih je to znanstveni eksperiment (»Kako daleč lahko grem? Kje je meja?«). Učenci v obdobju predpuberte želijo spoznati povezavo med vzrokom in posledico, zato je to idealen čas za začetek eksperimentiranja in pouka fizike. Izhodišče vsake učne snovi je doživetje pojava/poskusa z dobrim opazovanjem in raziskovanjem. Kasneje, v višjih razredih se podamo k abstrakciji oz. opisu fizikalnih pojavov z matematičnimi obrazci. Pri pouku fizike učimo učence opazovati, opisovati, meriti, primerjati, izvajati poskuse, natančno zapisovati procese in rezultate, tabelirati, risati grafe odvisnosti, sklepati o zakonitostih ter preveriti postavljene trditve. Pouk fizike daje učencu uporabna znanja. Vsebine za pouk iščemo iz vsakdanjika. Pri pouku fizike se metode neposrednega opazovanja

in eksperimentalnega dela prepletajo s teoretičnimi vidiki. Fiziko učencem najbolj približamo tako, da gremo od osebnih doživetij, zaznav proti objektivnim zakonitostim.

Po waldorfskem učnem načrtu začnemo poučevati fiziko z vsebinami, ki so učencem najbližje. Priporočljivo je začeti z akustiko, ker so učencem glasbene vsebine najbližje, saj se z njimi soočajo že od prvega razreda. V waldorfski šoli je glasbena umetnost eden izmed pomembnejših umetniških predmetov. V prvi triadi se vsi učenci učijo igranja pentatonične flavte, v četrtem razredu se vsi učenci preizkusijo v igranju violine in od četrtega razreda naprej vsi učenci igrajo kljunasto flavto.

Zaradi drugačnega načina poučevanja učenci pri pouku ne uporabljajo učbenikov in delovnih zvezkov, ampak pri pouku pišejo zapise v zvezek pod budnim strokovnim nadzorom učitelja. Tako nastaja njihov lasten »učbenik«, iz katerega se učijo. Pouk fizike je vsako uro obarvan praktično oz. izkustveno, kar zahteva premišljeno, natančno in strokovno pripravo učitelja. Pouk v waldorfski šoli poteka v epohah in v tridnevem ciklu. To pomeni, da se v 6. razredu tri tedne zapored v glavni uri poučuje predmet fizika. Glavna ura epohe poteka vsak dan od 8.00 do 9.55. ure. Vsaka glavna ura je natančno ter premišljeno strukturirana. V vsaki glavni uri se zvrsti več različnih dejavnosti. Glavna ura se začne s pozdravom in verzom, ki je značilen za vse waldorfske šole po vsem svetu. V nadaljevanju v nekaj minutah učenci podelijo zanimive novice iz njihovega vsakdana sošolcem in učitelju. Sledi ritmični del, v katerem se razred »uglasi« in pripravi na šolsko delo. Ritmični del pripravi učitelj in v ritmičnem delu lahko npr. učenci recitirajo pesmi povezane z učno snovjo, igrajo flavto, izvajajo ritmično-gibalne vaje .... Ritmičnemu delu ure sledi ponavljanje, utrjevanje in preverjanje že usvojene učne snovi. Sledi pregled samostojnega/domačega dela prejšnje ure in zapis snovi. Zadnji velik del glavne ure je namenjen eksperimentalnemu oz. raziskovalnemu delu nove učne vsebine. Obravnava učne snovi poteka v tridnevem ciklu, to pomeni, da vsako učno vsebino obravnavamo tri dni v treh korakih. Pred izvedbo epohe učitelj natančno in premišljeno strukturira snov epohe v tridnevem ritmu. Primer prvih nekaj dni epohe fizike v 6. razredu je prikazan v spodnji preglednici.

	NOVA SNOV/POSKUS	ZAPIS	PONAVLJANJE/ UTRJEVANJE
1. dan epohe	AKUSTIKA KAJ VSE SLIŠIMO?		
2. dan epohe	ODDAJNIKI ZVOKA	AKUSTIKA KAJ VSE SLIŠIMO?	
3. dan epohe	SPREJEMNIKI ZVOKA	ODDAJNIKI ZVOKA	AKUSTIKA KAJ VSE SLIŠIMO?
4. dan epohe	POSREDNIK ZVOKA	SPREJEMNIKI ZVOKA	ODDAJNIKI ZVOKA
5. dan epohe	FREKVENCA ZVOKA IN VRSTE ZVOKA	POSREDNIK ZVOKA	SPREJEMNIKI ZVOKA
6. dan epohe		FREKVENCA ZVOKA IN VRSTE ZVOKA	POSREDNIK ZVOKA
7. dan epohe			FREKVENCA ZVOKA IN VRSTE ZVOKA

Tabela 1: Prikaz tridnevnega cikla.

Učno snov obravnavamo v treh korakih.

**Prvi dan.** Obravnavo nove snovi pustimo za zadnji del ure, ko opazujemo oz. raziskujemo sklop poskusov vezanih na obravnavano učno snov. Vse izvedene poskuse učenci skrbno zapišejo v zvezek. V zvezek zapišejo naslov poskusa, pripomočke, ki so jih uporabili pri poskusu, opišejo poskus, zapišejo ugotovitve poskusa ter poskus ilustrirajo. Pridobljene izkušnje prespimo. Primeri poskusov pri obravnavi oddajnikov zvoka.

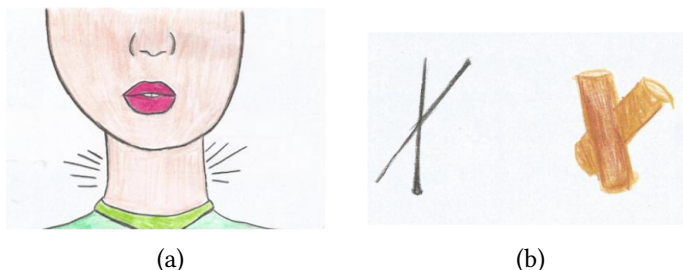
1. poskus: RRRR .... Opis: Z rokama se primem za vrat in izgovorim rrrrrrr. Ugotovitev: Ob tem, ko izgovorim črko R, čutim tresljaje v rokah. Tresljaje v rokah čutim zato, ker se ob izgovoru črke R tresejo glasilke.

2. poskus: GLASBENE VILICE. Pripomočki: glasbene vilice, kladivce, kozarec vode, žogica za namizni tenis pritrjena na tanko vrstico. Opis:

(a) S kladivcem udarimo po glasbenih vilicah in jih potopimo v vodo.

- (b) S kladivcem udarimo po glasbenih vilicah in se z njimi dotaknemo mirujoče viseče žogice za namizni tenis.

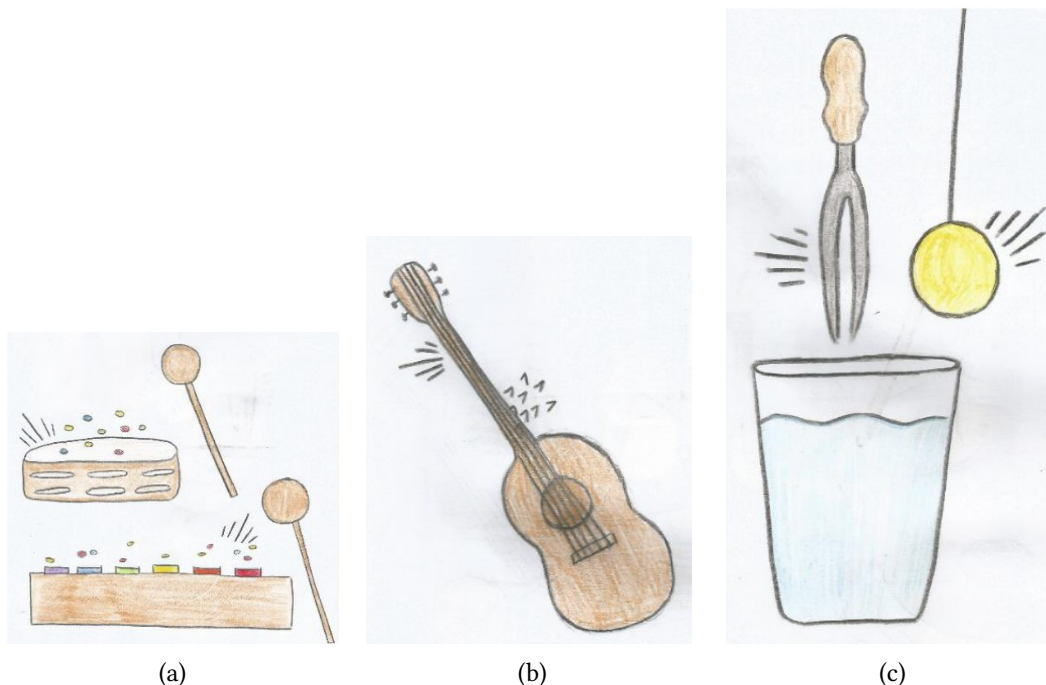
Ugotovitev: a) Ko pojoče glasbene vilice potopim v vodo, voda šprica iz kozarca. Voda je špricala iz kozarca zato, ker so se pojoče glasbene vilice ob oddajanju zvoka tresle. b) Ko se s pojočimi glasbenimi vilicami dotaknem mirujoče in viseče žogice za namizni tenis, žogica začne poskakovati. Žogica poskakuje zato, ker so ji pojoče glasbene vilice predale tresljaje.



Slika 1: (a) Ilustracija poskusa RRRR ... v učenkinem zvezku, (b) Ilustracija poskusa PALICI v učenkinem zvezku.

3. poskus: KSILOFON in TAMBURIN. Pripomočki: ksilofon, tamburin, palčka, pšenični zdrob. Opis: Pšenični zdrob posujemo po tamburinu in ploščicah ksilofona, ter s palčko zaigramo na tamburin in ksilofon. Ugotovitev: Ko s palčko udarimo/zaigramo na tamburin in ploščice ksilofona, pšenični zdrob poskakuje. Pšenični zdrob poskakuje zato, ker se opna tamburina in ploščice ksilofona ob oddajanju zvoka tresejo.

4. poskus: KITARA. Pripomočki: kitara, papirnati jahači. Opis: Na strune kitare položimo papirnate jahače in zaigramo na strune. Ugotovitev: Ko zaigramo na struno, jahač, ki leži na struni odskoči. Jahač odskoči, ker struna ob oddajanju zvoka niha.



Slika 2: (a) Ilustracija poskusa TAMBURIN in KSILOFON v učenkinem zvezku, (b) Ilustracija poskusa KITARA v učenkinem zvezku, (c) Ilustracija poskusa GLASBENE VILICE v učenkinem zvezku

5. poskus: PALICI. Pripomočki: dve leseni in dve kovinski palici. Opis: V levo roko primemo eno leseno palico, v desno roko pa drugo. Palici močno držimo in udarimo drugo ob drugo. Poskus ponovimo še s kovinskima palicama. Ugotovitev: Ko palici udarimo drugo ob drugo, zaslišimo zvok in ob tem čutimo v rokah tresljaje.



**Drugi dan.** Skozi pogovor obnovimo doživetja prejšnjega dne in poslušamo zanimivosti oz. ugotovitve, ki so jih učenci zaznali ob izvajanju poskusov. Naredimo posplošitev – poiščemo podobnosti poskusov in zakonitosti. To nato skupno oblikujemo in zapišemo: *Predmete, ki oddajajo zvok imenujemo oddajniki zvoka ali zvočila. Telesa oddajajo zvok, kadar se tresejo ali nihajo.*

**Tretji dan.** Obnovimo dogajanje prvega dne. Ponovimo zakonitosti, do katerih smo prišli prejšnji dan. Poiščemo še kakšen primer iz vsakdanjega življenja, v katerem najdemo potrditev naših ugotovitev. Npr. raziščemo, kako in na kakšen način ljudje oddajamo zvok? Ljudje oddajamo zvok tako, da potisnemo zrak iz pljuč skozi glasilke, ki se pri tem zatresejo. Vsak dan se torej v glavni uri dogajajo štiri faze: ponavljanje, iskanje zakonitosti, obnavljanje doživetja ter izvajanje novih opazovanj in poskusov (razen seveda uvodne in zaključne ure epohe). Ob takem načinu dela se učenci v glavnem vso snov naučijo v razredu. Učitelj ima zelo dober pregled nad doseženim znanjem in nenehno vzpodbuja sodelovanje prav vsakega učenca.

Ves čas epohe fizike povezujemo učno snov še z drugimi učnimi predmeti. Učenci ves čas skrbijo, da je njihov zvezek natančno, pregledno in estetsko urejen. Tako se vsakodnevno povezujemo z likovno umetnostjo. Kadar učenci pri učni snovi spoznajo obrazec za izračun katere izmed fizikalnih količin (npr. frekvence), se urimo v računanju neznanih količin v obrazcu in se tako povezujemo z matematiko. Učenci se vsakodnevno urijo v samostojnih in natančnih zapisih poskusov in tako se povezujemo s slovenščino. Povezujemo se z glasbeno umetnostjo in raziskujemo, kako in na kakšen način oddajajo zvok različna glasbila in igramo na glasbila. Učno snov razširimo tako, da raziščemo človeka, kako in na kakšen način ljudje sprejemamo in oddajamo zvok. Z delovanjem glasilk in ušesa razširimo poznavanje snovi še z biologijo. Ob raziskovanju širjenja zvoka po zraku pridemo do atomov in molekul ter kemije. S tehniko in tehnologijo se povežemo tako, da izdelujemo preprosta glasbila (zvončke, ksilofone, pihala, preprosta brenkala ....). Možnosti in idej medpredmetnega povezovanja je veliko. Poučevanje je umetnost, učitelj pa umetnik, ki učence s pomočjo učnega načrta ter primerne načina poučevanja glede na razvojno stopnjo otrok pripelje od zelenih učnih ciljev in standardov znanja.

29

## Fiz'ka cveke pr'tiska, kemija pa zabija. Menda ne zaradi matematike?

Avtor: Ambrož Demšar<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Zavod sv. Stanislava, OŠ Alojzija Šuštarja

Predpone niso nič drugega kot tuja, predvsem grška in latinska poimenovanja števil. Znanje in uporaba le-teh, ki so praviloma prva tema vsakega naravoslovnega učbenika, se šteje kot temelj, na katerem se gradijo naravoslovne vsebine. Kljub enostavnosti in sistematičnosti, kljub omejitvi na poznavanje zgolj dveh osnovnih količin v osnovni šoli (meter za dolžino in (kilo)gram za maso) ter kljub uporabi določenih predpon že od prvega razreda dalje in vsakoletnem obnavljanju in razširjanju vsebine, povprečen osnovnošolec glede na rezultate nacionalnih preverjanjih (NPZ 2022) znanja slabo uporablja.

V prispevku prikazujemo napačne primere poučevanja pretvarjanja in slabih pripomočkov v osnovnih šolah in navajamo bolj smiselne in bolj razumljive predloge.

### 1. Poučevanje merjenja količin in pretvarjanja enot

Pretvarjanje enot je proces, pri katerem spreminjamo eno mersko enoto v drugo, običajno tako, da uporabimo matematično razmerje med enotama. V osnovni šoli se učenci najprej seznanijo s preprostimi primeri pretvarjanja enot, kot so pretvorbe med metri in centimetri ter med litri in mililitri.

Najprej se naučijo osnovnih enot, kot so meter za dolžino, liter za prostornino in gram za maso. Nato spoznavajo manjše enote, kot so centimeter, mililiter in gram, ter razumejo, kako so te enote povezane z osnovnimi enotami. To omogoča, da lahko pretvorijo med različnimi enotami in izračunajo ustrezno vrednost.

V višjih razredih učenci z učitelji utrjujejo znane predpone in pretvarjanje z njimi pri matematiki predvsem pri geometrijskih nalogah. Največ vaj iz te teme v učbenikih najdemo v 6. razredu, kasneje pa ne. Pri fiziki v 8. razredu spoznajo še preostale predpone in jih še enkrat utrdijo pri poglavju »Uvod v fiziko«. Po tem poglavju naj bi vsi učenci znali uporabljati predpone in pretvarjati enote. Številnim to ne uspe. Avtor je sodeloval pri pisanju fizikalnega učbenika »Zakaj se dogaja«, po osebnem pogovoru z izkušenim urednikom je umaknil z začetka učbenika temo pretvarjanje, saj da »pretvarjanje osmošolce zaradi težavnosti že na začetku zablokira«.

V resnici predpone niso nič drugega kot tuja, predvsem grška in latinska poimenovanja števil. Decem za deset(ino), hek(a)to(n) za sto; tudi femto(en) za 10<sup>-15</sup> in tera (pošast). Pretvarjanje ni težko, pri enotah s potenco 1 je pretvornik do enote s sosednjo predpono 10<sup>1</sup> (*m* v *dm*, *dm* v *cm* ...), pri enotah s potenco 2 (recimo pri plosčinskih) 10<sup>2</sup> (*m*<sup>2</sup> v *dm*<sup>2</sup>, *dm*<sup>2</sup> v *cm*<sup>2</sup> ...) pri enotah s potenco 3 (recimo volumskih) pa 10<sup>3</sup> (*m*<sup>3</sup> v *dm*<sup>3</sup>, *dm*<sup>3</sup> v *cm*<sup>3</sup> ...) itn. Učencem tako postane razumljiva uporaba predpon vsakdanje volumske enote liter, velja isto pravilo (10<sup>1</sup>), saj je liter enota s potenco 1 in ne s potenco 3.

Številni učitelji so prepričani, da gre pri pretvarjanju za zahtevnejšo snov pri pouku matematike. Ugotovitve še starih raziskav (npr. Kavkler v knjigi »Brati, pisati, računati iz leta 1991), da imajo učenci ob zaključku osnovne šole precejšnje težave s pretvarjanjem dolžinskih merskih enot (petina učencev pri enostavni nalogi za 3. razred naredi pet do deset napak, desetina pa več kot deset napak), pa tudi sodobne raziskave TIMSS in nacionalna preverjanja potrjujejo, da so težave precejšnje. In čeprav bi šlo samo za pouk matematike, se moramo zavedati, da ima (merjenje in) pretvarjanje enot v vsakdanjem življenju, posebej pa v naravoslovnih in tehniških vedah, nepogrešljivo vlogo.

Na primeru naloge iz nacionalnega preverjanja znanja z dne 6. 5. 2022 izpostavljam težave pri pretvarjanju masnih enot. Učenec je moral pretvoriti 15 dag (masla), 0,2 kg (sladkorja) v grame. Naloga je bila slabo reševana. Pravilno je količini pretvorilo zgolj 35 % devetošolcev. V resnici ne more iti za težjo nalogo, saj sta učenec predponi deka in kilo znani, z decimalnimi števili se srečajo že v 6. razredu, ne gre za neživiljenjsko ali čisto fizikalno nalogo, ki jo kot nematematično včasih preskočijo.

## 2. Razlogi za slabo razumevanje in nepravilno uporabo predpon

V Svetu matematičnih čudes 3 (2001) Cotičeva vpeljuje merjenje postopoma s štirimi metodičnimi koraki:

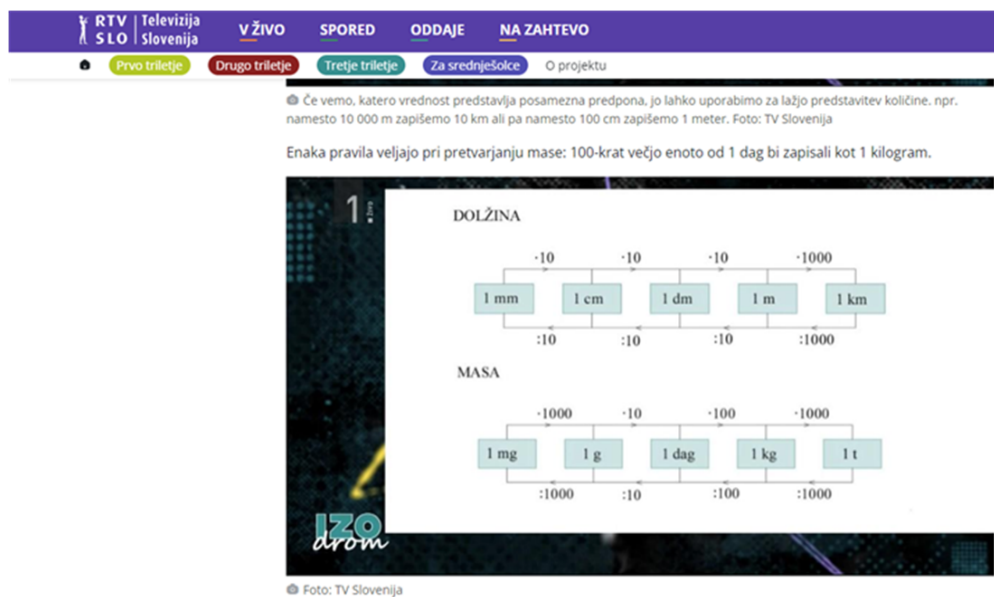
1. primerjanje količin (večje/manjše, krajše/daljše ...)
2. merjenje z relativno enoto (koraki, orehi ...)
3. merjenje s konstantno nestandardno enoto (merjenje s kozarcem, dolžino svinčnika ...)
4. merjenje s standardno enoto (kilogram, milimeter ...)

Pri merjenju z relativno enoto dobijo učenci različne rezultate, pri merjenju s konstantno nestandardno ali standardno enoto pa bi morali biti rezultati vsaj približno enaki. Učenci naj bi vsaj v nižjih razredih merili vedno konkretne stvari in ne slik predmetov, saj je nujno povezovati teorijo in prakso. Po izkušnjah učitelji matematike (pa tudi učitelji razrednega pouka) vse premalo damo poudarka praktičnemu ponazarjanju merskih enot. Pomagala, ki jih lahko opazim pri učencih, so več ali manj neprimerna. V spodnji tabeli opozarjam na nelogičnost postavitve kilograma za razumevanje predpon.

km			m	dm	cm	mm
t			kg		dag	g
	hl		l	dl	cl	ml

Slika 1: Primer neprimernega pomagala iz osnovne šole

Celo pomagala, ki jih najdemo v javno dostopnih razlagah [1] kažejo na nerazumevanje sistema, kakor je bil SI (skrajšano iz francoskega *Système international*) v bistvu vzpostavljen. Vsaka posebna sprememba, razen pretvornika 10 do sosednje predpone, moti učenca.



Slika 2: Zajem zaslona oddaje na RTV Slovenija v času korone z neprimernimi pretvarjanji

Tudi v (spletnih) učbenikih ni drugače. Vsaka razlaga v elektronskih učbenikih je vsaj delno neustrezna ali logično pomanjkljiva: E-učbenik matematiko za 5. razred [2], kjer prazna okenca čakajo še na zapolnitev (kot npr. nepopoln periodni sistem v času Mendelejeva), podobno e-učbenik za matematiko v 6. razredu [3]; podobno nepopoln je tudi e-učbenik za fiziko v 8. razredu [4], kjer bi sam dodal v tabeli za predpone še enico kot desetiško potenco  $10^0$ . Tako, kot jo predvideva tudi Mednarodni sistem enot.

### 3. Priporočila

Predpone so v 8. razredu krasen uvod v desetiške potence; celo zahtevnejša snov  $10^0$  in  $10^{-n}$  in kasneje algebrski ulomki postanejo lažje razumljivi. Pri tem matematiki lahko priskoči v pomoč sama fizika, saj učencem z odličnimi predstavami prikaže, kaj npr. število dejansko predstavlja. (Izvrstne analogije ima knjiga Joela Levyja "Čebela v katedrali"). Eden od najboljših videov, vreden predstavitve v razredu, je Powers of Ten™, posnet že leta 1977.

Na Sliki 3 prilagam primer vaje iz pretvarjanja dolžinskih enot, ko učenci vedo, kaj pomeni določena vrednost.

Priporočam dosledno uporabo predpon, tudi če niso običajne, sicer se sistem podre. V pomoč učencem predlagam mnemotehniko **kar hitro da j 1 dober cmok mamici**. Neuporaba hektometra in dekametra zahtevata posebna "pretvarjanja" iz metra v kilometer, neuporaba hektograma prav tako. Učitelji lahko smiselno vpeljemo v slovenski prostor vsaj predpone, saj bodo ideje dr. Plemlja o logičnem poimenovanju števil v slovenščini najverjetneje ostale neuresničene. Torej, če že ne moremo spremeniti jezika iz štiristo dvainsedemdeset v štiristo sedemdeset dva (472 ali 427) in če že ne moremo spremeniti jezika 10 ur celega dneva v hektominute, uporabljajmo dekalitre, decigrame in hektometre. Tudi pomoč pri pretvarjanju z okenčki postane šele sedaj smiselna:

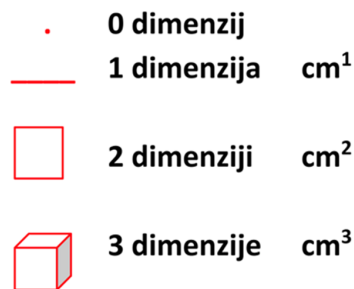
- če ima enota eksponent 1, potem do sosednje enote pridemo s pretvornikom  $10^1$ ,
- če ima enota eksponent 2, potem do sosednje enote pridemo s pretvornikom  $10^2$ ,
- če ima enota eksponent 3, potem do sosednje enote pridemo s pretvornikom  $10^3$  ...

Na ta način lahko pretvarjamo npr. z enotama za prostornino, ki imata različna eksponenta: liter in  $dm^3$ . Šele tako lahko učenci ugotovijo, da  $cm^3$  ni centiliter, kot večina misli.

**Dolžina (po Wikipediji)**

- 0,01 cm - debelina lasu ali barvnega premaza = \_\_\_\_\_ mm
- 1,5 mm - dolžina bolhe = \_\_\_\_\_ cm
- 2,54 cm —1 palec (angl. inch) = \_\_\_\_\_ mm
- 1 m – 40 milijontni del obsega zemlje po poldnevniku = \_\_\_\_ dm
- 1,435 m - normalna osna razdalja železniškega tira = \_\_\_\_\_ mm
- 1,83 m (6 čevljev) – povprečna višina moškega = \_\_\_\_\_ cm
- 3,048 m (10 čevljev) - višina koša pri košarki = \_\_\_\_\_ mm
- 3,054 m - dolžina starega Mini Morrisa (Mr. Beana) = \_\_\_\_\_ dm
- 3,63 m - največji razpon krila živeče ptice (albatros) = \_\_\_\_\_ mm
- 3,66 m - dolžina novega Minija = \_\_\_\_\_ dm
- 5,50 m - višina žirafe = \_\_\_\_\_ cm
- 7,5 m - približna dolžina človeškega prebavnega trakta = \_\_\_\_ dm
- 30 m— dolžina sinjega kita, največje živali, ki je kdaj živela na Zemlji = \_\_\_\_\_ km
- 55 m — višina poševnega stolpa v Pisi = \_\_\_\_\_ cm
- 70,35 m — višina prvega slovenskega nebotičnika v Ljubljani = \_\_\_\_\_ dm
- 90 m — višina slapa Rinka = \_\_\_\_\_ km
- 95 m — višina najvišjega stebra viadukta Črni Kal = \_\_\_\_\_ mm
- 105 m -- dolžina nogometnega igrišča = \_\_\_\_\_ dm
- 112,34 m -- višina najvišjega drevesa na svetu = \_\_\_\_\_ km
- 128,1 m -- višina najvišjega tobogana na svetu = \_\_\_\_\_ cm

(a)



(b)

Slika 3: (a) Primer vaje pretvarjanja dolžinskih enot (lasten vir), (b) Geometrijski prikaz dimenzij za osnovnošolce (lasten vir)

km <sup>3</sup>			hm <sup>3</sup>			dam <sup>3</sup>			m <sup>3</sup>			dm <sup>3</sup> = l			cm <sup>3</sup> = ml			mm <sup>3</sup>		
										0		0	3	3						
	0,	4	7	3		0	0	0	0	0	0									

Slika 4: Primeren pripomoček za pretvarjanje enot za volumen, vnesene vrednosti pomenijo pretvarjanje 33 litrov in 0,473 km<sup>3</sup> v kubične metre. Z rdečo barvo so označena posebna poimenovanja (lasten vir).

Z razumevanjem predpon bi lahko celo izboljšali tako zaželeno finančno pismenost učencev. Celo odrasli težko primerjamo milijon in milijardo evrov. V analogiji s časom gre lažje: 10<sup>6</sup> (milijon) sekund : 3600 : 24 = 11,5 dneva glede na 10<sup>9</sup> (milijardo) sekund : 3600: 24 : 365,25 = 31 let in pol; glede na to, da je bankovec debel desetino milimetra, lahko učenci brez težav izračunajo, da milijon evrov brez težav spravimo v šolsko torbo, medtem ko bi z milijardo evrov lahko zapolnili manjšo sobo.

**4. Zaključek**

Mednarodni sistem enot (Système international) je skladen sistem merskih enot, ki temelji na osnovnih enotah in trenutno dvajsetih predponah za imena enot in simbole enot, ki se lahko uporabijo, kadar gre za večkratnike in dele enot. Z izpuščanjem nekaterih predpon porušimo skladnost, zato v nalogah dosledno uporabljamo tudi sicer še neobičajne predpone. Razložimo jih s potencami, prav tako njihovo pretvarjanje, pomagajmo si z mnemotehniko, predvsem pokažimo učencem, kaj konkretna enota s predpono predstavlja.

**Viri**

- [1] <https://www.rtv slo.si/tv/otroski/izodrom/merske-enote-in-pretvarjanje/523009>
- [2] <https://eucbeniki.sio.si/mat5/760/index4.html>
- [3] <https://eucbeniki.sio.si/matematika6/537/index7.html>
- [4] <https://eucbeniki.sio.si/fizika8/139/index1.html>

# Iskanje rešitev matematičnih problemov s pomočjo umetne inteligence

Avtorica: Danijela Gerksič Blatnik<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Prometna šola Maribor*

## 1. Uvod

Umetna inteligenca (v nadaljevanju UI) služi kot orodje za izboljšanje učinkovitosti in natančnosti pri reševanju matematičnih problemov, ne more pa nadomestiti razmišljanja in razumevanja. Metode, pri katerih lahko uporabimo umetno inteligenco za reševanje matematičnih problemov, vključujejo ustrezno programiranje, algoritme in veliko količino podatkov za uspešno delovanje. Postopki so odvisni od vrste problema in razpoložljivih podatkov. S pomočjo UI lahko na primer simbolno in numerično računamo, napovedujemo matematične trende, iščemo optimalne rešitve, prepoznavamo vzorce v velikih količinah podatkov, odkrivamo nove matematične strukture ali vzorce, ustvarjamo rešitve matematičnih problemov itd.

Uspešnost rešitve nekega problema, pri katerem smo želeli uporabiti UI, je odvisna od tega, kakšne podatke smo uporabili in seveda od zahtevnosti problema. S pomočjo razumevanja matematičnih konceptov in rešitev lahko pravilno uporabimo rezultate, ki jih zagotovi UI. V članku želimo prikazati nekaj najboljših orodij UI za učenje in razumevanje matematike. UI je spremenila način, kako se učenci učijo in razumejo matematiko, zaradi česar je zanje dojemanje matematičnih pojmov in konceptov lažje, privlačnejše in prijetnejše. Predstavili bomo nekaj orodij UI, ki pomagajo izboljšati matematične sposobnosti, ne glede na to, ali imajo učenci težave z osnovnimi koncepti ali želijo svoje sposobnosti nadgraditi. Med boljšimi orodji UI so Photomath, Socratic, Mathway, Wolfram Alpha, Maple Calculator. S pomočjo naštetih orodij imajo učenci dostop do rešitev po korakih in v realnem času.

Predstaviti želimo tudi, zakaj je ChatGPT, trenutno najbolj popularno orodje, slabši pri reševanju matematičnih nalog in podati nekaj napačno rešenih matematičnih problemov oz. prikazati, kako je treba nalogo formulirati, da dobimo pravilno rešitev. Potencial za še zmogljivejša in inovativnejša orodja UI v matematičnem izobraževanju je z napredkom tehnologije neomejen. Z nadaljnjim razvojem UI je prihodnost matematične izobrazbe videti obetavna.

## 2. Vsebina

Umetna inteligenca je sposobnost stroja, da izkazuje človeške lastnosti, kot so mišljenje, učenje, načrtovanje, kreativnost in izražanje. Napravam omogoča, da zaznavajo okolje (sprejmejo podatke s senzorji, kamero ipd.) ali uporabijo predhodno pripravljene podatke, zbrane podatke obdelajo in se odzovejo [1].

Evropska unija deli UI na dve področji, in sicer na programsko opremo (to so razni virtualni asistenti, programi za prepoznavo slik, sistemi za prepoznavanje govora ali obrazov) ter na »utelešeno« UI (to so roboti, samovozeči avtomobili, droni ipd) [1].

## 3. Uporaba UI

UI je že danes prisotna v naših vsakdanjih življenjih, čeprav se tega pogosto sploh ne zavedamo. Umetno inteligenco se uporablja za nasvete, prilagojene posamezniku, tako da analizira brskanje po spletu in nakupe. Umetna inteligenca ima velik pomen na področju trgovanja, saj omogoča optimiziranje prodaje izdelkov, načrtovanje zaloga, boljšo logistiko itd., uporablja se praktično na vseh korakih oskrbovalne verige. Iskalniki se učijo iz ogromnih količin podatkov, ki jih vnašajo uporabniki, da jim zagotavljajo relevantne rezultate iskanja [1].

Orodja za prevajanje, ki obdelujejo napisano ali govorjeno, se pri zagotavljanju in izboljševanju prevodov zanašajo na umetno inteligenco. Pri gledanju posnetkov lahko izbiramo med samodejnimi podnaslovi v vedno več jezikih, tudi v slovenščini. Pametni termostati analizirajo naše obnašanje, da prihranijo energijo, načrtovalci pametnih mest pa upajo, da bo umetna inteligenca lahko pomagala urejati promet in s tem izboljšala povezljivost in zmanjšala prometne zastoje. Samovozeča vozila še niso v splošni uporabi, a avtomobili že uporabljajo varnostne funkcije na podlagi umetne inteligence.

Navigacija v veliki meri temelji na UI. V boju proti covidu-19 je bila UI uporabljena za termalne slike na letališčih in drugje. V medicini lahko pomaga prepoznavati infekcije iz slik, pridobljenih z računalniško tomografijo in za pridobivanje podatkov o širjenju bolezni [1].

#### 4. Uporaba UI v izobraževanju

V šolah lahko UI uporabljamo na več področjih: spremljanje učnega procesa posameznikov in skupin učencev, napredovanje učencev, izboljšanje učnega procesa, ugotavljanje kritičnih situacij, inteligentni tutorski sistemi, prilagojeni učni programi, virtualne pametne učne vsebine, avtomatizirani klepet, dostop do učenja kadarkoli, od kjerkoli, avtomatizirano ocenjevanje, izobraževalne interaktivne igre, upravljanje urnikov, učenje jezika, kibernetika varnost, fizična varnost, načrtovane lekcije itd (Veber, 2022).

Obstajajo trije pristopi k uporabi umetne inteligence v razredu, ki so odvisni od učnih ciljev [3]:

1. Učenje z umetno inteligenco je vključevanje tehnologij umetne inteligence v pouk za izboljšanje učenja učencev in izboljšanje poučevanja. Nekaj primerov pri pouku uporabnih aplikacij: brezplačna aplikacija za učenje matematike je PhotoMath, Seek by iNaturalist je aplikacija, ki pomaga prepoznati rastlinske vrste na podlagi fotografij, Verse by Verse, kjer lahko učenci s pomočjo umetne inteligence napišejo pesem in se učijo o ameriških pesnikih, Duolingo za učenje tujih jezikov; orodja, kot sta Socratic in Brainly se lahko uporabljajo pri vseh predmetih.
2. Učenje za umetno inteligenco je pridobivanje novih spretnosti, ki jih potrebujemo oz. jih bomo potrebovali za življenje in delovanje v svetu, ki ga oblikuje umetna inteligenca. Učenci morajo biti opremljeni s sposobnostjo računalniškega razmišljanja in reševanja problemov, pa tudi z veščini programiranja in podatkovne pismenosti.
3. Učenje o umetni inteligenci za učinkovito uporabo umetne inteligence ter gradnjo novih orodij in tehnologij umetne inteligence.

Pri uvedbi tehnologije umetne inteligence obstaja več tveganj in omejitev:

1. Nekateri učitelji bodo uvedbi nasprotovali in jih bo treba ustrezno seznaniti s spremembo.
2. Kot pri številnih panogah bodo učitelji morda menili, da bi jih tehnologija umetne inteligence lahko na koncu nadomestila in bodo zato zadržani pri uporabi tehnologije pri pouku.
3. Integracija umetne inteligence zahteva podporo več zainteresiranih strani – staršev, učencev, učiteljev, skrbnikov in vodstva.
4. Umetna inteligenca ne bo ustrezna za vse predmete. Na primer, prilagojeno učenje in avtomatizirano ocenjevanje verjetno ne bo delovalo pri praktičnih predmetih z močnim subjektivnim elementom ocenjevanja, kot so drama, umetnost, živilska tehnologija in telesna vzgoja.
5. Ker so šole pod večjim finančnim pritiskom kot kadar koli prej, je uvedba tehnologije umetne inteligence v velikem obsegu draga in vse šole ne bodo imele preprostega dostopa do takih sredstev.
6. Zasebnost, podatki in kibernetika varnost: Verjetno največje tveganje pri uvajanju umetne inteligence v izobraževanje, saj je za uspeh potrebnih toliko osebnih podatkov. V izobraževalnem okolju je ta izziv še večji zaradi opravka z osebnimi podatki in informacijami mladostnikov, kar ureja strožja zakonodaja. Trdna strategija kibernetike varnosti in zasebnosti podatkov bo sestavni del uspeha.

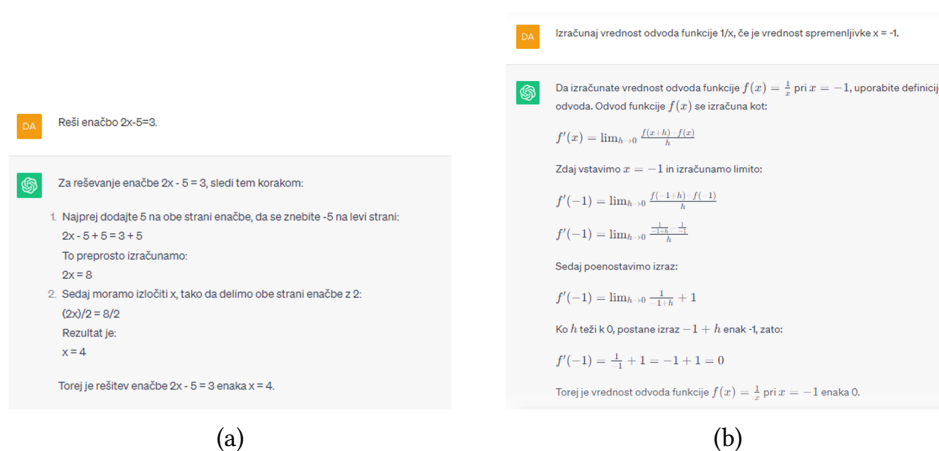
Na matematičnem področju lahko s pomočjo UI na primer simbolno in numerično računamo, napovedujemo matematične trende, iščemo optimalne rešitve, prepoznavamo vzorce v velikih količinah podatkov, odkrivamo nove matematične strukture ali vzorce, ustvarjamo rešitve matematičnih problemov, itd.

#### 5. ChatGPT (Chat Generative Pre-trained Transformer)

ChatGPT lahko deluje kot osebni učni pomočnik, ki se prilagaja individualnim potrebam in tempu vsakega učenca ter jim pomaga okrepiti njihovo razumevanje matematičnih pojmov. Vendar lahko izrazimo pomisleke glede točnosti in zanesljivosti ChatGPT-ja, saj lahko nudi napačne ali nepopolne

rešitve matematične težave. Drugi pomisleki vključujejo možnost za pretirano zanašanje na tehnologijo in izgubo človeške interakcije v procesu učenja. Kljub temu je splošno razpoloženje do ChatGPT-ja v izobraževanju pozitivno, saj vidimo njegov potencial za izboljšanje učne izkušnje in matematičnih sposobnosti učencev [4].

Natančnost odzivov je ključnega pomena za učinkovito sprejemanje v šolskem delovanju. Odvisna je od več dejavnikov, vključno s kakovostjo in specifičnostjo vnosa (t. i. prompta), ki ga zagotovi uporabnik, kompleksnosti vprašanja ali teme ter obseg in ustreznost njegovih podatkov. Izraza prompt in prompting še nimata uveljavljenega prevoda v slovenščino, lahko bi rekli, da ukažemo ali pozovemo, da se neko delo opravi. Lahko pa pride tudi do pravega pogovarjanja in imamo na koncu že občutek, da se pogovarjamo z dejansko osebo [5]. Pisanje promptov tako postaja nova veščina, saj želimo, da je vnos učinkovit in je posledica ustrezna rešitev. Prav tako je treba za potrditev natančnosti navzkrižno preveriti ustvarjene odgovore z drugimi viri, sploh pri matematičnih problemih, saj je, sploh verzija 3.5, izrazito bolj jezikovno orodje. ChatGPT razvija izjemno sposobnost za izvajanje matematičnih operacij. Z naraščajočo razširjenostjo UI in digitalne tehnologije v izobraževanju je verjetno, da bodo imela ChatGPT in podobna orodja še naprej pomembno vlogo pri oblikovanju poučevanja v prihodnosti.



Slika 1: (a) Pravilno rešena naloga, z natančno opisanim postopkom, (b) Primer napačno rešene naloge.

Učenci ChatGPT najpogosteje uporabljajo za pisanje besedil (eseji, seminarske naloge), za zbiranje idej, za ustvarjanje nalog za vajo in za zbiranje informacij. Za reševanje matematičnih problemov ga zaradi učenčevega pomanjkanja izkušenj in slabega (pred)znanja matematike, za splošno rabo pri pouku ne bi predlagali.

## 6. Orodja za učenje in poučevanje matematike

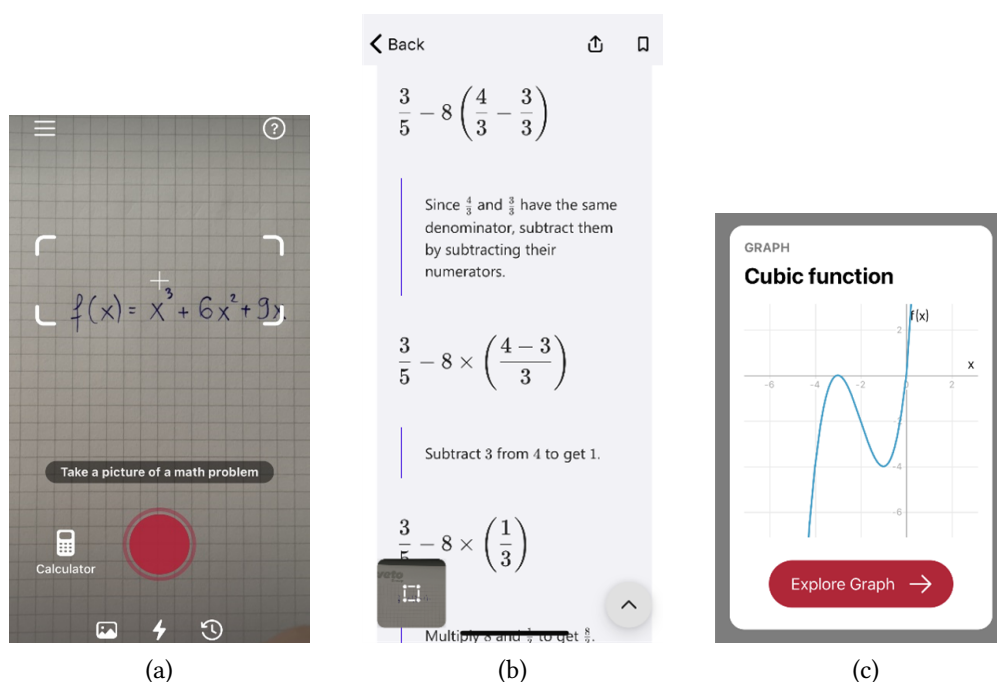
Tehnologija je spremenila način, kako se učimo in razumemo matematiko. Ena izmed najpomembnejših inovacij na tem področju je razvoj orodij umetne inteligence. Le-ta spreminjajo način, kako doumevajo matematiko, kar jo dela zanje lažjo, bolj privlačno in zabavno. Raziskali smo nekaj orodij za učence matematike, ki pomagajo izboljšati njihove matematične sposobnosti - ne glede na to, ali se borijo z osnovnimi koncepti ali želijo dvigniti svoje veščine na naslednjo raven [2]. Omejili smo se na štiri mobilne aplikacije, ki so zelo enostavne za uporabo, hkrati pa so brezplačne: PhotoMath, Socratic, Maple calculator in MS Math Solver. Vsem aplikacijam je skupno to, da prepoznajo ročno napisane matematične naloge, kar učencem olajša njihovo reševanje na papirju in nato preverjanje njihovega dela. Razlike in podobnosti med aplikacijami:

1. Vse aplikacije dajo rešitev v realnem času.
2. Vse aplikacije prikažejo postopek reševanja po korakih.
3. Socratic je, poleg matematičnega področja, uporaben na več drugih področjih in edini ob prepoznavi zahtevnejšega problema ponudi dve spletni strani (MathPapa in WolframAplha), ki ponujata rešitev.

4. Nobena aplikacija nima težav s prepoznavo ročno napisanega problema.
5. Samo pri aplikaciji Maple calculator smo zasledili težavo s pridobivanjem postopka reševanja (npr. kako se izračunaj nedoločeni integral).
6. Vse aplikacije so v angleščini.

Pri testiranju aplikacij nismo zasledili nobene napačne rešitve, subjektivno mnenje pa je, da nudi aplikacija PhotoMath najboljši uporabniški vmesnik in najbolj pregledne rešitve.

Orodja umetne inteligence ne morejo in ne smejo nadomestiti učitelja. Lahko so samo odlično orodje, ki osnovne pojme ali njihovo nadgradnjo dodatno razložijo, hitreje ponudijo rešitev, lahko pa tudi spremenijo dojemanje matematike. Učitelj snov razloži v eni šolski uri, utrdijo jo v dveh urah, z mobilnimi aplikacijami pa dobijo učenci neko rešitev kadarkoli, v realnem času in tako samostojno utrjujejo. Postavlja se seveda vprašanje, koliko so učenci sposobni presoditi, ali je neki odgovor, ki ga ChatGP ponudi, verodostojen. Zagotovo pa bodo imela orodja UI pomembno vlogo pri oblikovanju poučevanja v prihodnosti.



Slika 2: (a) Skeniranje ročno napisane naloge z PhotoMath, (b) Rešitev po korakih (MS Math), (c) Graf funkcije (PhotoMath).

## Viri

- [1] Zavod PIP, *Kaj je umetna inteligenca?*, <https://lokalec.si/novice/kaj-je-umetna-inteligenca/> (2021).
- [2] Blackwell, J., *10 Best AI Tools for Math Students (Free and Paid)*, <https://purefuture.net/2023/03/30/10-best-ai-tools-for-math-students-free-and-paid/>, (2023).
- [3] School education gateway, *Kako lahko umetno inteligenco vključimo v izobraževanje?*, <https://www.schooleducationgateway.eu/sl/pub/resources/tutorials/ai-in-education-tutorial.htm>, (2021).
- [4] Wardat, Y. in ostali, *ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics*, <https://www.ejmste.com/download/chatgpt-a-revolutionary-tool-for-teaching-and-learning-mathematics-13272.pdf>, (2023).
- [5] Dolenc, S., *Veščina komuniciranja z umetno inteligenco*, <https://www.delo.si/mnenja/kolumne/vescina-komuniciranja-z-umetno-inteligenco/>, (2023).



## Matematični tabor - priprave na maturo

**Avtorica:** Nataša Jerman<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Gimnazija Poljane

Učitelji se vseskozi trudimo, da bi dijake kar se da najbolje pripravili na maturo, in iščemo različne nove pristope do kvalitetnejšega znanja in s tem povezanih boljših rezultatov. Leta 2010 smo se učitelji matematike na Gimnaziji Poljane odločili, da poskusimo z matematičnim taborom. Ideja o taboru se je porodila ravno na enem izmed občnih zborov DMFA.

Ob tem smo se srečali s kar nekaj izzivi – kdaj imeti tabor glede na zaključno ocenjevanje in kasneje maturo, kakšen način dela bomo imeli, koliko dijakov se ga bo lahko udeležilo, koliko učiteljev matematike je nujnih za tekoče delo na taboru, kako izpeljati tabor, da se dijaki kar najbolje pripravijo na maturo iz matematike, kako in kdaj vključiti športne aktivnosti in ali naj bodo obvezne ali ne.

Časovno smo se odločili, da bo tabor tik pred maturo in po zaključku šolskega dela dijakov, zato smo prvi tabor izvedli sredi maja 2011. Glede lokacije smo se odločili, da mora biti zunaj šole, stran od urbanega vrveža in lokalov, nekje v naravi. Izbrali smo Bohinj.

Vsi učitelji smo do tabora v vseh četrtrih letnikih že ponovili vso snov za maturo, zato smo se na taboru odločili za drugačen način dela. Dijaki so delali v skupinah in imeli na voljo pomoč učitelja.

V Bohinju smo rezervirali ČŠOD Bohinj (na razpis se vsako leto prijavimo že več kot leto pred terminom) – to je dom, ki izvaja šolske in obšolske dejavnosti, cena za polni penzion je ugodna. Dom je tik ob jezeru, v naravi. Glede na takratne kapacitete doma je na tabor prvič lahko šlo 96 dijakov in 6 učiteljev.

V petek, 13. maja 2011, smo se takoj po pouku z dvema avtobusoma odpeljali v Bohinj. Ob 16.10 smo prispeli v Bohinj, dijaki so se razporedili po sobah po vnaprej določenem razporedu in ob 16.30 že bili v učilnicah, kjer so reševali naloge.

Delo je potekalo v štirih skupinah, vsaka je bila v svojem prostoru. Dijaki so bili ves čas v isti skupini, učitelji pa smo se menjavali. Skupine smo določili vnaprej tako, da so bili v dveh skupinah dijaki za višji, v dveh skupinah pa za osnovni nivo mature. Razdeljeni so bili po abecedi, torej so bili skupaj dijaki iz različnih oddelkov in z različnim znanjem.

Ob prihodu na tabor je dijak dobil skripta z nalogami iz starih maturitetnih pol – od 2004 do 2010 (naloge, ki so objavljene na spletni strani RIC-a). Rešitev dijak niso dobili, so pa pri učitelju imeli na voljo skripta, v katerih so lahko rešitve preverili. Za naloge teh let smo se odločili, saj smo pri pouku delali s knjigo Matematika: zbirka maturitetnih nalog z rešitvami 1995–2003. Zdaj pri pouku delamo z novo knjigo Matematika: zbirka maturitetnih nalog z rešitvami 2012–2019, na taboru pa dijaki rešujejo naloge iz matur iz drugih let – večinoma mature od 2020 naprej.

Naloge so reševali do večerje. Po večerji so imeli na izbiro reševanje nalog ali pa prosti čas (šport na igriščih ČŠOD, sprehod, nekateri tudi učenje).

Drugi dan, v soboto, so reševali naloge od zajtrka do kosila. Po kosilu je sledil obvezen nezahteven sprehod okrog jezera, da so si malce zbistrili možgane. Sprehod sta pripravila dva spremljevalna učitelja, ki sta planinska vodnika. Pot okrog jezera, ki je dolga slabih dvanajst kilometrov, nam je vzela dobri dve uri in pol.

Ob vrnitvi v dom so se dijaki lahko odločili za reševanje nalog, športne igre (nogomet, košarka, odbojka) ali pa so odšli do obale jezera. Izbrali so različne aktivnosti, veliko jih je reševalo naloge.

V nedeljo so reševali naloge od zajtrka do kosila. Zanimivo jih je bilo opazovati, kako radi so reševali naloge in kako so si medsebojno pomagali. Tukaj veselja ob reševanju niso kazali le boljši dijaki, tudi slabši so bili navdušeni, saj so opazili, da znajo dobro in da večino nalog rešijo pravilno.

Po kosilu so nas čakali avtobusi in odpeljali smo se nazaj v Ljubljano, saj je bil v ponedeljek običajen šolski dan.

Po končanem taboru smo izvedli anketo med vsemi dijaki, ki so bili na taboru. Tabor je izpolnil pričakovanja 96% dijakov, 86% jih je menilo, da je termin tabora ustrezen. Na taboru jim je bilo



najbolj všeč sproščeno vzdušje in delo po skupinah, najmanj pa hrana. 95% dijakov je bil način dela na taboru všeč. Dijake smo vprašali po opisni oceni učiteljev, ki smo sodelovali na taboru – 40% jih je izbralo odgovor odlični, 25% pripravljeni pomagati, 16% sproščeni in prijetni, 17% dobro razlagajo snov, 2% pa nista zapisala odgovora. Tabor je z oceno odlično (5) ocenilo 63% dijakov, 37% z oceno prav dobro (4), nihče pa tabora ni ocenil z ocenami 1, 2 ali 3.

Nekaj zapisanih opisov dijakov na anketi:

- Bilo je zabavno, česar si ne bi mislili za matematični tabor.
- Odličen uvod v intenzivno učenje za maturo.
- Odlična priprava na maturo iz matematike, saj smo se učili zunaj šolskega okolja, kar pomeni brez pritiskov, v sproščnem vzdušju.
- Super, predlagam, da tabor organizirate tudi prihodnja leta.

Ugotovili smo, da je bil tabor zelo uspešen in od takrat naprej ga z manjšimi popravki izvajamo vsako leto. Popravljen skozi leta res skorajda ni bilo – spreminjajo se le skripta, da so ažurirana in vsebujejo tudi naloge zadnje mature, ter da morajo sedaj vsi dijaki iti na pohod v soboto po kosilu.

Učitelji izvajamo tabor v svojem prostem času in brez honorarja, a nas mnenja dijakov o taboru in naši vtisi o njem prepričajo, da delamo prav in da z delom nadaljujemo. Da je tabor dobra ideja, se vidi tudi po tem, da so tudi druge šole začele izvajati podobne tabore. Tabor zagotovo dobro vpliva na rezultate na maturi, dijakom da znanje in samozavest. Naši dijaki opravijo maturo iz matematike zelo uspešno.

21

## Pouk fizike in uporaba škipcev v naravi

**Avtor:** Marko Juretič<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Osnovna šola Lucijana Bratkoviča Bratuša Renče

### 1. Uvod

Kako pomembno se je soočiti z izzivi poučevanja, sodobnimi pristopi in kako učencem karseda enostavno pomagati razvijati kompetence in veščine, ki bodo ključne za njihov razvoj in uspešno delo ter preživetje v 21. stoletju (komunikacija, sodelovanje, kritično mišljenje, ustvarjalnost ipd.)? Aktivna vloga učencev pri pedagoškem procesu lahko vodi v dvig motivacije, izboljšanje razumevanja in pridobivanje novih izkušenj. Zato učitelji uporabljamo različne inovativne učne oblike in metode, s katerimi imajo učenci vlogo aktivnih udeležencev in ne samo pasivnih prejemnikov informacij. Za učitelje je zelo pomembno dobro poznavanje tako uveljavljenih kot tudi inovativnih metod in pristopov poučevanja, saj lahko z ustrežno kombinacijo izboljšajo pedagoški proces. Temu posebno

pozornost namenjajo tudi na študijskih programih za izobraževanje bodočih učiteljev naravoslovnih vsebin. Organizacija in izvedba pouka na prostem lahko pozitivno učinkujeta na telesno in duševno zdravje učencev, pripomoreta k dvigu motivacije in posledično izboljšata učne dosežke. Pri določenih vsebinah lahko izkoristimo danosti narave in tako učencem na praktičen način prikažemo delovanje fizikalnih pojmov in zakonov v naravi. Na ta način učenci preko čutil ozavestijo vedenje in znanje kar povzroči kvalitetnejše in trajnejše pomnjenje.

## 2. Pouk na prostem

Najširša opredelitev pouka na prostem je, da je to organizirano učenje, ki poteka zunaj šolskih stavb. Pouk na prostem se sklicuje na filozofijo, teorijo in prakso izkustvenega učenja in okoljske vzgoje. Pouk na prostem je lahko zabaven, zdrav, poceni, v skladu s trajnostnim razvojem in z velikimi uspehi pri osebnem in socialnem razvoju ter doseganju še drugih ciljev. Obstaja veliko različnih možnosti za izvajanje pouka na prostem, tako z vidika časa kot lokacije. Glede na dejstvo, da danes slovenski učenci veliko časa preživijo v zaprtih prostorih, bi bilo priporočljivo, da bi po šolah načrtno in sistematično organizirali različne oblike pouka na prostem.

Na šolskem igrišču ali dvorišču so vsakodnevno večinoma le mlajši učenci v času odmora, po kosilu, v času tako imenovanega podaljšanega bivanja oziroma po novem tako imenovanega razširjenega programa. Doma učenci večinoma svoj prosti čas najraje preživijo ob telefonskih zaslonih, televizijskih ekranih in računalnikih. V šolah so ure pouka zunaj učilnice zelo redke, izjema so kulturni, športni, tehniški in naravoslovni dnevi ter šole v naravi. Vse to pa je omejeno v skladu z nacionalnim šolskim koledarjem na nekaj dni v letu.

Če se ozremo na organizacijo pouka v nekaterih drugih državah, potem je zagotovo ena največjih razlik, da so tam v dopoldanskem času učenci bistveno več zunaj. Na Finskem, na primer, so učenci zunaj med vsakim odmorom ne glede na vreme. Tam se psihično in fizično sprostitjo, da lahko potem bolj zbrano sodelujejo pri naslednji učni uri. Podobno lahko vidimo tudi v številnih drugih državah. Na Islandiji, na primer, kjer so vremenske razmere za pouk zunaj zagotovo od vseh evropskih držav najmanj primerne, ima večina osnovnih šol v šolskem programu pouk na prostem kot del vzgoje in izobraževanja za trajnostni razvoj. Tako sistematično enkrat na teden učenci 120 minut preživijo v okolici šole. Vsi, ki se ukvarjajo z vzgojo in izobraževanjem, vedo, da aktivnosti na prostem pomembno prispevajo k zdravemu razvoju osebnosti. Strokovnjaki poročajo, da ima danes vedno več otrok duševne težave in so pretežki. Morda je ozavešanje tega še toliko bolj pomembno prav v času, ko sta računalnik in mobilni telefon za učence najbolj privlačni stvari na svetu. Da bi učencem omogočili kakovosten pouk, je nujno treba organizirati tudi pouk na prostem.

Tudi sodobne nevrološke raziskave kažejo, da otroci nujno potrebujejo spontano igro in gibanje po neravni površini, več socialnih odnosov. Samo tako se njihovi možgani pravilno razvijajo, bolj so organizirani, učljivi in dalj časa zbrani. Zaradi koordinacije in ravnotežja, ki ga razvijajo med gibanjem, usklajeno delujeta obe možganski polovici.

## 3. Zakaj pouk na prostem

Pouk na prostem omogoča učenje, igranje, ustvarjanje itd. na svežem zraku. V Veliki Britaniji so že leta 2006 na Ministrstvu za izobraževanje izdali manifest o učenju zunaj učilnice, s katerim sistemsko spodbujajo različne oblike pouka na prostem. Menijo, da mora vsaka mlada oseba izkusiti svet zunaj učilnice kot bistven del učenja in osebnega razvoja ne glede na leta, sposobnosti in okoliščine. S tem, da mladi uporabijo svoje znanje v številnih izzivih, učenje zunaj učilnice gradi mostove med teorijo in realnostjo, šolami in lokalnimi skupnostmi, mladimi in njihovo prihodnostjo. Kakovostne učne izkušnje v resničnih situacijah omogočajo izboljšanje dosežkov pri številnih predmetih in razvijanje boljših osebnih ter socialnih spretnosti. Za pouk na prostem obstaja veliko različnih razlogov. Med drugim:

- omogoča učencem realno, pozitivno izkušnjo,
- izboljša fizično in mentalno zdravje učencev,
- poveča motivacijo, navdušenje, samozavest; manj je težav z motnjami pozornosti,
- izboljša vedenje učencev v razredu (timsko delo, povezanost skupine itd.),
- poveča ročne spretnosti, koordinacijo, ravnotežje; manj je poškodb,
- izboljša učne dosežke,

- omogoča socialni razvoj (sodelovanje, zaupanje itd.),
- spodbuja individualne učne metode,
- poveča skrb in odgovornost za okolje (vzgoja in izobraževanje za trajnostni razvoj),
- omogoča medpredmetno povezovanje.

Prav s tem namenom se je pouk fizike namensko preselil v naravo. Pogoj in povod za to je bil v skladu z letnim delovnim načrtom Osnovne šole Lucijana Bratkoviča Bratuša Renče načrtovan v šolskem letu 2022/2023 dan dejavnosti in izvedba pouka v naravi. Izvajal se je na prizorišču Tabora preživetja (Vinišče, Renče) v strnjem časovnem bloku med 8.30 in 11.30 v obliki samostojne fizikalne delavnice, v katero je bilo vključenih do 12 učencev. Različne delavnice so pripravili vsi strokovni delavci za vse učence od 4. do 9. razreda. Temeljile so na izkustvenem učenju, doživljajski, gozdni in cirkuški pedagogiki, kjer učenci čim bolj uporabijo okolje, v katerem se nahajajo, ga začutijo, doživijo in se ob tem učijo drug od drugega ter od narave. Izhodišča delavnic so utemeljena s cilji iz učnih načrtov. Na delavnici so učenci v heterogeni skupini preko dela, nalog in igre usvajali šolske vsebine fizike po metodi naravnega učenja. Naravno učenje je izkustveno učenje in vodi v otrokov trajnostni razvoj. Otroci potrebujejo svobodo, časovno in prostorsko. Potrebujejo stik s predmeti, z okoljem, s pravim življenjem, z ljudmi vseh starosti. Otroci hočejo razumeti, zakaj se nekaj zgodi in kako. O tem ne želijo le poslušati, ampak morajo to izkusiti. Naravno učenje ni načrtovano niti strukturirano, je del vsakdanjega življenja in se zgodi samo od sebe. Je najbolj učinkovito učenje, ker hkrati aktivira vse čute in zajame tudi čustva.

#### 4. Glavne ovire za izvajanje pouka na prostem

Ovire in pomisleke za izvajanje pouka na prostem bi lahko naštevali v nedogled. Veliko je lahko razlogov, ki botrujejo k temu, da se določena aktivnost, pa čeprav je dokazano zelo dobra in ima pozitivne učinke, ne izvede. Ne glede na vse, bi glavne ovire za izvajanje pouka na prostem lahko strnili v tri točke:

1. organizacijski problemi (marsikateremu učitelju je odveč dodatni napor, potreben za izvedbo dela na prostem),
2. vsebinski problemi (nekateri učitelji menijo, da ne vedo dovolj o naravi, da bi z učenci lahko delali na prostem) in
3. disciplinski problemi (zunaj štirih sten razreda je skupino težje nadzirati, saj je na prostem več svobode).

Učitelji pogosto opozarjajo na neurejeno okolico šole, da nimajo zunanje učilnice, slabe vremenske razmere, pomanjkanje časa, ki ga povezujejo z obsežnimi učnimi načrti, več priprave na pouk zunaj učilnice in šole, ne le vsebinske, tudi organizacijske, in to, da je potrebna večja pozornost glede varnosti. Ob slabem vremenu učitelji učence in starše opozorijo na primerno obleko in obutev ter kljub morda neidealnemu vremenu izvedejo pouk zunaj šole – razen če so hudi nalivi, megla in podobno – pomanjkanje časa za izvajanje pouka zunaj šole pa lahko učitelji rešijo z medpredmetnim povezovanjem. Problematična sta morda le varnost in spremstvo, ki ga morajo imeti učitelji za pouk, če se ta oddaljuje od prostora šole. Kljub vsemu pa je razumeti tudi učitelje, ki se včasih neradi odločajo za pouk na prostem. Je zahtevnejši od dela v razredu, poleg tega so ovire, ki jih učitelji večkrat navajajo, precej resne – predvsem v sodobnih razmerah, ko ima že skoraj vsakdo pravico soditi vzgojno-izobraževalno delo. Poleg tega domača in tuja literatura med ovirami, na katere opozarjajo učitelji, navaja normative za spremljanje skupin, varnostne vidike oziroma odgovornost učitelja, financiranje ekskurzij, usklajevanje urnikov, motivacijo učencev in dijakov za pouk na prostem. Dokazano se je vsem omenjenim problemom mogoče v veliki meri izogniti s primerno izbranimi dejavnostmi, požrtvovalnostjo in zagnanostjo učiteljev ter motivacijo in primerno obravnavo učencev.

#### 5. Zakon pouka na prostem ne prepoveduje

Ministrstvo za vzgojo in izobraževanje in Zakon o osnovni šoli ne določata, da se organizirano vzgojno-izobraževalno delo izvaja le v prostorih šole oziroma, da se ne sme izvajati tudi zunaj prostorov šole. Obvezni del programa, ki ne poteka v prostorih šole in ga Zakon o osnovni šoli izrecno določa, je recimo šola v naravi – za tiste, ki se je ne udeležijo, pa šola v tem času organizira druge, primerljive dejavnosti. Izvajanje pouka zunaj šolskih prostorov omogoča tudi Predmetnik osnovne šole, kjer so v okviru obveznega programa zapisani dnevi dejavnosti (kulturni, naravoslovni,

tehniški in športni), ki zajemajo 15 obveznih dni dejavnosti na leto v vsakem razredu, poleg njih pa tudi šolo v naravi. V razlagi Koncepta dni dejavnosti je zapisano, naj se vsem učencem vsaj enkrat v osnovnošolskem izobraževanju omogoči obisk večjih kulturnih središč in drugih institucij, kot so botanični in zoološki vrt, arboretum in observatorij. Organizacija in izvedba pouka na prostem je mogoča na ravni posamezne šole (celega kolektiva), v aktivih (skupina učiteljev) ali na ravni posameznega učitelja in je ne regulira pristojno ministrstvo. Ministrstvo spodbuja razvoj in raznolikost pedagoških strategij, ki so v neposredni povezavi z izkustvenimi metodami učenja, saj naj bi te pri učencih spodbujale sodelovalni vidik in neposredno izkušnjo. Kljub vsemu pa naletimo na kopico težav, ki bi jih bilo treba skladno z obstoječimi zakoni razrahljati in šolam pomagati, da se tovrstne aktivnosti lahko izvedejo z manj birokratskih zapletov in težav. Zagotovo je tu v največji meri težava dela ob vikendih in vrednotenje dela po presegu normativa ur, kjer imajo ravnatelji, če se do potankosti držijo zakonov, zvezane roke.

## 6. Sodelovanje z lokalnimi društvi

Za izvedbo delavnice z vravnimi tehnikami in škripci je bil k dejavnosti povabljen Javni zavod za gasilsko in reševalno dejavnost - Gasilska enota Nova Gorica, ki je poklicna gasilska enota VI. kategorije. Z veseljem so se odzvali vabilu in poslali dva poklicna gasilca. Gasilci se z deli oziroma reševanjem na višini, strmini in globini srečujejo večinoma v urbanem okolju, na gradbiščih in v industriji, oziroma povsod tam, kjer druge reševalne službe (gorska reševalna služba, jamarska reševalna služba) niso prisotne ali bi bil njihov odzivni čas predolg. V zadnjih letih se je v gasilstvo uvedlo precej sodobnih postopkov vravnega reševanja, s tem pa tudi sodobna, izpopolnjena orodja nadomeščajo nekatera dosedanja, ki ne nudijo primerljive stopnje varnosti oziroma zaščite pred zdrsi in padci (npr. uporaba sodobnih vravnih zavor – desenderjev namesto osmic in vponk). V sklopu delavnice so učenci skupaj z gasilci v praksi preizkusili uporabo škripca, škripčevja in pripravili svoj lasten zipline, ki je učence še dodatno motiviral in pritegnil v sodelovanje.



Slika 1: Učenci preizkušajo različne tehnike in uporabo škripcev za dvigovanje bremena.

## 7. Aktivnosti učencev

Učenci imajo zaradi namensko organiziranih heterogenih skupin različno predhodno znanje. V drugi in tretji triadi, od 4. do 8. razreda, so bolj ali manj znanje o škripcih pridobili izkustveno v domačem okolju, teoretično znanje o silah in naravnih zakonitostih pa so morebiti spoznali pri drugih naravoslovnih predmetih. V skladu z učnim načrtom so le učenci 9. razreda tisti, ki so predhodno pri pouku fizike v skladu z učnim načrtom pridobivali znanje za delo z orodji. Predpostavljamo torej, da vedo, da predmete ali naprave, s katerimi si olajšamo delo, imenujemo orodja ter da preprosta orodja ne zmanjšajo dela rok, temveč samo spremenijo, način, silo oziroma pot. Vedo, da je škripec

orodje, s katerim lahko zmanjšamo silo, potrebno za dviganje bremena, ali pa preusmerimo smer sile. Sestavlja ga kolo z utorom za vrv, pletenico oziroma jeklenico. Napravo z več škripci imenujemo škripčevje. Čeprav je z uporabo škripca potrebna manjša sila za dviganje bremena, pri dvigovanju bremena do iste višine opravimo enako delo, saj deluje sila na ustrezno daljši poti. Učenci so spoznali razliko med:

- pritrjeni škripec - kolo z utorom pritrđimo višje, kot je višina, do katere želimo breme dvigniti;
- gibljivi škripec - vrv pritrđimo višje, kot je višina, do katere želimo breme dvigniti;
- škripčevje - sestavljeno je iz gibljivega in pritrjenega škripca.

Učenci so preizkusili vse tri možnosti. Najprej so opravili poskuse s pritrjenim škripcem, ki ima nepremično os in ga uporabljamo le za spreminjanje smeri. Sila, s katero dvigujemo breme, je enaka teži bremena. Breme se dvigne za toliko, kot povlečemo, prestavimo vrv. Učenci so s praktičnimi primeri dvigovanja bremena ugotovili, da se vseh bremen ne da enostavno dvigniti in da je treba vleči vsaj s silo, ki je enaka teži bremena. Gibljivi škripec ima prosto os, z njim zmanjšamo silo, potrebno za dvigovanje bremena. Sila, potrebna za dvigovanje bremena, je enaka polovici teže bremena, vendar se zato opravi dvakrat daljšo pot (več vrvi). Torej, če breme dvignemo za 1 meter visoko, potrebujemo zato 2 metra vrvi. Učenci so s praktičnim poskusom ugotovili, da s svojo težo lahko dvignejo skoraj dvakrat težji predmet. Škripčevje, ki je sestavljeno iz pritrjenih in gibljivih škripcev, so poskusili uporabiti kod zadnje, kar vidimo na sliki 1. Sila, potrebna za dvigovanje bremena, je lahko dosti manjša od teže bremena, odvisno od škripčevja. Vsak pritrjeni škripec usmerja silo, vsak premični pa prepolovi silo.

## 8. Zaključek

Glede na znana dejstva o pozitivnih učinkih pouka na prostem na psihični in fizični razvoj učencev bi si gotovo želeli, da bi vse slovenske osnovne šole ozaveštile možnost uporabe okolice šole za izvajanje pouka zunaj. Ovir za to ne bi smelo biti, saj tudi učni načrti spodbujajo izkustveno učenje, ki ga je najbolj smiselno izpeljati v realnem svetu. V okviru rednega pouka naj bo pouk na prostem organiziran načrtno in sistematično. To je mogoče narediti na sistemski ravni (celoten kolektiv in vodstvo šole), v aktivih (skupina učiteljev) ali individualno (posamezni učitelj). Želimo si, da bi učenci radi hodili v šolo in prav pogoste in različne oblike pouka na prostem so ena od priložnosti, da ta cilj dosežemo.

## Viri

[1] Skribe – Dimec, D., Mršnik, S., Novak, L. Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi, Spoznavanje okolja, Naravoslovje in tehnika, Pouk na prostem, Pedagoška fakulteta, Univerza v Ljubljani, (2014),79-83, [http://pefprints.pef.uni-lj.si/2577/1/Skribe\\_Pouk\\_na\\_prostem.pdf](http://pefprints.pef.uni-lj.si/2577/1/Skribe_Pouk_na_prostem.pdf)

17

## S programiranjem v matematiko in z matematiko v programiranje

Avtor: Matija Lokar<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

**Povzetek** V prispevku želimo pokazati, kako lahko med učenjem matematike spoznavamo določene programske koncepte in hkrati učencem ali dijakom predstavljamo določene matematične pojme. To ni le medpredmetno sodelovanje; dejavnosti ne ločujejo, temveč vsebujejo znanje iz obeh področij. V prispevku pokažemo nekaj tovrstnih primerov. Z uporabo naključnih števil, ki jih lahko ustvarimo z računalnikom, povežemo matematične koncepte, kot so statistična definicija verjetnosti, razdalja med točkami in ploščina, s programerskimi koncepti, kot so na primer zanke in modularnost pri razvoju programa. Kot uspešen primer povezovanja matematike in programiranja na kratko predstavimo projekt ScratchMaths, kjer so zbrana številna gradiva, ki prepletajo pouk matematike in

računalništva v drugi triadi osnovne šole. Nekaj besed namenimo tudi spletni učilnici, kjer zbiramo gradiva in ideje za podporo učenju matematike in programiranja.

### 1. O računalniškem mišljenju, programiranju, algoritmih, matematiki ...

V sodobni družbi, kjer digitalna tehnologija igra vedno bolj vlogo, postaja računalniško mišljenje ena od najpomembnejših spretnosti. Ideje o pomembnosti takega načina razmišljanja, kot ga vsebuje računalniško mišljenje, srečamo že v sedemdesetih letih (glej npr. Papert 1970). A ugotovitve, da moramo sposobnost računalniškega mišljenja dodati k trem osnovnim sposobnostim, torej branju, pisanju in računanju, ki jih mora razviti vsak otrok, so bile vedno bolj izražene in utemeljene po članku Jannette Wing v reviji Communications of ACM (Wing 2006), ki je napisala "To reading, writing, and arithmetic, we should add computational thinking to every child's analytical ability".

Definicij, kaj računalniško mišljenje je, obstaja več. Vse pa vključujejo štiri osnove značilnosti. Ta so dekompozicija, prepoznavanje vzorcev, abstrakcija in algoritmi. O tem lahko več preberemo v številnih prispevkih, na primer v preglednem članku (Grover, Pea, 2013) ali pa v (Kranjc et al., 2017). Že iz teh osnovnih značilnosti je razvidno, da imata matematično in računalniško mišljenje številne skupne točke. Oba sta metodologiji reševanja problemov, saj vključujeta prepoznavanje vzorcev v strukturi problema, uporabo postopkov, kot so dekompozicija (razčlenitev problemov na manjše korake), oblikovanje algoritmov (oblikovanje splošnih načel na podlagi številnih primerov) in modeliranje (pretvorba predmetov ali pojavov iz realnega sveta v matematične enačbe in/ali računske odnose).

Kot lahko preberemo npr. v (Buitrago et al., 2017), je zelo učinkovit način za razvijanje računalniškega mišljenja prav učenje programiranja. Če povežemo izkazano prepletanje računalniškega in matematičnega mišljenja in dejstvo, da računalniško mišljenje lahko učinkovito razvijamo s pomočjo učenja programiranja je naravno, da poskusimo povezati poučevanje matematike in programiranja. Z ustreznimi didaktičnimi prijemi in ustreznim izborom primerov lahko sočasno dosežemo tako spoznavanje matematičnih konceptov kot tudi osvajanje osnovnih konceptov programiranja. Pri tem povezovanju moramo biti previdni, da ne gre zgolj za uporabo drugega predmeta kot vira zglede, brez spoznavanja konceptov.

### 2. Primeri iz prakse

V tem razdelku si oglejmo nekaj konkretnih primerov, kako lahko na smiseln način povezujemo poučevanje matematičnih in računalniških konceptov.

Ko učence in dijake seznanjamo s pojmom statistične verjetnosti (eTorba 2023), pogosto za ilustracijo uporabimo met kocke in računanje verjetnosti, da bo ob metu padlo 5 pik. Vendar pa, kolikokrat v razredu dejansko izvedemo poskus? Morda nekaj desetkrat, najbolj zagnani morda vržejo kocko 100-krat. Vendar pa rezultat praviloma ne bo primerljiv s teoretično verjetnostjo, torej z  $1/6$ , kaj šele, da bi za podkrepitev vse skupaj izvedli še enkrat, dvakrat, trikrat ... Zakaj ne bi izkoristili prednosti računalnika, ki lahko zelo hitro in brez utrujenosti izvede enostavno operacijo? Simulacija meta kocke je že taka preprosta operacija. Zato napišimo program, ki bo kar 6.000.000-krat simuliral met kocke in štel, kolikokrat je padlo 5 pik. Pri pisanju programa bomo uporabili več osnovnih računalniških konceptov. Med drugim bomo uporabili modularnost, za generiranje naključnih števil bomo uporabili kar ustrezno funkcijo iz Pythonovih knjižnic. Hkrati bo to precej bolj zanimiv zglede za uporabo zank, kot je "klasična", v številnih gradivih še vedno prisotna, naloga tipa S pomočjo zanke izpiši soda števila med a in b.

```
import random # uporabili bomo knjižnico za delo z nakl. števili
# štejmo mete s 5 pikami
met5 = 0
stevilo_ponovitev = 6000000
for _ in range(stevilo_ponovitev): # ponovimo ustreznokrat
    # izvedemo met
    met = random.randint(1, 6)
    # smo vrgli 5 pik?
    if met == 5:
        met5 = met5 + 1
print(f'V {stevilo_ponovitev} smo 5 vrgli {met5}. krat')
print(f'Statiistična verjetnost je torej {met5/stevilo_ponovitev}')
```

Primer lahko nadgradimo tako po računalniški kot tudi matematični plati. Naštejmo le dve ideji:

- Denimo, da hkrati vržemo dve kocki. Določimo statistično verjetnost, da bomo skupaj vrgli točno 7 pik.
- “Pokvarimo” kocko tako, da bomo sodo število pik vrgli dvakrat pogosteje kot liho število pik. Kakšne so sedaj ustrezne verjetnosti?

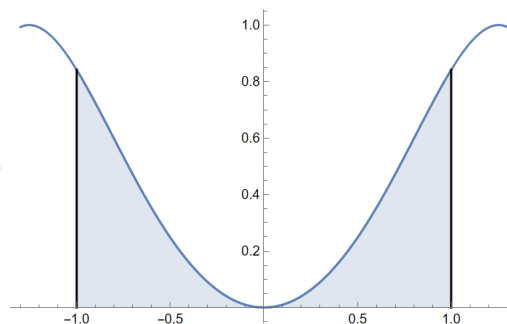
S pomočjo (psevdo)naključnih števil, ki nam jih lahko ustvari računalnik, lahko rešimo še več matematičnih problemov. Ostanimo pri pojmu statistične verjetnosti in jo uporabimo za določanje približka za število  $\pi$ . Naključno izbiramo točke v kvadratu  $1 \times 1$  in štejemo, koliko teh točk je za manj kot 1 oddaljenih od levega spodnjega oglišča kvadrata. Te so torej znotraj kroga s središčem v  $(0, 0)$  in polmerom 1. Ker je verjetnost, da je točka v krogu točno  $\pi/4$ , lahko, če izberemo veliko točk, tako pridemo do približka za število  $\pi$  kot s 4 pomnoženega deleža točk, ki so padle v krog. Sama koda bo presenetljivo (ali pa tudi ne) podobna prejšnji.

```
import random # uporabili bomo knjižnico za delo z nakl. števili
# štejmo točke v krogu
v_krogu = 0
stevilo_ponovitev = 600000
for _ in range(stevilo_ponovitev): # ponovimo ustrezno krat
    # izberemo točko
    x = random.random()
    y = random.random()
    # smo znotraj kroga?
    if x*x + y*y <= 1: # vzamemo kar kvadrat razdalje
        v_krogu = v_krogu + 1
približek_Pi = 4 * v_krogu/stevilo_ponovitev
print(f'V {stevilo_ponovitev} smo krog zadeli {v_krogu}. krat')
print(f'Približek za PI je torej {približek_Pi}')
```

Poglavitno pri dejavnosti je, da prepleta kar nekaj matematičnih in računalniških tem. Tako s področja matematike lahko govorimo o statističnem določanju verjetnosti, o razdalji med dvema točkama, o ploščini kroga ... S področja računalništva obravnavamo uporabo funkcije iz modul, psevdonaključna števila, zanko s štetjem ... Uro torej lahko izvedemo v sklopu pouka matematike ali pa v sklopu ure računalništva. Podobno kot prejšnjem primeru navedimo še tukaj nekaj izpeljank nalog:

- Vzemimo kvadrat s stranico 3. Levo spodnje oglišče naj ostane v  $(0, 0)$ . Radij kroga je seveda tudi 3.
- Kvadrat ostane tam, kjer je, krog pa včrtajmo kvadratu.
- Točke izbirajmo znotraj kvadrata s stranico 2 in središčem v  $(0, 0)$ .

S temi izpeljankami lahko preverimo, ali so učenci res razumeli tako matematični kot računalniški del konceptov. Še tretji zgled za uporabo statistično določene verjetnosti pa je naslednji. Denimo, da nas zanima ploščina med absciso in grafom funkcije  $\sin(x^2)$  na intervalu  $[-1, 1]$ .



Slika 1: Graf funkcije  $\sin(x^2)$  in ploščina pod grafom nad  $[-1, 1]$ .



Zagotovo se z analitično rešitvijo ne bomo ukvarjali, radi pa bi dobili približek rezultata 0,620537. Ideja je podobna kot prej. Točke bomo izbirali v pravokotniku  $[-1, 1] \times [0, \sin(1)]$  in šteli, koliko jih pade pod graf funkcije. Iz enačbe

$$\frac{plo_{sivo}}{plo_{prav}} = \frac{točke_{pod}}{točke_{vse}}$$

dobimo

$$plo_{sivo} = \frac{točke_{pod}}{točke_{vse}} * 2 * \sin 1$$

Z manjšimi spremembami prejšnjega programa pridemo do kode

```
import random # uporabili bomo knjižnico za delo z nakl. števili
import math # za matematične funkcije
# štejmo točke pod grafom
pod_grafom = 0
# potrebovali bomo sin(1)
ms1 = math.sin(1)
stevilo_ponovitev = 6000000
for _ in range(stevilo_ponovitev): # ponovimo ustresnokrat
    # izberemo točko
    x = random.uniform(-1, 1)
    y = random.uniform(0, ms1)
    # smo pod grafom
    if y <= math.sin(x*x):
        pod_grafom = pod_grafom + 1
plo = pod_grafom/stevilo_ponovitev * 2 * ms1
print(f'Približek za ploščino je {plo}')
```

Tu se odpirajo številne možnosti tako za utrjevanje osvojenega znanja kot za dodatno spoznavanje tako z matematičnimi kot računalniškimi koncepti:

- Vzemimo »enostavnejšo« funkcijo, npr.  $\sin(x)$  na intervalu  $[0, \pi]$ . Tu bodo dijaki lahko primerjali rezultat z analitično rešitvijo.
- Spremenimo interval denimo na  $[-1.5, 1]$ . Kako moramo »popraviti« pravokotnik, kjer izbiramo točke?
- Računajmo ploščino med grafoma dveh funkcij, ki se večkrat sekata.
- Zanima nas ploščina osnovnega vala funkcije  $\sin(x)$ , kjer pa manjka del, ki ga odreže krog s podanim središčem in radijem.
- ...

Zelo lep primer povezovanja poučevanja matematike in programiranja je projekt ScratchMaths. Za predstavitev ideje vzemimo kar opis, ki so ga avtorji projekta, ki je potekal pod okriljem ene izmed vodilnih angleških univerz, UCL iz Londona, napisali na začetni strani projekta. "Matematika je težka tudi zaradi jezika, v katerem se izraža. Ali lahko najdemo drugačen jezik - in niz idej ter pristopov -, ki bo bolj odprt, bolj dostopen in bolj učljiv. In ali ga lahko najdemo, ne da bi pri tem žrtvovali tisto, zaradi česar matematika deluje? Naš okvirni odgovor je "da" - jezik programiranja bi lahko bil - če ga pravilno oblikujemo - prav tak jezik."

Projekt ScratchMATH povezuje pouk matematike in računalništva v drugi triadi osnovne šole. Kljub temu bodo tudi profesorji, ki poučujejo matematiko v srednjih šolah, lahko v gradivih projekta našli številne dobre ideje, primere in zgledi. Navedene povezave z matematiko pomagajo vključiti vsebino v urnik in predlagajo medpredmetne povezave z drugimi predmeti.

S pomočjo programiranja so v projektnih gradivih uporabljene alternativne predstavitve matematičnih idej, kar zagotavlja drugačen pristop za učence, ki morda težje dostopajo do matematičnih konceptov na tradicionalne načine. Celoten projekt je zasnovan za izvajanje v dveh letih, s tremi moduli dejavnosti na leto. Prvi trije moduli so bolj usmerjeni v osvajanje osnovnih računalniških konceptov, medtem ko se zadnji trije moduli večinoma posvečajo matematičnim konceptom. V vseh dejavnostih pa še vedno prepletajo tako poučevanje matematike kot programiranja.

Gradivo je pripravljeno izjemno celovito, vključuje učne liste, plakate, navodila za učitelje, podporno video gradivo, predpripravljene datoteke s kodo, prosojnice za vsako lekcijo, dodatne izzive, slovar izrazov in ponuja časovni okvir za izvajanje dejavnosti.

Oglejmo si nosilne teme vseh šest modulov. Tema prvega modula so ponavljajoči se vzorci. Učenci se seznanijo z osnovami programiranja v Scratchu, kjer modul predstavi ključne računalniške koncepte, kot so zaporedje ukazov, ponavljanje, algoritmi, iskanje napak v programu. Hkrati jih preko gradnje ponavljajočih se vzorcev poveže z matematičnimi koncepti simetrije, kotov in negativnih števil.

Modul 2, Hroščeva geometrija, se osredotoča na ustvarjanje različnih risb s pomočjo želje grafike. Uporabi rimske številke in pravilne poligone kot primere, učence pa vpelje v izraze in naključnost ter utrdi prejšnje koncepte.

V modulu 3 se učenci seznanijo s programiranjem z uporabo več likov. V tem kontekstu so vpeljeni računalniški koncepti, kot so pogojni stavki, izmenjava sporočil, sočasno izvajanje, vse pa je povezano z matematičnimi pojmi, kot so koordinate, množenje in uporaba faktorjev.

Modul 4 se osredotoča na mestni zapis števil. V modulu 5 učenci raziskujejo različne vrste matematičnih razmerij, vključno s sorazmernostjo in razmerjem, ter uvajajo pojem spremenljivke. Modul 6, Koordinate in geometrija, raziskuje koordinate v vseh štirih kvadrantih in od učencev zahteva, da uporabijo svoje znanje o spremenljivkah. Pri spoznavanju matematičnih pojmov, kot so koordinate, zrcaljenje, translacije, se učenci hkrati seznanjajo z računalniškimi pojmi, kot so funkcija, skupek ukazov, dekompozicija problema in pojmi dogodkov ter kontrolnih struktur.

### 3. Spletne učilnice

S povezovanjem poučevanja matematike in programiranja se ukvarjamo tudi v sklopu seminarjev stalnega strokovnega izpopolnjevanja, učiteljev v osnovni in srednji šoli, ki jih izvajamo na Fakulteti za matematiko in fiziko. V sklopu teh seminarjev sta nastali (in še nastajata) dve spletni učilnici. V obeh je na voljo kar nekaj gradiv, ki na različen način povezujejo poučevanje obeh področij. Posebej so zanimiva gradiva, ki so jih pripravili udeleženci – učitelji – sami v obliki učnih listov. Naj naštejemo le nekaj naslovov, iz katerih je razvidna raznolikost tem: Delitelji, Pitagorov izrek in Evklidov algoritem, Iskanje ničel kvadratne funkcije, Značilne točke parabole, Podaljšajmo obalo, Zaporedja, Vietovo pravilo, Fibonacci, Ali je praštevilo, Število Pi, Polinomi ...

Prvo najdemo na naslovu <https://lokar.fmf.uni-lj.si/moodle/> (tečaja S programiranjem v matematiko OŠ 2022 in S programiranjem v matematiko SŠ 2022), drugo pa <https://lokar.fmf.uni-lj.si/spluc/> (tečaja S programiranjem v matematiko OŠ 2023 in S programiranjem v matematiko SŠ 2023). Uporabljeni programski jeziki so različni, od jezikov za programiranje z delčki, kot je Scratch, do »klasičnih« programskih jezikov, na primer Python. Večina gradiv je pripravljenih tako, da jih lahko preprosto prilagodimo za uporabo v drugih jezikih.

### 4. Zaključek

Povezovanje poučevanja matematike in programiranja predstavlja priložnost, ki omogoča učencem in dijakom kvalitetnejše razumevanje matematike ter osvajanje osnovnih konceptov programiranja. Številna gradiva, ki so jih pripravili učitelji z namenom obogatitve svoje učne prakse, jasno kažejo, da je tak pristop primeren za vsak razred in ga lahko uporabi vsak učitelj. Le odločiti se mora!

### Viri

- [1] Buitrago Flórez, F., Casallas, R., Hernández, M., Reyes, A., Restrepo, S., & Danies, G. (2017). Changing a Generation's Way of Thinking: Teaching Computational Thinking Through Programming. *Review of Educational Research*, 87(4), 834-860. <https://doi.org/10.3102/0034654317710096>
- [2] eTorba: MATEMATIKA 9: i-Učbenik za matematiko v 9. razredu osnovne šole, <https://etorba.sio.si/etorba/sl/books/30/read/page-62.xhtml#m145857>, dostop 31. 1. 2024
- [3] Grover, S., & Pea, R. (2013). Computational Thinking in K-12: A Review of the State of the Field. *Educational Researcher*, 42(1), 38-43. <https://doi.org/10.3102/0013189X12463051>
- [4] Krajnc, R., Košir, K., Čotar Konrad, S. (2017). Računalniško mišljenje - kaj je to in zakaj bi ga sploh potrebovali?. *Vzgoja in izobraževanje*, letnik 48, številka 4, str. 9-19
- [5] Lodi, M., Martini, S. Computational Thinking, Between Papert and Wing. *Sci & Educ* 30, 883-908 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11191-021-00202-5>
- [6] Papert, S. (1970). *Teaching children thinking (AI Memo No.247 and Logo Memo No. 2)*. Cambridge, MA: MIT Artificial Intelligence Laboratory

[7] Wing, J.M. (2006) Computational Thinking. *Communications of the ACM*, 49, 33-35.  
<https://doi.org/10.1145/1118178.1118215>

35

## Glava, telo in srce

**Avtor:** Tinka Majaron<sup>1</sup>

<sup>1</sup> OŠ Vodmat, Ljubljana

Za celostni razvoj je treba poskrbeti za glavo (razvoj možganov), telo (zadostno količino gibanja) in srce (umetniško ustvarjanje in še marsikaj). Z radovednim proučevanjem že obstoječe literature in poosebljanjem dobrih praks vsekakor lahko najdemo ali izumimo vaje, ki razvijajo vse naštetu in so uporabne tudi pri matematiki. V tem prispevku bo predstavljenih nekaj konkretnih primerov, kako v pouk matematike vplesti gibanje in umetnost - predstavljena bo moja osebna pot do matematike, ki postane tudi vzgojni predmet.

### 1. Uvod

Matematika pomaga pri razvoju abstraktnega razmišljanja, kar je izredno pomembno pri otrocih, saj se jim možgani še intenzivno razvijajo [5]. Osebno menim, da bi brez matematike otroci zelo težko razvili abstraktno razmišljanje, torej matematika že sama po sebi poskrbi za glavo - razvoj mišljenja. Poleg tega sem pri svojem delu opazila, da razvija ali krepi izredno pomembne vrline - vztrajnost, potrpežljivost, natančnost, marljivost, zmožnost samostojnega razmišljanja, strpnost (do drugačnih, npr. manj ali bolj sposobnih od nas) in še kaj. Osebno zelo cenim vse naštete vrline, vsaka od njih se mi zdi v teh negotovih časih kot luč, ki kaže pot do boljše družbe.

Učitelj (matematike) bi moral biti v prvi vrsti navduševalec. Meni je nepopisno lepo opazovati, kako matematika idealizira svet okrog nas in ga naredi univerzalnega, enakega za vse. Z matematiko lahko opišemo vse okoli nas in še kaj, kar se dogaja v nas. Zelo dobro so raziskane in predstavljene teoretične povezave med matematiko in drugimi področji, na primer glasbo, likovno umetnostjo, športom, naravo, fiziko in še čim (o teh povezavah se na spletu najde ogromno primerov, a to ni osnovni namen tega prispevka). Pri poučevanju v srednji šoli sem take povezave uporabljala kot uvodno uro v novo poglavje, da so dijaki vedeli, zakaj je določeno poglavje pomembno oziroma kje se uporablja v vsakdanjem življenju (in sem se tako izognila tako znanemu vprašanju, kje bom pa to rabil v življenju). V osnovni šoli postavljamo osnove matematike, učenci morajo šele spoznati osnovne matematične pojme, zato te teoretične povezave zelo hitro presegajo njihove zmožnosti. Tako sem bila prisiljena iskati drugačne možnosti za vpeljavo umetnosti in gibanja v svoj pouk. Nastala je ideja, ki sem jo poimenovala "pet minut za neznano": na začetku vsake ure 5 minut namenim koščkom matematike, ki niso v učnem načrtu, in vzgoji za življenje. Izvajamo zelo različne dejavnosti, nekaj jih bom predstavila v nadaljevanju.

Po [4] bi moral osnovni namen izobraževanja biti: pripraviti mlade ljudi na življenje po šoli, jim pomagati, da oblikujejo umske, čustvene, družbene in strateške vire za sprejemanje izzivov, pomagati jim odkriti stvari, v katerih blestijo in krepiti njihovo voljo, da temu sledijo. Kako lahko pomagamo pri uresničevanju te vizije? V predmetnikih je seveda več predmetov, nikjer učenci nimajo le matematike, zato bi bilo najlažje preostale vrline prepustiti drugim predmetom. Toda nekaterih predmetov je absolutno premalo (še posebej vseh umetnostnih), matematiki pa je običajno namenjenih največ ur na teden (poleg slovenščine). To ne pomeni, da je matematike preveč, pomeni, da imamo matematiki še posebej pomembno vlogo pri razvoju otrok (in tega bi se morali zavedati vsi). Ken Robinson [4] meni, da bi za zdrav razvoj moral uravnovešeni učni načrt namenjati enak status (in število ur) umetnosti, družboslovju, jezikoslovju, matematiki, športu in naravoslovju. Slovenski predmetniki so daleč od tega ideala, v 9. razredu osnovne šole so, na primer, ure razporejene takole: umetnost 2 uri, družboslovje 4 ure, jezikoslovje 7,5 ure, matematika 4 ure, šport 2 uri ter naravoslovje 6 ur. Najbolj podhranjeni sta torej umetnost (srce) in šport (telo), zato bi bilo tudi s tega gledišča dobro, da ju vključimo v svoj pouk.

## 2. Teoretična izhodišča

Za začetek nekaj besed o možganih [5]. Za različne naloge imajo različne dele. Leva stran pomaga premišljevati logično in organizirati misli v stavke, desna stran pomaga doživljati čustva in brati nebesedne znake. Tako imenovani plazilski možgani omogočajo nagonsko delovanje, ki je potrebno za preživetje, možgani sesalcev pa nas usmerjajo v povezovanje in odnose. En del možganov se ukvarja s spominom, drugi sprejema moralne in etične odločitve. Za rast in razvoj je ključno, da vsem tem delom pomagamo delovati usklajeno. Ob tem se moramo zavedati, da so plazilski možgani dobro razviti že ob rojstvu, preostali možgani (še posebej prefrontalna skorja) pa zorijo vse do dvajsetega leta starosti.

Zakaj ob tem potrebujemo gibanje? Milan Hosta [1] pravi, da naše telo ni narejeno za dolgotrajno sedenje. V krvi imamo igrivost in gibanje, zato bi to morala biti osnova za naše delovanje (v službi, doma in v prostem času, v šolstvu pa z zgledom, ki je vedno najbolj poučno sredstvo).

O pomenu in dobrobiti poučevanja z gibanjem piše tudi Jani Prgič [3]. Delovanje malih možganov (in s tem hitrejšo rast in učinkovitejše delovanje prefrontalne skorje) spodbujamo z gibalnimi vajami, pri katerih prečimo os trupa. Naj naštejemo nekaj razlogov za vključitev gibanja v poučevanje [3]:

- Z gibanjem lahko sprožimo implicitno učenje, to je učenje na nezavedni ravni, ki možganom olajša pomnjenje.
- Gibanje povečuje zbranost, motivacijo in pozornost, spodbuja medsebojno povezovanje živčnih celic v možganih ter spodbuja nastanek novih živčnih celic.
- Z gibanjem zadovoljimo vsem petim osnovnim potrebam po Williamu Glasserju: preživetje, pripadnost, moč, svoboda, zabava (in s tem izboljšamo počutje učencev in zmanjšamo stres).
- Pri gibanju sodelujejo čutila.
- Gibanje izboljšuje prekrvljenost telesa, možgani so posledično bolj preskrbljeni s kisikom, kar izboljša epizodni spomin in učenje.

Patricia Wolfe s svojimi ugotovitvami potrjuje blagodejnost gibanja in umetnosti [3]:

- Živčne celice, ki se medsebojno prožijo, se tudi medsebojno povezujejo.
- Možgani so toliko zdravi, kolikor je zdravo telo pod njimi.
- Možgani so ustvarjeni za rime, ritem, gibanje in čustva. Z globinskim učenjem oz. logičnim ponavljanjem sidramo učenje, kadar gibe kombiniramo z rimami ali frazami, ki gredo hitro v uho.

Ken Robinson [4] je zelo uspešno poučeval z gledališčem. "V umetnosti gre za vidike človeških izkustev. Skozi glasbo, ples, vizualne umetnosti, gledališče in preostale oblike umetnosti oblikujemo svoje občutke in misli o sebi in o tem, kako doživljamo svet okoli sebe. Učenje v in o umetnosti je bistveno za intelektualni razvoj." (Robinson, Aronica, 2015, str. 136). Ob koncu teoretičnega dela dodajam še navodila, po katerih se je pri svojem delu ravnala Sonja Peternel [2]:

1. Oceni vzdušje v razredu (svoje počutje in počutje otrok).
2. Uglasi skupino (skupen ritem, skupno dihanje).
3. Vzbudi radovednost (nova snov, nova naloga, nova igra ...).
4. Vodi učenje z uporabo čutil, saj so naš vir podatkov o svetu. Pri tem gremo po vrsti: vid, sluh, tip/gibanje, voh, okus.
5. Vodi učenje z uporabo predstav in gibanja.
6. Upoštevaj desno in levo hemisfero (npr. pri matematiki vključi umetnost).
7. Ves čas ure opazuj govorico telesa otrok, svojo govorico telesa in ritem ure (in po potrebi ustrezno ukrepaj).
8. Ves čas ure se vživljaj v otroke in vase.

Delovanje zgornjih navodil potrjuje tudi Playness TM pedagogika [1] s svojimi štirimi temelji: aktivnost, radovednost, igrivost in zdravje.

Imam občutek, da bi živeli v občutno lepši družbi, če bi se vsi učitelji vsakodnevno ravnali po teh navodilih. Najtežje je spremeniti utečene navade, a v svetlejšo prihodnost se splača vložiti nekaj truda. Začnimo pri sebi, začnimo se igrati in raziskovati, kaj prinesejo nove navade v našo učilnico. Dobro ohranimo, iz slabih se učimo.

### 3. Primeri dobre prakse

Zapisane primere sem izvedla v osnovni šoli pri predmetnem pouku matematike (od 6. do 9. razreda). V 6. in 7. razredu imamo običajno polne razrede - od 24 do 27 učencev, v 8. in 9. razredu pa pouk izvajamo v manjših skupinah (okrog 14 učencev). Primere bi se dalo uporabiti tudi v drugih razredih.

#### a) Ploskamo v ritmu

Na začetku ure brez besed začnemo ploskati določen ritem (kot ga čutimo v danem trenutku). Čakamo, da se nam kakšen učenec pridruži in ga pohvalimo z nasmehom, da bodo tudi drugi videli, da pričakujemo, da se nam bodo pridružili. Ko začnemo ploskati skupaj, nakažemo še, naj vstanejo (če sedijo). Nato ob določenih udarcih namesto ploska udarimo z nogo v tla, enkrat z levo, drugič z desno, ali/in tlesknemo s prsti ali/in se potoklamo po stegnih, lahko s prekrizanimi rokami - leva roka na desno stegno in obratno, ali/in ... (spet po trenutnem navdihu). Vsak gib nekajkrat ponovimo, nato si izmislimo novega. Zaključimo z vedno tišjim ploskanjem, nato v tišini sedemo. Ta preprosta vaja zelo poveže skupino, begajoče misli pripelje v ta trenutek in spodbudi koncentracijo.

#### b) Pisanje s telesom

Učenci stoje po navodilih pišejo s telesom. Pri tem uporabimo različne dele telesa - z levo/desno roko po zraku, z levim/desnim komolcem po zraku, z desno/levo nogo po tleh, z desnim/levim kolonom po zraku, z glavo po zraku. Pišejo lahko rezultat računa, ki ga poveste, kvadrat določenega števila, kub določenega števila, Pitagorov izrek ... (kar pač trenutno obravnavate). V tej vaji na zelo preprost način uporabimo teoretična dognanja.

#### c) Ponavljanje snovi med hojo po učilnici

Med počasno hojo po učilnici učenci odgovarjajo na vprašanja o trenutni snovi - gre za učinkovitejše ponavljanje snovi. Učence lahko razdelite v pare in se med seboj pogovorijo o tem, kaj so izvedeli novega v tej uri in kaj jim je bilo najbolj zanimivo. Tudi v tej vaji na zelo preprost način razbijemo rutino in uporabimo teoretično znanje o dobrobiti gibanja pri učenju.

#### č) Utrjevanje znanja z nalogami po učilnici

Pripravimo naloge za utrjevanje znanja, zapišemo jih v večji pisavi, jih natisnemo in razrežemo (ena naloga na en listek). Naloge nato polepimo po učilnici na čim bolj različna mesta (kakšen listek tudi malo skrijemo). Učence razdelimo v pare ali trojke, vsak v paru/trojki mora imeti zapisano in rešeno celotno nalogo. Učenci nalogo rešijo, kjer jo najdejo - lahko stoje, sede na tleh, leže ali v kakšni drugi pozi, le na stolu ne smejo sedeti (da se prekine rutina in se poravna hrbtenica). Lahko vpeljemo tudi malo tekmovalnosti: na začetku povemo, koliko nalog je razvrščenih po učilnici (na primer 9 besedilnih nalog), nato določimo, kdo zmaga (na primer tisti par/trojka, ki prvi pravilno reši 5 besedilnih nalog). Za nagrado imam običajno na zalogi kakšen lep svinčnik ali radirko. Tudi v tej vaji na zelo preprost način razbijemo rutino in uporabimo teoretično znanje o dobrobiti gibanja pri učenju.

#### d) Najmanjši skupni večkratnik

Začnemo z usklajenim korakanjem, ob katerem štejejo. Nato vsi skupaj med korakanjem zaploskamo, ko je izrečeno število večkratnik nekega števila, na primer 6. Nato vsi skupaj zaploskamo, ko je izrečeno število večkratnik drugega števila, na primer 4. Nazadnje se razdelimo v dve skupini, ena ploska pri večkratnikih števila 6, druga pri večkratnikih števila 4. Tako vsi skupaj slišimo, kateri je prvi (najmanjši) skupni večkratnik in kateri so vsi skupni večkratniki teh dveh števil.

Na podoben način si lahko izmislimo tudi vaje za boljše razumevanje ali utrjevanje drugih osnovnih pojmov. Na primer iskanje deliteljev nekega števila: povemo neko število, učenci najprej v tišini razmislijo, katere delitelje ima to število, nato jih glasno naštejemo od najmanjšega do največjega in ob tem vsakič križno z eno nogo udarimo ob tla - enkrat levo od mirujoče noge, drugič desno. Pri

naslednjem številu nogi zamenjamo. Tako utrdimo znanje o deliteljih in hkrati fizično ugotovimo, kako posebno je število 1 in kako posebna so praštevila.

#### e) Pantomima

Na listke zapišemo matematične pojme iz trenutnega poglavja. Učenec izvleče listek in s telesom prikaže zapisan pojem. (Možna različica: namesto prikaza s telesom bi lahko pojem narisal na tablo.) Preostali učenci ugibajo pojem. Kdor prvi ugaane, je naslednji na vrsti za prikaz. Pri tej vaji moramo najprej premisliti, ali je poglavje primerno za tako vajo - nekatere pojme je zelo težko pokazati s telesom. Morda na tak način v osnovni šoli še najlažje utrjujemo geometrijske pojme, v srednji šoli pa tudi osnovne funkcije (ko moramo ponoviti vse osnovne funkcije, da znajo povezati ime, prepis in graf neke funkcije). To je učinkovit in zabaven način za ponavljanje in utrjevanje snovi ob koncu poglavja.

#### f) Risanje

- V koordinatnem sistemu lahko povežejo točke, ki so pripravljene tako, da nastane neka slika, nato še zapišejo koordinate vseh točk.
- Po navodilih ustvarijo sliko ali lik v koordinatnem sistemu, nato lahko izračunajo obseg in ploščino ali kaj podobnega (odvisno od naloge oz. nastale slike).
- Iz likov, ki jih trenutno obravnavamo, ustvarijo ilustracijo in jo pobarvajo, nato like poimenujejo ter določijo njihove obsege in ploščine.
- S šestilom ustvarijo čim bolj simetrično sliko (mandalo) in jo pobarvajo tako, da ohranijo simetrije.
- Narišejo domišljjsko zrcalno sliko (glede na premico ali glede na točko). Rezultate računov za utrjevanje znanja zapišemo ob točke, nato jih po vrsti povežejo v sliko.

#### g) Prepevanje

Skupno prepevanje nas poveže in sprosti. Lahko pojemo kar tako - nam najljubšo pesem na začetku šolske ure ali vmes za sprostitev. Lahko neki znani melodiji priredimo besedilo za ponovitev snovi (na primer pred božičem pesmi Jingle bells priredimo besedilo za ponovitev trenutne snovi). Pri tem bomo zanesljivo ustvarjalni, otrokom pa bomo olajšali učenje. S prepevanjem lahko včasih tudi prikažemo določen pojem. Na primer s prepevanjem v kanonu lahko prikažemo vzporedni premik.

#### h) Glasba

Z glasbo na splošno lahko ponazorimo veliko matematičnih pojmov. Če, na primer, vsaki številki priredimo določen ton, lahko zaigramo števila. Potem se zelo dobro sliši razlika med racionalnim in iracionalnim številom (moj posnetek te ponazoritve je na voljo na kanalu YouTube). S povlečno kljunasto flavto (ima zvezno višino tona) lahko prikažemo različne osnovne funkcije. Ob tem se ponovno naredi povezava med definicijo funkcije in njenim grafom, poleg tega pa lahko slišimo nekaj njenih osnovnih lastnosti (naraščanje/padanje, omejenost). V osnovni šoli s tako flavto lahko vpeljemo graf funkcije (v koordinatni sistem vrišejo, kar slišijo), definicijsko območje, zalogo vrednosti, naraščanje in padanje funkcije (vse povsem intuitivno, strogo definiramo le graf). Glasbene primere bomo verjetno lažje vpeljali, če tudi sami igramo kakšno glasbilo. Če ne, bodo pa učenci veseli in ponosni, če nam bodo lahko priskočili na pomoč.

#### i) Ples

Tudi ples nas poveže in sprosti. Lahko plešemo kar tako - na nam najljubšo pesem na začetku šolske ure ali vmes za sprostitev. Lahko pa neki znani melodiji priredimo besedilo za ponovitev snovi (Prgič v [3] predlaga ples makarena). Otroci imajo zelo radi tudi t. i. body percussion (kanal YouTube ponuja kopico možnosti), to je ples po navodilih - v ritmu moramo zaposkati, zatopotati, tleskniti in podobno (vsi hkrati). To razred poveže (moramo biti usklajeni), hkrati pa krepi koncentracijo (potrebne je veliko zbranosti, da v pravem trenutku izvedemo pravi gib).

#### j) Čuječnost

Vaje iz čuječnosti nam pomagajo živeti v tem trenutku (namesto da neprestano razmišljamo o preteklih dogodkih ali o dogodkih, ki so še pred nami) in odpirajo srce (v smislu sočutja). Pred izvajanjem vaj v razredu bi moral učitelj čuječnost ponotranjiti do mere, ko postane način življenja. Z mirom in ljubeznijo, ki ju potem lahko siplje, spontano ožarja vse v svoji okolici.

#### 4. Zaključek

Predstavljene vaje ob skrbnem premisleku, kdaj in kje se izvedejo, nudijo podporo učenčevim možganom, da so pri pouku matematike zbrani, motivirani in aktivirani. Ne poznam raziskav, ki bi proučile učinke poučevanja matematike na tak način. Za zdaj niti ne poznam nikogar drugega, ki bi v javnem šolskem sistemu tako poučeval. Zelo bi me zanimal znanstveno izmerjen učinek, a za zdaj lahko poročam le o osebnih občutkih. Z učenci sem vzpostavila pristen osebni odnos, zaradi katerega je pouk postal večinoma prijeten in sproščujoč, učenci so praviloma visoko motivirani za delo, hkrati pa v takem odnosu mnogo lažje (kot prej) raziščem in odpravim tudi morebitna nesoglasja.

Pogosto slišim, da so največja nočna mora učiteljev starši. Pred uvedbo zapisanih novosti sem imela tudi jaz večinoma neprijetne govorilne ure, na katerih sem se večkrat morala zagovarjati, zakaj kakšen otrok ne dosega minimalnih standardov. Na zadnjih govorilnih urah se mi je prvič zgodilo, da se je 60 % vseh staršev oglasilo le zato, da so me pohvalili in se mi zahvalili za moje delo (preostalih 40 % je bilo prav tako prijetnih pogovorov, a razlog za obisk je bil v osnovi slabši uspeh pri ocenjevanju in iskanje možnosti za izboljšanje). Mislim, da je to dovolj zgovoren dokaz, da se spleča biti radoveden (in včasih tudi malo pogumen). Pri iskanju svojega gibalno-umetniškega podpisa pri pouku matematike sem še dokaj na začetku poti. Prepričana sem, da se bo z leti nabor primerov dobre prakse precej razširil. Srčno si želim, da bo ta droben prispevek spodbudil udeležence k razmisleku o pouku matematike in nastanku novih pristopov.

#### Viri

- [1] Hosta, M. (2018). Playness pedagogika. Notranje Gorice: Playness, izobraževanje in razvoj.
- [2] Peternel, S. (2005). Prvih pet minut. Nova Gorica: Melior, Založba Educa.
- [3] Prgič, J. (2018). Kinestetični razred: učenje skozi gibanje. Griže: Svetovalno-izobraževalni center MI.
- [4] Robinson, K., Aronica, L. (2015). Kreativne šole: množična revolucija, ki preoblikuje izobraževanje. Nova Gorica: Eno.
- [5] Siegel, D. J., Payne Bryson, T. (2014). Celostni razvoj otroških možganov. Domžale: Družinski in terapevtski center Pogled.
- [6] Snel, E. (2019). Sedeti pri miru kot žaba. Vaje čuječnosti za otroke (in njihove starše). Celje: Zavod Gaia Planet.
- [7] Wax, R. (2017). Čuječnost. Kako se znebiti stresa ter poskrbeti za dobro počutje telesa in duha. Tržič: Učila international.
- [8] Williams, M., Penman; D. (2015). Čuječnost. Kako najti mir v ponorelem svetu. Tržič: Učila international.

#### Predstavitev plakatov (pedagoška sekcija) / 56

### Predstavitev naravoslovnega dne z merjenjem v bližini šole

**Avtorica:** Petra Mirt<sup>1</sup>

<sup>1</sup> OŠ Podčetrtek

V neposredni bližini naše šole (OŠ Podčetrtek) se nahaja soteska z imenom Svinjski graben. Vsako leto osmošolci obišejo to območje in tam raziskujejo ter predvsem merijo. Naravoslovni dan se začne z uvodno uro v učilnici, kjer učenci ugotovijo, da bodo brez računal ter daljših metrov izmerili dolžine, hitrost, višine, razdalje in celo težni pospešek. V tem obdobju gravitacijskega pospeška na Zemlji sicer ne poznajo, vendar je učencem v izziv čim bolj se približati približku ali pa najboljši vrednosti glede na ostale skupine, drug oddelek ali celo glede na oddelek (generacijo) iz prejšnjih let. V tej šolski uri torej izvejo, da bodo kot pripomoček na terenu uporabili le štoparico (zaradi prepovedi mobilnih naprav v naši šoli smo kupili preproste štoparice) ter geotrikotnik. Do druge šolske ure izmerijo svoj povprečen korak, ter si ga napišejo na svoj učni list. Razdelimo tudi funkcije po skupinah in nato se akcija začne.

Pri prvi točki učenci s pomočjo vezave vrvic iz bršljana na tleh s koraki izmerijo približno višino mostu nad potočkom. S tega mostu spuščajo kamne, ki jih naberejo med potjo, ter s štoparico merijo

KOLIČINA	TEŽNI POSPEŠEK $g \left[ \frac{m}{s^2} \right]$	POVPREČNA HITROST VODNEGA TOKA $\bar{v} \left[ \frac{m}{s} \right]$	VODNI PRETOK $\emptyset \left[ \frac{m^3}{s} \right]$	VIŠINA VEJE DREVEŠA $h_v [m]$	VIŠINA DREVEŠA $h [m]$
POVPREČJE 2023	9,88	0,258	0,007	3,915	17,4
POVPREČJE 2022	7,7	0,3	0,009	3,4	18,9

LETO MERJENJA	ABSOLUTNA NAPAKA	RELATIVNA NAPAKA
2023	0,07	0,7 %
2022	2,11	21,4 %

čas padanja. Pri drugi točki učenci gredo do svojega dela potočne struge, kjer merijo čas gibanja drevesnega listka na približni dolžini treh metrov. Vse razdalje si morajo učenci sami označiti s pomočjo palčk in s pomočjo svojih korakov. Za tretjo točko si učenci na istem delu struge izberejo mesto, kjer izmerijo povprečni prečni presek struge, da lahko izračunajo potočni profil in pri četrti točki vodni pretok. Pri peti točki izberemo vejo drevesa, kjer učenci s pomočjo storžev ali manjših paličic ter s štoparico izmerijo čas gibanja storžev (paličic) od veje do tal. Pri šesti točki izberemo drevo, kjer učenci s koraki izmerijo približno oddaljenost opazovalca od drevesa. Hkrati določijo tudi višino palice ter opazovalca, saj s pomočjo pravih trikotnikov in razmerij v učilnici izračunajo višino opazovanega drevesa.



Zaključek naravoslovnega dne zopet poteka v učilnici po opravljenih vseh nalogah na terenu in hkrati gibanju, saj naredimo lep krog tudi mimo gradu Podčetrtek. V peti šolski uri učenci z računalni določajo povprečne vrednosti merjenih časov ter dolžin, kjer je to potrebno. Uporabijo zapisane enačbe, da izračunajo zahtevane količine. Pri tem njihove rezultate vpisujemo na tablo, da na koncu tudi izračunamo povprečne vrednosti vseh skupin skupaj oziroma celega oddelka in nato primerjamo rezultate, določamo absolutne napake, včasih pa tudi relativne. Učenci so pri tem motivirani, preko gibanja in aktivnega merjenja dosežemo cilje naravoslovnega dne in se še kaj novega naučimo.

## Verjetnost brez mere

Avtor: Martin Raič<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko



Teorija mere je temeljni kamen sodobne teorije verjetnosti, z bolonjsko reformo pa se je morala prva umakniti s seznama predmetov, ki jih študenti absolvirajo, preden poslušajo verjetnost. Kako torej verjetnost spredavati na matematično korekten način, ne da bi študenti poznali teorijo mere? Težave nastopijo, brž ko izstopimo iz varnega diskretnega sveta. Kaj je sploh slučajna spremenljivka? Kaj je njena porazdelitev? Kaj je gostota porazdelitve? Kako definirati pričakovano vrednost, da bodo njene osnovne lastnosti intuitivno jasne in ne le zajec iz klobuka?

Odgovor na to ni enoznačen ter je zelo odvisen od matematične orientiranosti in predznanja študentov. Rešitve, ki se pojavijo na prvo žogo, niso nujno matematično korektne in tega se mora zavedati vsaj predavatelj, če ne že študenti. Predavanje bo predstavilo nekaj možnih rešitev, med drugim tudi Daniellov integral, ki ima vso moč Lebesgueovega integrala, obenem pa je intuitivno zelo nazoren in ne zahteva teorije mere. Uporabimo ga lahko tako pri definiciji gostote kot tudi pričakovane vrednosti.

50

## Polinomi in pomoč sodobne IKT-tehnologije

Avtor: Miha Simončič<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Srednja tehniška in poklicna šola Trbovlje

V današnjem času nam je sodobna tehnologija pri poučevanju v veliko pomoč. Predvsem pri pouku matematike in nalog iz polinomov. Dijaki se z njimi srečajo v tretjem letniku srednje šole. Potrebni so številni izračuni (ničle, začetna vrednost, obnašanje grafa daleč od koordinatnega izhodišča, ...). Nato je treba polinom še grafično narisati v pravokotni koordinatni sistem. Pred pojavom sodobne IKT-tehnologije so bile to kar precejšnje težave. Danes pa dijakom pomagajo številni matematični programi, kot so Geogebra online, Desmos graphing, Photomath, Cabri geometrie. Uporaba teh programov je dokaj enostavna. Dijak vpiše predpis polinoma in program sam izriše graf. Poleg tega lahko dijak še preveri izračune za ničle, začetno vrednost, obnašanje grafa daleč od koordinatnega izhodišča. Takšna uporaba sodobne IKT-tehnologije se lahko uporabi med poukom samim ali pa kot pomoč pri reševanju domačih nalog. Pri pouku se takrat dijakom izrecno dovoli uporaba mobilnih telefonov in ob nadzoru učitelja uporabljajo matematične aplikacije, kot pomoč pri reševanju nalog iz polinomov. Tako dijaki tudi ne potrebujejo rešitev nalog, saj jim sami matematični programi narišejo in izračunajo postopke in rešitve nalog. Tudi med samo učiteljevo razlago, je sodobna tehnologija v veliko pomoč. Učitelj nariše graf polinoma na tablo in nato preveri njegovo natančnost s pomočjo sodobnih matematičnih aplikacij. Učitelj lahko preveri tudi natančnost izračunov in samo natančnost narisane grafa. Menim, da moramo sodobno IKT-tehnologijo uporabiti nam v prid. Danes ne moremo več brez nje in jo najdemo na vsakem koraku. Če pa jo pravilno uporabimo, predvsem pri poučevanju, lahko naredimo matematiko dijakom še bolj zanimivo in privlačno.

39

## Bibliometrična analiza znanstvenih člankov s področja igrifikacije pri pouku matematike

Avtor: Aleš Toman<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta

Tradicionalni pristopi poučevanja ne ustrezajo več učnim preferencam mladih, ki želijo aktivno sodelovati in soustvarjati svojo učno izkušnjo. Uporaba igrifikacije in učenja na podlagi iger lahko poleg povišane motivacije za učenje omogoča tudi pridobivanje dodatnih veščin. V prispevku s pomočjo bibliometričnih metod pripravimo pregled znanstvenih člankov s področja igrifikacije in učenja na podlagi iger pri matematiki. Za pridobivanje podatkov uporabimo bazo Web of Science. Najprej

identificiramo najpomembnejše avtorje in vire, nato z analizo soavtorstev, sosklincevanja in bibliografskim parčenjem razkrijemo še družbeno in vsebinsko strukturo področja.

## 1. Uvod

S sistematičnim pregledovanjem znanstvene literature se srečamo pri pripravi seminarskih nalog in zaključnih del na vseh ravneh izobraževanja. Z njim postavimo teoretični okvir svojega dela ali pa naša nova spoznanja umestimo v obstoječi sistem znanja. Pregled literature je lahko tudi samostojno delo, kadar želimo povezati in sistemizirati obstoječe znanje in odkriti vrzeli, ki jih lahko zapolnijo prihodnje raziskave.

Tradicionalni pristop k pregledu literature temelji na prebiranju, povzemanju in interpretiranju »manjšega« števila objavljenih del. Ker je delo zamudno, se pogosto omejimo na največkrat citirana dela ali pa na dela, ki jih najdemo med viri v nekaj izbranih člankih. Zaradi izbire lahko opravljeno delo vsebuje elemente subjektivnosti, saj nam vsebina neprebranih del ostane neznana [3].

Danes rešitev ponujajo kvantitativne bibliometrične metode, ki temeljijo na računalniški analizi obsežne bibliografske baze podatkov. Bibliometrični pristop je objektivni, transparenten, vključujoč in ponovljiv, če le raziskovalec opiše vse korake svoje analize. A bibliometrične metode zgolj odkrivajo vzorce v podatkih, ne podajo pa interpretacije. Slednja je še vedno naloga avtorja, le da so tokrat njegove ugotovitve podprte s kvantitativnimi dokazi [5].

## 2. Bibliografska baza podatkov in računalniška orodja za njihovo analizo

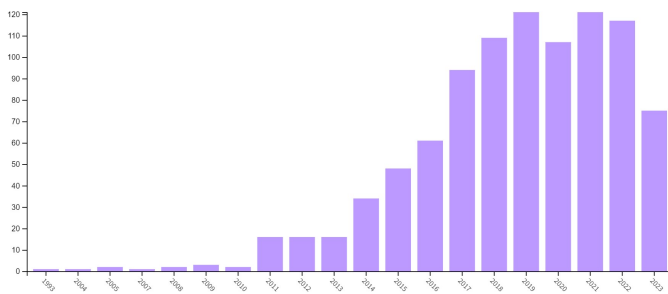
Bibliografska baza podatkov je urejena (spletna) zbirka bibliografskih zapisov o objavljenih delih. Za analizo, ki je opisana v nadaljevanju, mora vsak zapis vsebovati vsaj naslednje lastnosti posameznega dela: naslov, avtorje in njihove institucije, ime in številko publikacije, v kateri je delo objavljeno, čas objave, opis vsebine, npr. z navedbo ključnih besed ali celotnega povzetka, ter seznam virov. Sezname virov ustvarijo povezave med deli v bazi podatkov, med avtorji del, pa tudi med njihovimi institucijami ali publikacijami, v katerih so dela objavljena. Povezava je smiselna, saj je delo vsebinsko povezano z deli, na katere se sklicuje. Samo na osnovi seznama virov pa ni mogoče določiti, ali novo delo prepozna pomembnost navedenega vira, ali pa ga kritizira in zavrača.

**2.1. Vir podatkov.** Podatke za proučevanje znanstvene literature s področja igrifikacije in učenja na podlagi iger pri pouku matematike smo pridobili iz bibliografske baze podatkov Web of Science [2]. S pomočjo iskalnika smo zbrali zapise o vseh objavljenih delih v angleškem jeziku, ki so v naslovu, povzetku ali med ključnimi besedami vsebovali podniz »math« in vsaj enega od podnizov »game based« ali »gamif«. Omejitev na angleški jezik ni bila huda, saj je bilo del v drugih jezikih izredno malo; Web of Science namreč ne pokriva večine strokovnih revij, ki objavljajo dela v nacionalnih jezikih. Ravni izobraževanja nismo predpisali, saj jo je z le nekaj nizi težko univerzalno določiti, niti se nismo želeli omejiti na le eno raven. Poizvedba je bila opravljena 12. 9. 2023 in je vrnila 947 različnih del in nekaj njihovih opisnih statistik. Za podrobnejše preiskave smo si bibliografske zapise izvozili in jih analizirali s paketom Bibliometrix [1] v programskem jeziku R in s program VOSviewer [4].

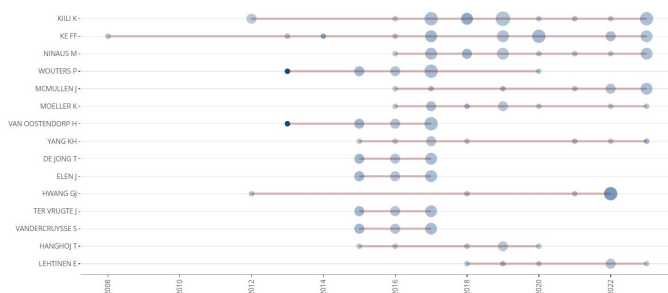
**2.2. Opisne statistike izbranih del.** Izbranih 947 del je bilo objavljenih v obdobju 1993–2023, pri pripravi je sodelovalo 2727 različnih avtorjev, skupaj se sklicujejo na 27.205 virov. Nekateri izmed njih so med izbranimi deli, večina pa jih je zunaj našega izbora (npr. govorijo le o matematiki, ne pa tudi o igrifikaciji). Slika 1 prikazuje razvrstitev izbranih del po letih objave. Opazen interes za igrifikacijo v matematiki zaznamo v letu 2011, v letu 2014 pa število objav začne intenzivno naraščati. Padec v letu 2020 je posledica epidemije. Število objav se je kasneje vrnilo na predpandemično raven, ni pa je preseгло. To lahko pojasnimo z visokim deležem del, ki so objavljena v zbornikih konferenc. Zaradi omejitev potovanj so bile dejavnosti konferenc zmanjšane. Ugotovimo še, kateri avtorji so objavili največ del. Na prvih treh mestih se nahajajo: dr. Kristian Kiili s Fakultete za izobraževanje in kulturo Univerze v Tampereju na Finskem (22 objav), dr. Fengfeng Ke s Pedagoške fakultete Državne univerze na Floridi v ZDA (19 objav) in dr. Manuel Ninaus z Inštituta za psihologijo Univerze v Gradcu v Avstriji (15 objav). Na sliki 2 vidimo še časovno dinamiko objav 15 avtorjev z največ objavljenimi deli. Opazimo, da so najproduktivnejši avtorji še vedno zelo aktivni, da je zlasti dr. Ke delovala na področju, ko to sploh še ni bilo popularno, ter da je večja skupina avtorjev objavljala dela v obdobju 2015–2017, kasneje pa z objavami prenehala.

Podobno kot avtorje lahko odkrijemo tudi publikacije, v katerih je izšlo največ proučevanih del. Na prvem mestu je s 27 objavljenimi deli revija Computer & Education založbe Elsevier, drugo mesto pa si s po 17 objavami delita reviji Educational Technology Research and Development založbe Springer

in Interactive Learning Environments založbe Taylor & Francis. Med 15 publikacijami z največ objavljenimi deli najdemo kar 4 konferenčne zbornike, med njimi z 9 objavami vodi zbornik konference INTED2017 (11th International Technology, Education and Development Conference, 6.-8. marec 2017, Španija).



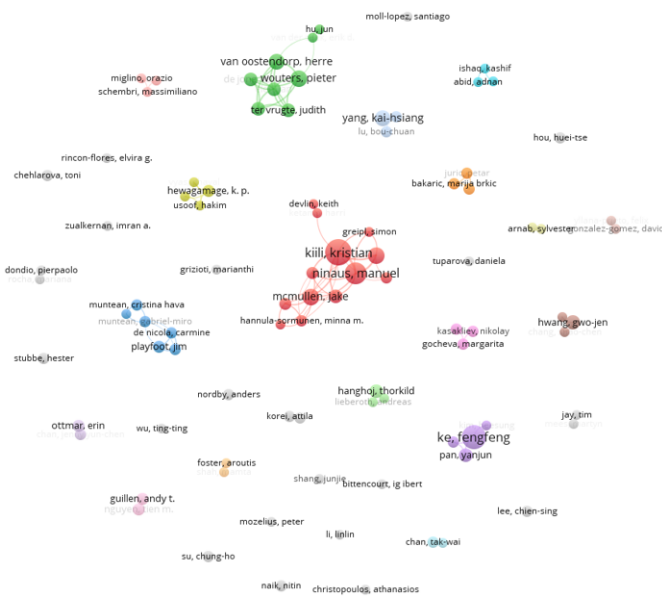
Slika 1: Število objav po letih. Podatek za leto 2023 je začasen. Vir: [2].



Slika 2: Objave avtorjev z največ objavljenimi deli skozi čas. Vir: [2]. Orodje: [1].

### 3. Naprednejša bibliometrična analiza

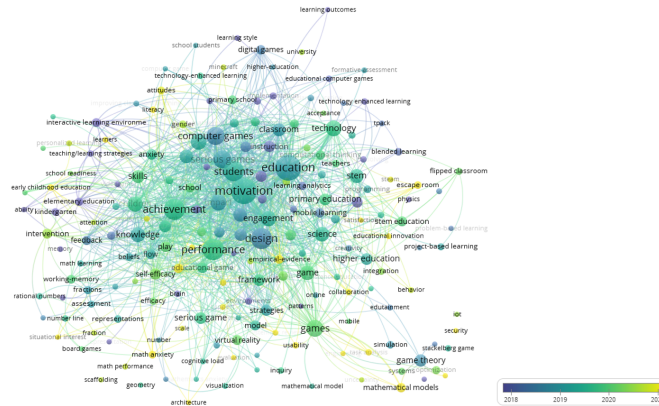
**3.1. Družbena in vsebinska struktura področja.** Z analizo soavtorstev lahko določamo družbeno strukturo področja. Dva avtorja sta povezana, če sta skupaj (lahko v soavtorstvu še z drugimi avtorji) napisala delo. Povezava med njima je močnejša, če sta skupaj napisala več del. Na sliki 3 so avtorji, ki so močnejše povezani, narisani bližje skupaj, z barvami pa je program skušal odkriti najbolj smiselno razvrstitev povezanih avtorjev v skupine. Barva v našem primeru nima smisla, saj hitro vidimo, da avtorji sodelujejo v manjših in dobro povezanih skupinah, bolj celostnega sodelovanja med njimi pa ni zaznati.



Slika 3: Omrežje avtorjev na osnovi soavtorstev del. Vir: [2]. Orodje: [4].

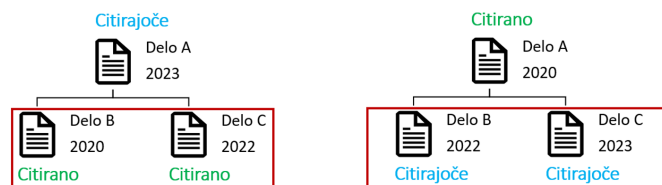
Z analizo sopojavljanja ključnih besed določimo še vsebinsko strukturo področja. Dve ključni besedi sta povezani, če nastopata skupaj v enem od analiziranih del. Povezava med njima je močnejša, če

ključni besedi skupaj nastopata v več delih. Na sliki 4 so ključne besede, ki so močnejše povezane, narisane bližje skupaj. Z barvami je prikazano še povprečno leto objave del, ki izbrano ključno besedo vsebujejo. Iz analize smo izključili ključne besede, po katerih smo iskali dela, saj zaradi svoje pogostosti prikrijejo pravo strukturo področja. Deset najpogostejših ključnih besed je: motivacija, uspešnost, dizajn, dosežki, računalniške igre, resne igre, vpliv, tehnologija, zavzetost in znanje. Izrazitih podstruktur med ključnimi besedami ne zaznamo, kar pomeni, da področja igrifikacije pri matematiki ni mogoče še nadalje členiti. Tudi »starost« ključnih besed ne nakazuje, da bi bilo katero izmed podpodročij bolj aktualno. Med novjšimi ključnimi besedami najdemo: digitalna igra, empirični dokaz, soba pobega, matematični model in stališča.



Slika 4: Omrežje ključnih besed na osnovi sopojavljanja v delih. Vir: [2]. Orodje: [4].

**3.2. Analiza sosklicevanja.** Analiza sosklicevanja temelji na domnevi, da so dela, na katera se skupaj sklicujemo, vsebinsko povezana. Povezava med deloma je močnejša, če se na njiju skupaj sklicuje več avtorjev. Deli B in C na sliki 5 levo sta povezani, ker obstaja delo A, ki se sklicuje na obe. Pri tem je delo A vključeno v naš izbor podatkov, deli B in C pa ne nujno. Z analizo sosklicevanja torej proučujemo omrežje 27.205 virov in tako dobimo intelektualno strukturo področja, ki pa je vsaj delno usmerjena v preteklost. Ker se na najnovjša dela še nihče ni skliceval, v analizi omrežja nimajo velikega pomena. Povezave med deli so dinamične, saj novonastala dela ustvarjajo nove povezave med starimi deli ali pa okrepijo že obstoječe povezave.

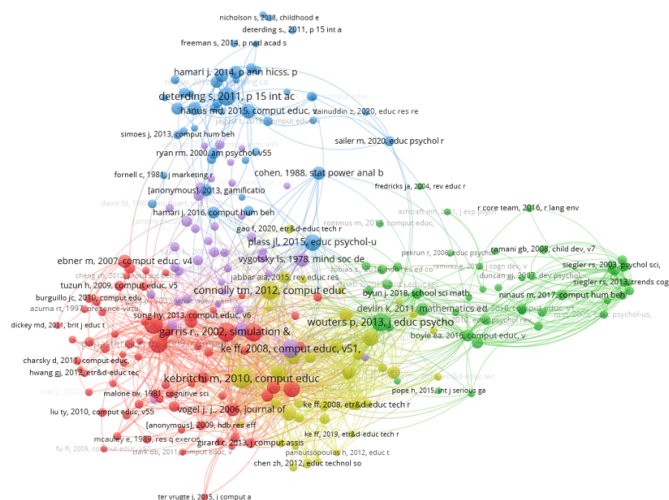


Slika 5: Povezava med deloma B in C v primeru sosklicevanja (levo) in bibliografskega parčenja (desno).

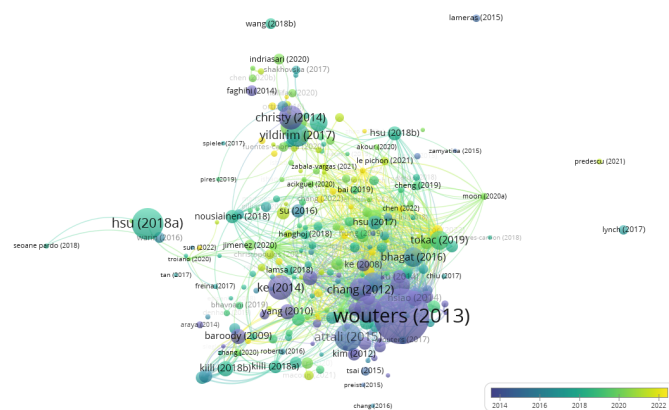
Na sliki 6 so dela, ki so močnejše povezana, narisana bližje skupaj, z barvami pa je program skušal še odkriti najbolj smiselno razvrstitev povezanih del v skupine; v našem primeru dobimo 5 skupin. Velikosti krožcev pomenijo število sklicev na posamezno delo, zato zlahka določimo, katera dela so najpomembnejša v posamezni skupini, in tako skupine vsebinsko razložimo.

**3.3. Bibliografsko parčenje.** Bibliografsko parčenje temelji na domnevi, da sta dve deli, ki se sklicujeta na isto delo, vsebinsko povezani. Povezava med deloma je močnejša, če je preseka njihovih seznamov virov večji. Deli B in C na sliki 5 desno sta povezani, saj se obe sklicujeta na delo A. Deli B in C sta v našem izboru podatkov, zato z bibliografskim parčenjem proučujemo omrežje 947 del. Povezave med deli so statične, saj se seznama virov s časom ne spreminjajo. Delo zato lahko vključimo v omrežje takoj po njegovi objavi. Če analizo omejimo na obdobje zadnjih nekaj let, lahko s pomočjo dobljenega omrežja odkrijemo strukturo aktualnih tem.

Na sliki 7 so dela, ki so močnejše povezana, narisana bližje skupaj, barva pa označuje leto objave. Zopet opazimo, da med aktualnimi temami ni izrazitih podstruktur (vidimo le nekaj manjših skupin), novjša dela pa so umeščena na sredino in so močno povezana s starejšimi deli.



Slika 6: Omrežje del na osnovi sosklicevanja. Vir: [2]. Orodje: [4].



Slika 7: Omrežje del na osnovi bibliografskega parčenja. Vir: [2]. Orodje: [4].

#### 4. Zaključek

Rezultat pregleda literature je izčrpen seznam del, ki prispeva k reševanju zastavljenih vprašanj, in je usmerjen v prihodnost; odkrivati mora vrzeli v obstoječem znanju in voditi do novih raziskovalnih vprašanj. V tem prispevku si vsebinskih vprašanj nismo zastavili, saj smo želeli prikazati uporabo bibliometričnih metod. Zaradi omejenega časa in prostora smo opustili tudi podrobno interpretacijo rezultatov. Slednjo za zdaj še opravljajo raziskovalci s pomočjo prebiranja izstopajočih del. Z orodji umetne inteligence pa si bomo raziskovalci tudi pri tem učinkovito pomagali.

#### 5. Zahvala

Predstavljeno delo temelji na izkušnjah projekta DigiMates, ki ga je sofinanciral program Evropske unije Erasmus+ v okviru strateškega partnerstva za pripravljenost na digitalno izobraževanje, številka projekta 2020-1-SI01-KA226-HE-093593.

#### Viri

- [1] M. Aria in C. Cuccurullo, bibliometrix: An R-tool for comprehensive science mapping analysis, *Journal of Informetrics* 11(4) (2017), str. 959–975.
- [2] Clarivate, Web of Science, <https://www.webofscience.com>.
- [3] D. Denyer in D. Tranfield, Producing a systematic review, v: *The SAGE handbook of organizational research methods* (ur. D. Buchanan in A. Bryman), SAGE, Los Angeles, California, ZDA, 2009, str. 671–689.
- [4] N. J. van Eck in L. Waltman, Software survey: VOSviewer, a computer program for bibliometric mapping. *Scientometrics* 84 (2010), str. 523–538.
- [5] Zupic in T. Čater, *Bibliometric Methods in Management and Organization*, *Organizational Research Methods* 18(3) (2015), str. 429–472.

## Fizika skozi čas: vzpostavitev interaktivnega muzeja za poučevanje in raziskovanje fizike)

Avtor: Primož Trontelj<sup>1</sup>

<sup>1</sup> OŠ prof. dr. Josipa Plemlja Bled

Ta članek predstavlja in analizira inovativen pristop k poučevanju fizike skozi vzpostavitev interaktivnega muzeja "Fizika skozi čas". Projekt je rezultat sodelovalnega prizadevanja med učiteljem fizike, učiteljico dodatne strokovne pomoči, knjižničarjema in nadarjenimi učenci. Članek opiše koncept muzeja, vključno z izborom eksponatov, načinom prilagajanja vodenja glede na starostne skupine ter vplivom na učence različnih stopenj izobraževanja. Cilj projekta je spodbuditi razumevanje fizikalnih konceptov skozi zgodovinsko perspektivo, vključiti praktično eksperimentiranje ter omogočiti sodelovanje učencev in timsko delo. Ključne besede: interaktivni muzej, fizika, poučevanje, eksperimentiranje, raziskovanje, eksponati, sodelovanje.

### 1. Uvod

Poučevanje naravoslovnih znanosti, kot je fizika, se nenehno razvija, saj se prilagaja novim tehnologijam in pedagoškim pristopom. V današnjem hitro spreminjajočem se svetu je ključno, da se prilagodimo novim metodam poučevanja in motivaciji učencev za učenje. V tem članku predstavljamo izjemen primer takšnega pristopa - interaktivni muzej "Fizika skozi čas". Ta projekt vključuje sodelovanje med učitelji fizike, učiteljicami dodatne strokovne pomoči, nadarjenimi učenci in knjižničarjema. Njegov cilj ni le poučevanje fizike skozi zgodovinsko perspektivo, temveč tudi spodbuja interaktivno učenje, raziskovanje in sodelovalno učenje med učenci. Glavni cilj muzeja je izboljšati poučevanje naravoslovnih ved in s tem pozitivno vplivati na razumevanje in zanimanje za naravoslovnih vsebine med različnimi starostnimi skupinami med učenci.

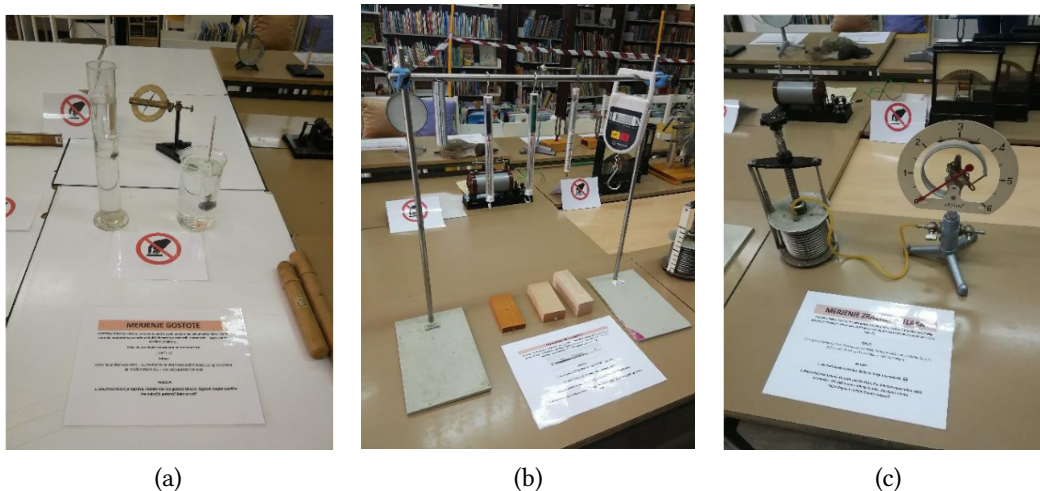


Slika 1: (a) plakati, (b) pospravljanje kabineta, (c) muzej

### 2. Izvedba muzeja

**2.1. Izbira eksponatov in njihov pomen.** Ideja za muzej je prišla spontano, saj sta učitelj fizike in učiteljica dodatne strokovne pomoči med generalnim čiščenjem fizikalnega kabineta našla veliko starejših eksponatov, ki so se včasih uporabljali za poučevanje fizike. Eksponati, vključno z merilniki, glasbenimi inštrumenti, knjigami in eksperimentalnimi pripomočki, so bili skrbno izbrani. Na njihovo izbiro so vplivali didaktični potencial, zanimivost, praktičnost, zgodovinski pomen, možnost samostojnega eksperimentiranja in element presenečanja pri eksperimentiranju. Pri izbiri in usposabljanju eksponatov je imel zelo pomembno vlogo nadarjen učenec 8. razreda, ki se tudi v prostem času ukvarja z eksperimentiranjem, predvsem na področju elektrike. Učenec je nekatere eksponate odnesel domov in jih popravil. Nekatere naprave so imele navodila zapisana v cirilici. Pri prevodu le-teh so nam pomagali učenci, ki so se preselili iz Ukrajine. Primeri eksponatov, ki smo jih uporabili, so: več vrst tehtnic, galaktometer, več vrst termometrov, zrcalna škatla, kaleidoskop, različne

štoparice, glasbene vilice, grafoskop s prosojnicami, različni elektroskopi, Wimshurstov influenčni stroj, drsni reostat, Ruhmkorffov induktor, modelček parnega stroja ... Raznovrstnost eksponatov je omogočila učencem, da se poglobijo v različna področja fizike, od mehanike do zvoka, svetlobe in elektromagnetizma. Veliko eksponatov predstavlja pomemben mejnik v razvoju fizikalnih konceptov in eksperimentalnih metod ter omogoča učencem, da se neposredno soočijo s preteklimi dosežki in izzivi v naravoslovnih vedah. Na primer, Wimshurstov influenčni stroj je simbol elektrostatičnosti in prinaša učencem vpogled v zgodnje poskuse o elektriki. Starejše tehnične in štoparice pa odpirajo pogovor o natančnosti meritev ter pomenu tehnik merjenja in njihovega razvoja skozi zgodovino.



Slika 2: (a) galaktometer, (b) silomeri, (c) merilnik zračnega tlaka



Slika 3: (a) glasbene vilice, (b) elektroskopi

**2.2. Organizacija vodenja razstave.** Pri ustvarjanju interaktivnega muzeja "Fizika skozi čas" smo si prizadevali doseči usklajenost med različnimi sodelujočimi, da bi zagotovili kakovostno izkušnjo za vse učence. Učitelj fizike, knjižničarja in dva nadarjena učenca iz 8. in 9. razreda smo tvorili sodelujočo ekipo muzejskih vodnikov, ki je združila različne spretnosti in znanja. Vsak posameznik je prispeval svoje veščine in izkušnje, kar je omogočilo oblikovanje celovitega pristopa k vodenju muzeja. Učitelj je prinesel strokovno znanje in vodil večinoma starejše skupine učencev, knjižničar je skrbel za komunikacijo in vodenje mlajših skupin, nadarjeni učenci pa so s svojo strastjo in energijo vplivali na motivacijo učencev.

Da bi omogočili ogled razstave vsem učencem, smo vzpostavili jasen urnik na vratih knjižnice, kjer so lahko razredniki prijavili svoj oddelek. Ker so se vpisovali en teden vnaprej, smo z lahkoto organizirali vodenje. Medtem ko je urnik na vratih knjižnice zagotovil strukturo, smo ohranjali nenehno komunikacijo med vsemi vpletenimi. Redno smo se sestajali in delili svoje izkušnje, izzive in ideje. Povratne informacije učencev in sodelavcev so bile neprecenljive za prilagajanje vodenja in izboljšanje izkušnje učencev. Sodelovanje med učitelji različnih oddelkov je presežlo meje učilnic in omogočilo obogateno izkušnjo za vse učence šole. Prav tako smo ustvarili povezave med generacijami, saj smo na ogled sprejeli tudi skupino iz bližnjega vrtca. Ta medgeneracijski pristop je dodal poseben čar dogodku in omogočil, da so tudi najmlajši občutili navdušenje nad fiziko.

**DOŽIVI FIZIKO SKOZI ČAS NA OŠ BLED**  
Razstava ob 50-letnici  
**RAZREDNA STOPNJA**

URZ	SRE 19.4.	ČET 20.4.	PET 21.4.	PON 24.4.	TOR 25.4.
1. 8.20-9.05	1.b X			3.b X	4.b X
2. 9.25-10.10			2.b X 1.A X		4.A X
3. 10.25-11.10				3.A X	5.b X
4. 11.15-12.00			2.c X		2.A X
5. 12.05-12.50			DOM. BELA (B) X	5.a X	4.c X
6. 12.55-13.40					

*FIZ DAV  
Knjižničarja*

Slika 4: Urnik vodenj razstave

**2.3. Prilagoditev glede na starostne skupine.** Pristop smo prilagodili glede na starost učencev, kar omogoča učno doživetje, ki je primerno za vsak razred - od prvega do devetega. Pomemben vidik vzpostavitve muzeja je bila prilagoditev vodenja in razstave glede na starostne skupine učencev. Muzejska razstava se je začela s preprostimi eksponati, primernimi za prvošolce, kjer so se tako srečali s temeljnimi fizikalnimi pojmi, kot so masa, čas in sila. Postopoma smo napredovali do bolj kompleksnih eksponatov, ki so se dotikali konceptov, kot so elektrika, magnetizem in tlak za učence višjih razredov. Učenci nižjih razredov nekaterih poskusov niso izvajali sami, pač pa smo jih demonstrirali vodniki. Tako smo zagotovili, da so bili eksponati in vodenje ustrezni za vsako starostno skupino. Učenci so se tako lahko postopoma poglobili v zahtevnejše koncepte in se ob tem počutili udobno ter samozavestno. Učenci so tako imeli možnost na svoji ravni razumeti in doživljati fiziko.

**2.4. Interaktivno učenje in raziskovanje.** Muzej Fizika skozi čas je bil zasnovan na temelju interaktivnega pristopa k učenju. Vsak eksponat je imel na mizi prilepljena jasna navodila za uporabo, ki so učence vodila skozi raziskovanje in eksperimentiranje. Na eni strani so učenci s knjižničarjema in razrednikom raziskovali stare knjige in uporabljali projektor in prosojnice z zanimivimi slikami iz veselja, na drugi strani pa so ob vodenju učitelja fizike ali nadarjenega učenca sodelovali v poskusih s prej omenjenimi eksponati. Ključni element muzeja je bil poudarek na interaktivnem učenju. Namesto pasivnega poslušanja predavanj so imeli učenci priložnost, da eksperimentirajo sami. Navodila za uporabo eksponatov so jih vodila k postavljanju hipotez, preizkušanju idej in raziskovanju fizikalnih pojavov v realnem okolju. To je privedlo do večjega razumevanja in poglobljenega znanja, saj so učenci snov bolje osvojili s praktičnim izkustvom.

### 3. Vpliv na učence

**3.1. Razvoj kritičnega razmišljanja in radovednosti.** Projekt je presegal pričakovanja, kar se je odražalo v rezultatih. Zanimanje za fiziko se je v veliki meri povečalo, kar so potrjevale povratne informacije učencev, staršev in sodelavcev. Mlajši učenci so bili navdušeni nad eksperimenti, medtem ko so se starejši učenci spoprijemali z izzivi, ki so jim omogočili, da so bolj poglobljeno razumeli koncepte. Poudarek na interaktivnem učenju in dejavnem sodelovanju je omogočil boljše usvajanje učne snovi ter razvijanje radovednosti in kritičnega razmišljanja. Preizkušanje eksponatov ter razmišljanje o njihovih učinkih in posledicah je spodbujalo učence, da prevzamejo vlogo aktivnih raziskovalcev. Sodelovanje v eksperimentalnih dejavnostih je pripomoglo k razvoju njihove sposobnosti za opazovanje, analiziranje in razlaganje fizikalnih pojavov.

**3.2. Povezovanje teorije z eksperimentom.** Muzej je omogočil učencem, da povežejo teoretično znanje, ki so ga pridobili v učilnici, z dejanskimi eksperimenti. Vsak eksponat je bil zasnovan tako, da je spodbujal razmišljanje o teoretičnih konceptih, kot tudi o njihovi praktični uporabi. To je učencem omogočilo, da si bolje predstavljajo, kako se teorija prepleta z realnim svetom ter kako lahko fizikalne zakonitosti razložijo tudi vsakdanje pojave.

**3.3. Vpliv na razvoj kompetenc.** Projekt interaktivnega muzeja Fizika skozi čas je ne le spodbudil razumevanje fizikalnih konceptov, temveč je tudi prispeval k razvoju širših kompetenc pri učencih. Sodelovanje v eksperimentalnih dejavnostih je kreiralo priložnosti za timsko delo, komunikacijo in



reševanje izzivov. Učenci so se učili sodelovati, izmenjavati ideje ter se soočati s težavami, kar so pomembne veščine za njihovo nadaljnje šolanje in osebni razvoj.

**3.4. Vpliv na motivacijo za učenje.** Eden izmed ključnih dosežkov projekta je bil njegov pozitiven vpliv na motivacijo učencev za učenje fizike. Z interaktivnim pristopom so učenci prepoznali, da je fizika lahko zabavna in praktična, kar je povečalo njihovo željo po raziskovanju in razumevanju predmeta. Pri osmošolcih in devetošolcih je bilo opazno povečanje aktivne udeležbe na urah fizike. Pri mlajših učencih pa smo opazili željo, da bi se fizike učili že prej, kot pri urah naravoslovja in fizike, ki se začne šele v 6. razredu.

**3.5. Krepitev vodstvenih sposobnosti.** Vključevanje nadarjenih učencev v proces vzpostavitve in vodenja muzeja je imelo dvojni učinek. Poleg njihovega pomembnega prispevka k projektu, so nadarjeni učenci pridobili priložnost za razvoj vodstvenih in organizacijskih veščin. Vodenje po muzeju ter interakcija z različnimi starostnimi skupinami učencev sta okrepila njihovo samozavest in sposobnost javnega nastopanja. Nadarjeni učenci so ob svojih vodenjih uspešno pridobili pozornost in tudi spoštovanje mlajših učencev.

#### 4. Pogled v prihodnost

Projekt Fizika skozi čas je postavil temelje za prihodnost. Načrtujemo, da bomo projekt v prihodnosti nadgradili in ga ponovili vsaka štiri leta, da bomo osvežili izkušnjo za nove generacije učencev. To bo omogočilo, da bo še več učencev doživelo čar fizike skozi eksperimentiranje, interaktivno učenje in raziskovanje.

#### 5. Zaključek

Projekt Fizika skozi čas je jasen dokaz, da je inovacija ključna za preoblikovanje poučevanja in navduševanja učencev za učenje. S takšnim pristopom lahko presežemo meje tradicionalnega poučevanja. S povezovanjem zgodovinske perspektive, praktičnih eksperimentov, interaktivnih izkušenj in sodelovanja smo ustvarili okolje, v katerem se učenci lahko učijo, raziskujejo in razvijajo. Ta projekt je spodbuda za vse učitelje, da razmišljajo zunaj okvirjev in ustvarjajo izkušnje, ki bodo učence navdušile za naravoslovje ter obogatile njihov izobraževalni proces.

## RAZISKOVALNO–APLIKATIVNA SEKCIJA

49

### Lastnosti orešnih grafov ter njihove aplikacije

Avtor: Nino Bašič<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Orešni graf je graf, ki ima enorazsežno jedro matrike sosednosti, pripadajoči lastni vektor pa ne vsebuje ničelnih elementov. Če graf  $K_1$  izvzamemo, imajo orešni grafi vsaj sedem vozlišč; vsi so povezani, vsebujejo vsaj en lihi cikel in so brez listov. Ogleдали smo si nekaj konstrukcij, ki iz manjših orešnih grafov naredijo večje orešne grafe. Nato smo se ukvarjali s simetrijami orešnih grafov in ugotovili, da so lahko vozliščno tranzitivni, ne morejo pa biti povezavno tranzitivni. Na koncu smo si ogledali še njihove kemijske lastnosti in aplikacije v fiziki.

18

### O Maiorana-McFarland funkcijah, ki ležijo zunaj drugih pomembnih razredov

Avtorica: Nastja Cepak<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Inštitut Andreja Marušiča

**Povzetek.** Teoretični temelji moderne kriptografije in informacijske teorije so bili postavljeni leta 1948 s prebojnim člankom Clauda Shannona "A Mathematical Theory of Communication". Da bi zadovoljila današnjim potrebam, mora kriptografija zagotoviti štiri osnovne storitve: zaupnost, integriteto podatkov, avtentikacijo in ne-odklonskost. Kriptografske sheme tem zahtevam uspejo zadostiti s sodelovanjem strokovnjakov z številnih področij, med drugim s sodelovanjem matematikov. Eno od naših področij raziskovanja se osredotoča na Boolove funkcije, torej na funkcije, ki preslikajo niz enic in ničel v ali enico ali ničlo. Takšne funkcije morajo glede na področje, kjer so uporabljene, zadostiti številnim pogojem. Eden od njih je lastnost nelinearnosti. Boolove funkcije z maksimalno nelinearnostjo imenujemo ukrivljene funkcije. Do sedaj nam je uspelo opisati le malo splošnih družin takšnih funkcij, želimo pa doseči njihovo klasifikacijo. Zaradi tega je pomembno, da uspemo razviti pokazatelje, ki nam čim hitreje povedo, ali je novo definirana ukrivljena funkcija zaobjeta v že poznanih definicijah, ali ne.

#### 1. Uvod in opis problema

V šestdesetih letih prejšnjega stoletja so se kriptografi v različnih državah ukvarjali s problemom optimizacije izbire Boolovih funkcij za namene boljše varnosti informacij. Ena od optimiziranih lastnosti je bila *nelinearnost*. Boolove funkcije, ki ležijo na največji možni razdalji od množice vseh afinih funkcij, se imenujejo *ukrivljene funkcije* (*bent functions*). Ta razred Boolovih funkcij so prvi odkrili raziskovalci Združenih držav Amerike in Sovjetske zveze v sklopu ločenih vzporednih tajnih raziskovalnih projektov. Danes se obravnava Oscarja Rothausa kot prvega raziskovalca, ki je svetu javno predstavil ukrivljene funkcije. Prvič je opisal ukrivljene funkcije v klasificiranem članku leta 1966, ki je šele čez deset let postal dostopen širši javnosti [13].

V naslednjih desetletjih raziskovanja ukrivljenih funkcij so se pokazala številna področja njihove uporabe. V teoriji kodiranja je, na primer, pokazano, da je iskanje premera pokritja Reed-Mullerjeve

kode ekvivalentno iskanju Boolove funkcij z najvišjo nelinearnostjo [7,11]. Ukrivljene funkcije se uporabljajo tudi za konstrukcijo znanih Kerdockovih kod [6,14]. Uporabljajo se tudi za načrtovanje zaporedij, ki se jih uporablja v sklopu določenih telekomunikacijskih tehnik, ki uporabljajo CDMA metodo (Code Division Multiple Access).

Na področju ukrivljenih funkcij ostajajo številna odprta vprašanja. Kar se tiče njihovega načrtovanja in klasifikacije, so poznane določene primarne konstrukcije, obstajajo pa tudi številne sekundarne konstrukcije, ki iz že znanih ukrivljenih funkcij konstruirajo nove. Zainteresiran bralec si lahko ogleda tudi lep pregled ukrivljenih funkcij, ki sta ga napisala Carlet in Mesnager [5].

Glavni problem sekundarnih konstrukcij je, da je novo konstruirane ukrivljene funkcije težko klasificirati. Natančneje, lahko se zgodi, da nekatere sekundarne konstrukcije generirajo funkcije, ki pripadajo kateremu od že poznanih primarnih razredov. V tem primeru je pomembna samo njihova eksplicitna reprezentacija. Dokazovati, da funkcije ležijo zunaj popolnih primarnih razredov, je težka naloga. V tem članku so opisani rezultati (ne)vsebovanosti v popolnem razredu Maiorana-McFarland.

## 2. Definicije

Naj  $\mathbb{F}_2$  označuje binarno polje in naj bo  $n$ -dimenzionalni vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{F}_2$  označen s  $\mathbb{F}_2^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{F}_2, \text{ za } i = 1, \dots, n\}$ . Razširitev Galoisovega polja dimenzije  $n$  nad poljem  $\mathbb{F}_2$  označimo s  $\mathbb{F}_{2^n}$ . Če odstranimo element 0, to označimo s  $\mathbb{F}_{2^n}^*$ . Funkcijo, ki slika iz prostora  $\mathbb{F}_2^n$  v prostor  $\mathbb{F}_2$  (oziroma ekvivalentno, iz polja  $\mathbb{F}_{2^n}$  v polje  $\mathbb{F}_2$ ) imenujemo *Boolova funkcija* v  $n$  spremenljivkah. Množico vseh Boolovih funkcij v  $n$  spremenljivkah označimo z  $\mathcal{B}_n$ .

Walsheva transformacija funkcije  $f \in \mathcal{B}_n$  v točki  $x \in \mathbb{F}_2^n$  je definirana kot

$$W_f(x) = \sum_{y \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{f(y) + x \cdot y},$$

kjer " $\cdot$ " označuje klasični notranji produkt dveh vektorjev.

Naj bo  $n$  sodo število. Za funkcijo  $f \in \mathcal{B}_n$  rečemo, da je *ukrivljena*, če in samo če  $W_f(x) \in \{2^{\frac{n}{2}}, -2^{\frac{n}{2}}\}$ , za vse  $x \in \mathbb{F}_2^n$ , kar predstavlja največje možne vrednosti Walshevega spektra.

Maiorana-McFarland razred  $\mathcal{M}$  je množica vseh Boolovih funkcij z  $m$  spremenljivkami ( $m = 2n$ ) oblike  $f(x, y) = x \cdot \pi(y) + g(y)$ , za vse elemente  $x, y \in \mathbb{F}_2^n$ , kjer je  $\pi$  permutacija prostora  $\mathbb{F}_2^n$  in je  $g$  poljubna Boolova funkcija nad prostorom  $\mathbb{F}_2^n$ . Če razredu dodamo še vse funkcije, ki so afino ekvivalentne Maiorana-McFarland funkcijam, dobljeno množico označujemo z  $\mathcal{M}^\#$ .

Iz tega razreda je Carlet v [4] razvil dva nova razreda ukrivljenih funkcij. Prvi je razred  $\mathcal{C}$ , ki vsebuje vse funkcije oblike  $f(x, y) = x \cdot \pi(y) + 1_{L^\perp}(x)$ , kjer je  $L$  poljubni linearni podprostor prostora  $\mathbb{F}_2^n$  in  $\pi$  poljubna takšna permutacija prostora  $\mathbb{F}_2^n$ , da je  $\pi^{-1}(a+L)$  afin podprostor za vse elemente  $a \in \mathbb{F}_2^n$ . Poleg tega z  $L^\perp$  označimo prostor, ortogonalen prostoru  $L$ , in z  $1_{L^\perp}$  indikatorsko Boolovo funkcijo, ki elemente, ki so vsebovani v prostoru  $L^\perp$ , slika v 1 in vse druge v 0. Pravimo, da permutacija  $\pi^{-1}$  in podprostor  $L$  zadostita lastnosti  $(C)$ .

Drugi razred je imenovan  $\mathcal{D}$  razred in je podobno definiran:  $f(x, y) = x \cdot \pi(y) + 1_{E_1}(x)1_{E_2}(y)$ , kjer je  $\pi$  permutacija prostora  $\mathbb{F}_2^n$  in sta  $E_1, E_2$  takšna linearna podprostora prostora  $\mathbb{F}_2^n$ , da  $\pi(E_2) = E_1^\perp$ . Permutacija  $\pi$  in podprostora  $E_1, E_2$  zadostita lastnosti  $(D)$ .

Za še nekaj preostalih definicij, kot sta definicija linearne strukture in podrazreda  $\mathcal{D}_0$ , napotimo bralca k [15].

## 3. Rezultati

Prvi pomemben rezultat na področju dokazovanja vključenosti oziroma izključenosti iz razreda Maiorana-McFarland je bil objavljen leta 2017 v [16], kjer je bila uporabljena posebna oblika Rothausove konstrukcije za načrtovanje ukrivljene funkcije, ki je dokazljivo zunaj razreda  $\mathcal{M}$ . Delo se je nadaljevalo v [10].

Sledila je serija člankov, ki so se osredotočili na preplet med razredi  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  in  $\mathcal{M}$ . Prvi velik rezultat na tem področju je bil v svoji končni obliki objavljen v [15].

**Izrek.** [15] Naj bo  $m = 2n > 6$  sodo celo število in naj bo  $f(x, y) = x \cdot \pi(y) + 1_{E_1}(x)1_{E_2}(y)$ , kjer je  $f$  ukrivljena funkcija v razredu  $\mathcal{D}$ . Če elementi  $(\pi, E_1, E_2)$  zadostijo pogojem

- 1)  $\dim(E_1) \geq 2$  in  $\dim(E_2) \geq 2$ ;
- 2)  $u \cdot \pi$  nima neničelnih linearnih struktur za vse elemente  $u \in \mathbb{F}_2^{n*}$ ;
- 3)  $\deg(\pi) \leq n - \dim(E_2)$ ,

potem je  $f$  ukrivljena funkcija v razredu  $\mathcal{D}$ , ki leži zunaj razreda  $\mathcal{M}^\#$ .

V istem članku je bil podoben rezultat dosežen tudi za razreda  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{D}_0$ . V naslednjih izrekih so podobni rezultati dobljeni glede na zaostrovanje začetnih zahtev parametrov funkcije. Sledili so rezultati iz članka [9], ki se je ukvarjal s tem, kako sploh izpolniti stroge pogoje, ki jih zahteva izrek. Dokazano je, da pri določeni izbiri podprostorov zahtevani pogoji sploh ne morejo biti izpolnjeni, predložene pa so tudi eksplicitne konstrukcije neskončnih družin funkcij, ki pogojem zadoščajo.

Članek [1] je definiriral nov superrazred, ki vsebuje tudi  $\mathcal{M}$  razred, ter proučeval, kako to vpliva na zahtevane pogoje za izključevanje funkcij. Skupaj s člankom [12] se osredotoča na vključenost vektorskih ukrivljenih funkcij iz  $\mathcal{M}$  razreda in posploši številne prej objavljene rezultate. Uvede tudi pojem šibke vključenosti/izključenosti iz razreda.

Za nadaljnje branje svetujemo tudi [2], [3] in [8].

## Viri

- [1] A. Bapić, E. Pasalic, *Constructions of (vectorial) bent functions outside the completed Maiorana-McFarland class*, Discrete Applied Mathematics, 314, pp. 197–212, (2022)
- [2] A. Bapić, E. Pasalic, *A new method for secondary constructions of vectorial bent functions*, Design, Codes and Cryptography, 89, pp. 2463–2475, (2021).
- [3] E. PASALIC, A. BAPIĆ, F. ZHANG, S. KUDIN, Y. WEI. Explicit infinite families of bent functions outside the completed Maiorana–McFarland class. *Designs, Codes and Cryptography*, 2023
- [4] C. Carlet Two New Classes of Bent Functions Eurocrypt '93, LNCS. vol. 765 (1994), 77–101
- [5] C. Carlet, and S. Mesnager, Four decades of research on bent functions, *Designs, Codes and Cryptography*, vol. 78 (1) (2016), 5–50
- [6] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, PhD thesis, 1973
- [7] S. Kavut, S. Maitra, M.D. Yücel, Search for Boolean functions with excellent profiles in the rotation symmetric class, *IEEE Trans Inform Theory* 53.5 (2007), 1743–1751
- [8] S. KUDIN, E. PASALIC A complete characterization of  $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{M}^\#$  and a general framework for specifying bent functions in  $\mathcal{C}$  outside  $\mathcal{M}^\#$  *Designs, Codes and Cryptography* volume 90 (2022), 1783–1796
- [9] S. KUDIN, E. PASALIC, N. CEPÁK, F. ZHANG. Permutations without linear structures inducing bent functions outside the completed Maiorana-McFarland class. *Cryptography and Communications*, vol. 14 (2022), 101–116
- [10] S. Liu, F. Zhang, E. Pasalic, S. Xia, Z. Zhuo. *Further study on constructing bent functions outside the completed Maiorana-McFarland class*. IET Inf. Secur. 14(6) (2020), 654–660
- [11] S. Maitra, P. Sarkar, Maximum nonlinearity of symmetric Boolean functions on odd number of variables. *IEEE Trans Inform Theory* 48(9) (2002), 2626–30
- [12] E. PASALIC, F. ZHANG, S. KUDIN, Y. WEI. Vectorial bent functions weakly/strongly outside the completed Maiorana–McFarland class. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 294, 138–151, 2021
- [13] O. S. Rothaus, On Bent Functions, *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, vol. 20 (1976), 300–305
- [14] V. M. Sidelnikov, On extremal polynomials used to estimate the size of codes, *Probl. Inform. Transm.*, 16 (1980), 174–186
- [15] F. Zhang, N. Cepak, E. Pasalic, Y. Wei Further analysis of bent functions from  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{D}$  which are provably outside or inside  $\mathcal{M}^\#$ , Discrete Applied Mathematics, 285 (2020), 458–472
- [16] F. ZHANG, E. PASALIC, Y. WEI, N. CEPÁK. Constructing bent functions outside the Maiorana-McFarland class using a general form of Rothaus. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 63, no. 8 (2017), 5336–5349

## Predstavitev plakatov (raziskovalno–aplikativna sekcija) / 23

## Kritične povezave v Ripsovih kompleksih ter vztrajnost

Avtor: Peter Goričan<sup>1</sup><sup>1</sup> Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, UL FMF

Najprej navedimo definicijo Ripsovega kompleksa in vztrajne homologije.

**Definicija.** Naj bo  $X$  metrični prostor in  $S \subseteq X$  podmnožica. Pri izbranem parametru  $r > 0$  je Ripsov kompleks  $Rips(S, r)$  abstraktni simplicialni kompleks definiran s:

1.  $S$  je množica točk,
2.  $\sigma \subseteq S$  je simpleks natanko takrat, ko je  $\text{Diam}(\sigma) < r$ .

Ripsova filtracija prostora  $S$  je kolekcija abstraktnih simplicialnih kompleksov  $\{Rips(S, r)\}_{r>0}$  skupaj z inkluzijami:  $i_{r_1, r_2} : Rips(S, r_1) \rightarrow Rips(S, r_2)$  za  $r_1 < r_2$ .

Z uporabo homologije  $H_q$  s koeficienti v  $F$  na Ripsovi filtraciji dobimo vztrajno homologijo, ki jo sestavljajo homološke grupe  $\{H_q(Rips(X, r); G)\}_{r \geq 0}$  in inducirani homomorfizmi  $\{(i_{s,t})^*\}_{s \leq t}$ .

Naš cilj je naslednji. Naj bo  $(X, d)$  kompakten metrični prostor. Pokazali smo, da je vsako zmanjšanje ničdimensionalne vztrajnosti in vsako povečanje enodimensionalne vztrajnosti povzročeno z lokalnimi minimumi funkcije razdalje  $d$ .

Če ima  $d$  samo končno mnogo lokalnih minimumov, smo dokazali, da je vsaka takšna sprememba vztrajnosti porojena s posebno kritično povezavo v Ripsovem kompleksu, ki je hkrati tudi lokalni minimum funkcije  $d$ .

Navedimo še nekaj definicij, ki so potrebne za naše rezultate. Definicija kritične vrednosti je povzeta po [1].

Realna vrednost  $a \geq 0$  je *pojavnno regularna vrednost*  $H_q$ , če obstaja  $\varepsilon > 0$ , tako da je za vse  $s, t \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [0, \infty)$ ,  $s \leq t$ , preslikava  $(i_{s,t})^*$  surjektivna in je *pojavnno kritična vrednost*, če ni pojavnno regularna vrednost.

Realna vrednost  $a \geq 0$  je *ponorna regularna vrednost*  $H_q$ , če obstaja  $\varepsilon > 0$ , tako da je za vse  $s, t \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [0, \infty)$ ,  $s \leq t$ , preslikava  $(i_{s,t})^*$  injektivna. Realna vrednost je *ponorna kritična*, če ni ponorna regularna.

Naj bo  $\rho > 0$ . *Končno strogo  $\rho$ -zaporedje* med točkama  $x, y \in X$  je zaporedje  $x = x_1, x_2, \dots, x_p = y$  točk v  $X$ , tako da je  $d(x_j, x_{j+1}) < \rho$ .

Naj bo  $X$  kompakten metrični prostor in  $r > 0$ . Ekvivalenčno relacijo  $\sim_r$  na  $X$  definiramo z  $x \sim_r y \Leftrightarrow [x] = [y] \in H_0(Rips(X, r))$ . Enakovredno:  $x \sim_r y$ , če obstaja končno strogo  $r$ -zaporedje med njima.

Naj bo  $(X, d)$  kompakten metričen prostor,  $r > 0$ ,  $x, y \in X$  in  $d(x, y) < r$ . Pravimo, da se  $(x, y)$   *$\nu$ -spusti* na  $(x', y')$ , če obstaja končno  $\nu$ -zaporedje  $x = x_1, x_2, \dots, x_p = x'$  in  $y = y_1, y_2, \dots, y_p = y'$  tako, da za vsak  $j$  velja  $d(x_j, y_j) < d(x, y)$ .

**Lema o spustu.** Naj bo  $(X, d)$  kompakten metrični prostor in  $r > 0$ . Če je  $c > 0$  edini lokalni minimum funkcije razdalje  $d$  na intervalu  $[c, r)$ , potem:

- a) Vsak par točk  $x, y \in X$  z  $d(x, y) < r$ , se spusti na par točk  $(x', y')$  na razdalji največ  $c$ .
- b) Za vsak 1-cikel  $\alpha$  v  $Rips(X, r)$  obstaja končni  $c$ -cikel  $\alpha'$  v  $X$  tako, da  $[\alpha'] = [\alpha] \in H_1(Rips(X, r))$ .
- c) Za vsako bazno simplicialno zanko  $\alpha$  v  $Rips(X, r)$  obstaja bazna simplicialna zanka  $\alpha'$  v  $Rips(X, c)$ , tako da je  $\alpha'$  homotopsko ekvivalentna z  $\alpha$  v  $Rips(X, r)$ .

**Izrek.** Naj bo  $(X, \bullet)$  bazni prostor, ki je kompakten in enostavno povezan do  $R > 0$ . Predpostavimo, da je  $\text{LocMin}(d)$  končen. Če je  $M_c$  končen za vsak  $c > 0$ , potem za vsak  $r > 0$  velja:

$$\text{mgs}(H_1(\text{Rips}(X, r))) \leq \text{mgs}(H_1(X)) + \sum_{c < r} |M_c| < \infty.$$

Velja še: če so  $A_1, A_2, \dots, A_n$  s potmi povezane komponente  $x_j \in A_j$ , potem za vsak  $r > 0$ :

$$\text{MGS}(\text{Rips}(X, r)) \leq \text{MGS}(X) + \sum_{c < r} |M_c| < \infty.$$

Tu je  $M_c := \{(x, y) \in X, |, d(x, y) = c, d \text{ ima lokalni minimum pri } (x, y)\}$  množica parov, pri kateri ima  $d$  lokalni minimum pri  $d(x, y) = c$ . Oznaka  $\text{mgs}$  pomeni moč najmanjše množice generatorjev grupe  $G$  in  $\text{MGS}(X) = \sum_{j=1}^m \text{mgs}(\pi_1(A_j, x_j))$ .

Prispevek je povzet po članku [2].

## Viri

[1] D. Govc, *On the definition of the homological critical value*, J. Homotopy Relat. Struct. 11 (2016), 143–151

[2] P. Goričan, Z. Virk, *Critical edges in Rips complexes and persistence*, <https://arxiv.org/pdf/2304.05185.pdf>

24

## Tranzitivnost in slučajna cenzura

**Avtorja:** Janko Gravner<sup>1</sup>, Brett Kolesnik<sup>2</sup>

<sup>1</sup> University of California Davis, Inštitut Andreja Marušiča

<sup>2</sup> Department of Statistics, University of Oxford

**Povzetek.** Predpostavimo določeno število logičnih izrazov, ki so vsi med seboj ekvivalentni, vendar se tega ne zavedamo. Vemo pa za nekaj implikacij, ki predstavljajo našo začetno informacijo. To znanje potem poskušamo izpopolniti s tranzitivnostjo. Pri tem pa nam je v oviro muhasti cenzor, ki dovoli samo določene slučajno izbrane zaključke. Obravnavali bomo vprašanje, kdaj tranzitivno zaprtje z veliko verjetnostjo še vedno privede do vseh dovoljenih zaključkov, ali vsaj do večine letih.

### 1. Uvod

Denimo, da imamo  $n$  logičnih izrazov, ki jih predstavimo z množico točk  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  nekega grafa. Ti izrazi so vsi med seboj ekvivalentni, vendar se tega ne zavedamo. Vemo pa za nekaj implikacij, ki predstavljajo našo začetno informacijo: usmerjen graf  $G_0 = (V, E_0)$ , v katerem (usmerjene) povezave predstavljajo začetne implikacije. To znanje potem poskušamo izpopolniti s tranzitivnim zaprtjem. Pri tem pa so dovoljeni samo določeni slučajno izbrani zaključki, ki jih predstavimo kot **odprte** povezave  $E_{\text{od}} \subset (V \times V) \setminus E_0$ . Preostale, prepovedane povezave, so **zaprte**.

Pogosto so podobne dinamike imenovane *ojačeno pronicanje na grafih*: začni z grafom na množici točk  $V$ , potem dodajaj povezave (ne da bi spremenil  $V$ ) glede na neko monotono pravilo. Take dinamike rasti grafov in to izrazoslovje so vpeljali Balogh, Bollobás in Morris v [3]. Kasnejša dela na teh problemih so [2], [7], [4]. V tem prispevku bomo skicirali rezultate iz [5].

*Definicija tranzitivnega zaprtja.* Za vsak čas  $t = 0, 1, \dots$ , definiramo množico **zasedenih** povezav  $E_t$  kot sledi. Ob dani množici  $E_t$ , naj bo  $E_{t+1} = E_t \cup \{i \rightarrow j \in E_{\text{od}} : i \rightarrow k \rightarrow j \in E_t, \text{ za neki } k \in V\}$ . Z besedami, odprta povezava  $i \rightarrow j$  postane zasedena v času  $t + 1$ , če obstajata že zasedeni povezavi  $i \rightarrow k, k \rightarrow j$  v času  $t$ . Ko je enkrat zasedena, povezava nikoli ne spremeni stanja. Prav tako nobena zaprta povezava ne spremeni stanja.

Označimo:  $E_\infty = \cup_t E_t, G_t = (V, E_t)$ .

Podmnožica  $V' \subset V$  je **zasičena** (v nekem času), če so vse odprte povezave v  $V' \times V'$  zasedene.

Naj bo  $G_0$  dan *deterministični* graf. Za trenutek predpostavimo, da ni zaprtih povezav, tj.  $E_{od} = (V \times V) \setminus E_0$ , in da je graf  $G_0$  krepko povezan, tj. za vsaki točki  $x, y \in V$  obstaja v  $G_0$  usmerjena pot od  $x$  to  $y$ . V tem primeru so vse povezave sčasoma zasedene, torej je graf  $G_\infty$  poln in je množica  $V$  sčasoma zasičena. Če so nekatere povezave zaprte, pa ni nujno res, da postanejo vse odprte povezave zasedene, torej se lahko vprašamo, kdaj se zasičenost  $V$  zelo verjetno zgodi. Verjetnost vpeljemo preko naključnega izbora odprtih povezav: povezave zunaj  $E_0$  so odprte neodvisno, morda z različnimi verjetnostmi.

Osredotočili se bomo na začetne grafe  $G_0 = L_n$  in  $G_0 = L_n^\rightarrow$ , ki sta usmerjeni in neusmerjeni linearni graf na  $\{1, \dots, n\}$ . Levo in desno usmerjene povezave so odprte z verjetnostma  $p_\ell$ , in  $p_d$ . Dinamiko zaprtja lahko predstavimo kot proces rasti na matriki sosednosti. Potem so elementi ob diagonali začetno zasedeni in so na slikah obravani modro; zaprti elementi so sivi. V naših limitnih izrekih bomo predpostavili, da gre  $n \rightarrow \infty$ .

### 2. Catalanovo pronicanje

Predpostavimo, da začetno odprte povezave tvorijo usmerjeni linearni graf  $G_0 = L_n^\rightarrow$ , in  $p_d > 0$ ,  $p_\ell = 0$ . Potem imamo naslednji fazni prehod med skoraj praznim in skoraj zasičenim grafom, z naraščanjem gostote  $p_d$  preko vrednosti, ki so *neodvisne od  $n$* .

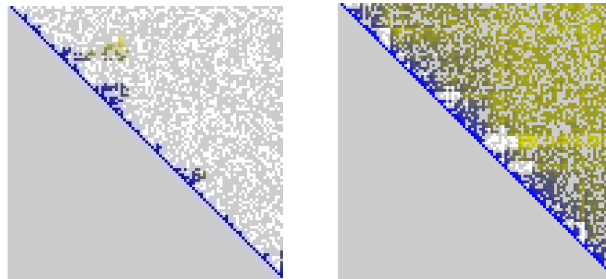
**Izrek 1.** *Obstajata taki konstanti  $p_c^{sp}, p_c^{zg} \in (0, 1)$ , da velja: če je  $p_d < p_c^{sp}$ , potem*

$$\mathbb{P}(E_\infty \text{ ne vsebuje nobene povezave daljše od } \mathcal{O}(\log n)) \rightarrow 1;$$

*če pa je  $p_d > p_c^{zg}$ , potem*

$$\mathbb{P}(E_\infty \text{ vsebuje vse povezave daljše od } \mathcal{O}(\log n)) \rightarrow 1.$$

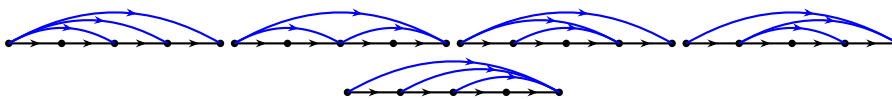
*Odprt problem.* Je prehod nenaden, tj.  $p_c^{sp} = p_c^{zg}$ ?



Slika 1. Končno stanje Catalanovega pronicanja pri  $p_d = 0.35$  (levo) in pri  $p_d = 0.6$ . Barve so interpolirane od modre do rumene glede na čas zasedenosti.

*Skica dokaza obstoja subkričnega režima.* Naj bo  $e$  usmerjena povezava dolžine  $\ell$ . Naj bo  $\mathcal{E}_e$  množica vseh minimalnih (glede na inkluzijo) množic odprtih povezav, ki, skupaj s povezavami v  $E_0$ , povzročijo zasedenost  $e$ . Potem:

- vsaka množica  $A \in \mathcal{E}_e$  vsebuje  $\ell - 1$  povezav, tj.  $|A| = \ell - 1$ ;
- $|\mathcal{E}_e| = C_\ell = \binom{2\ell-1}{\ell} / (2\ell - 1)$ ,  $\ell$ 'to Catalanovo število. Npr.,  $C_4 = 5$ :



Slika 2. Povezava dolžine 4 lahko postane povezana na pet različnih načinov.

Ker je  $C_\ell \leq 4^\ell$ ,

$$\mathbb{P}(e \text{ postane zasedena}) \leq 4^\ell p_d^{\ell-1},$$

in je torej  $p_c^{sp} \geq 1/4$ .

*Skica dokaza obstoja superkričnega režima.* Privzemimo, da je  $i \rightarrow j$  odprta povezava. Če je  $p_d$  nad kritično verjetnostjo usmerjenega pronicanja, so v matriki sosednosti verjetne dolge odprte severovzhodne poti od diagonale. Tranzitivno zaprtje zasede vsako povezavo na takih poteh. Če je  $p_d$  dovolj blizu 1, je zelo verjetno, da sta obe povezavi  $i \rightarrow k$  in  $k \rightarrow j$  zasedeni za neki  $k$ , kar povzroči zasedenost  $i \rightarrow j$ .

Zasičenje pri Catalanovem pronicanju nastopi, ko je  $p_d$  dovolj blizu 1, da so zasedene vse odprte povezave dolžine 3, ki jih je najtežje zasedi. Naslednji izrek je posledica Poissonove konvergence.

**Izrek 2.** Naj bo  $G_0 = L_n^{\rightarrow}$  usmerjeni linearni graf na  $\{1, \dots, n\}$ , z gostotama odprtih povezav  $p_\ell = 0$  in  $p_d = 1 - \alpha n^{-1/2}$ , za neki  $\alpha > 0$ . Verjetnost zasičenja potem konvergira k  $e^{-\alpha^2}$ , ko gre  $n \rightarrow \infty$ .

### 3. Dvosmerni grafi

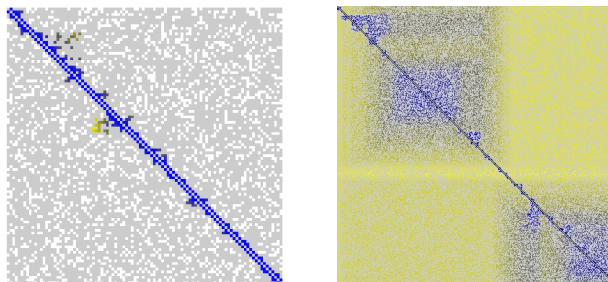
Zdaj predpostavimo, da je  $G_0 = L_n$  neusmerjeni linearni graf na  $\{1, \dots, n\}$ , in da je  $p_\ell = p_d = p$ . Dolge povezave je tako lažje zasedi. Koliko lažje?

**Izrek 3.** Obstajata taki konstanti  $c, C \in (0, \infty)$ , da velja:

- 1) ko je  $p < \frac{c}{\sqrt{\log n}}$ ,  $\mathbb{P}(E_\infty \text{ ne vsebuje povezav daljših od } \mathcal{O}(\log n)) \rightarrow 1$ ;
- 2) ko je  $p > \frac{C \log \log n}{\sqrt{\log n}}$ , je zasičenje zelo verjetno, tj.,  $\mathbb{P}(E_\infty = E_0 \cup E_{od}) \rightarrow 1$ .

*Odprt problem.* Ali je res, da ob primerno izbrani potenci  $\gamma$  obstajata taki pozitivni konstanti  $c$  in  $C$ , da zaključek v (1) velja, ko je  $p < \frac{c(\log \log n)^\gamma}{\sqrt{\log n}}$ , medtem ko zaključek v (2) velja, ko je  $p > \frac{C(\log \log n)^\gamma}{\sqrt{\log n}}$ ?

(Domneva: to drži za  $\gamma = 1/2$ .)



Slika 3. Subkrično (levo,  $p_\ell = p_d = 0.25$ ) in superkrično ( $p_\ell = p_d = 0.35$ ) tranzitivno zaprtje. Opazimo tvorbo jeder: zasičenost celotne množice točk povzročijo relativno majhne zasičene podmnožice, ki rastejo z zasedenostjo povezav ob robu.

### 4. Neusmerjeni grafi

Isti Izrek 3 velja, ko je  $G_0 = L_n$ , neusmerjene povezave so v  $E_{od}$  neodvisne z verjetnostjo  $p$ , in dinamika zapolni vsak trikotnik z dvema zasedenima povezavama in eno odprto. Skicirali bomo dosti lažji dokaz za ta primer. Ideje izhajajo iz drugih procesov s tvorbo jeder, od katerih imata glavno vlogo naslednja dva: *ojačeno pronicanje* ([1] in številni nadaljnji članki); in *pronicanje s sestavljanjem* [6].

*Skica dokaza obstoja subkričnega režima.* Če obstajajo zasedene povezave dolžine  $k$ , potem lahko najdemo interval  $I$  z dolžino vsakega reda velikosti manjšega od  $k$ , z naslednjo lastnostjo: vsaka točka  $v$  iz  $I$  je del roga v  $I$ , tj.,  $v$  in ena od njenih sosed v  $I$  sta povezana z isto točko v  $I$  s parom povezav v  $E_0 \cup E_{od}$ :



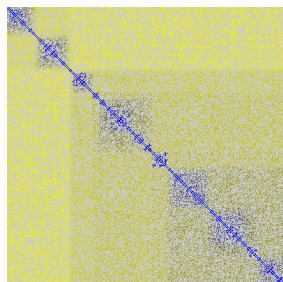
Slika 4. Če so obarvane povezave v enem od teh dveh primerov odprte, je točka  $v$  del roga.



Če zanemarimo odvisnost, ima določeni interval tako lastnost približno  $(p^2 k)^k$ . Če je nadalje  $k = \log n$ , medtem ko je  $p = c/\sqrt{\log n}$ , za dovolj majhen  $c$ , je verjetnost obstoja vsaj enega takega intervala največ

$$n(p^2 k)^k = n^{1+2\log c} \rightarrow 0,$$

torej interval s to lastnostjo zelo verjetno ne obstaja.



Slika 5. Tvorba jeder v neusmerjenem primeru pri  $p = 0.33$ .

|

Skica dokaza obstoja režima zasičenosti. Privzemimo  $C > 8$  in definirajmo

$$k = \left\lceil \frac{\log n}{2 \log \log n} \right\rceil, \quad p = \sqrt{\frac{C \log k}{k}}.$$

Oglejmo si naslednje dogodke (1)–(3).

- (1) Vse povezave  $1 \leftrightarrow j \in [2, k]$  so v  $E_{\text{od}} \cup E_0$ .
- (2) Za vsak par točk  $x, y \in [k+1, k^3]$  obstaja taka točka  $z \in [1, k]$ , da sta  $x \leftrightarrow z, y \leftrightarrow z \in E_{\text{od}} \cup E_0$ .
- (3) Za vsak  $x \in [k+1, k^3]$  je množica  $V_x \subset [1, k]$  krajišč  $z$ , ki pripadajo povezavam  $x \leftrightarrow z \in E_{\text{od}} \cup E_0$ , povezana s povezavami v  $E_{\text{od}} \cup E_0$ .

Da se pokazati, da se ti trije dogodki skupaj zgodijo z verjetnostjo vsaj  $n^{-1/2}$  in v tem primeru postane interval  $[1, k^3]$  zasičen. Torej je z veliko verjetnostjo zasičen neki podinterval dolžine  $k^3$ . Interval take dolžine pa z visoko verjetnostjo povzroči zasičenost celotne množice točk  $V$ .

*Odprt problem.* Za neusmerjene grafe Izrek 3 velja, če je  $G_0$  zaporedje povezanih grafov omejene stopnje. Kaj pa, če stopnje niso omejene? Recimo, kaj se zgodi, če je  $G_0$  hiperkocka razsežnosti  $n$  (ki ima  $2^n$  točk in stopnjo  $n$ )?

#### Viri

- [1] M. Aizenman and J. L. Lebowitz, *Metastability effects in bootstrap percolation*, J. Phys. A 21 (1988), no. 19, 3801–3813.
- [2] O. Angel and B. Kolesnik, *Sharp thresholds for contagious sets in random graphs*, Ann. Appl. Probab. 28 (2018), no. 2, 1052–1098.
- [3] J. Balogh, B. Bollobás, and R. Morris, *Graph bootstrap percolation*, Random Structures Algorithms 41 (2012), no. 4, 413–440.
- [4] Z. Bartha, B. Kolesnik, *Weakly saturated random graphs*, arXiv:2007.14716.
- [5] J. Gravner and B. Kolesnik, *Transitive closure in a polluted environment*, Ann. Appl. Probab. 33 (2023), no. 1, 107–126.
- [6] J. Gravner and D. Sivakoff, *Nucleation scaling in jigsaw percolation*, Ann. Appl. Probab. 27 (2017), no. 1, 395–438.
- [7] B. Kolesnik, *Sharp threshold for  $K_4$ -percolation*, Electronic Journal of Probability 27 (2022), 1–23.

**Avtor:** Bor Harej<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Prime Re Solutions*

**Povzetek.** Do danes večina metod za rezerviranje zavarovalniški škod še vedno temelji na osnovi zbirnih podatkov, ki so razvrščeni v trikotni obliki, kot je metoda veriženja. Z razmahom metod strojnega učenja in z znatnim povečanjem računske moči, izguba informacij, ki je posledica združevanja posameznih podatkov o škodah po letih nastanka in letih razvoja, ni več upravičena. Uporabljena tehnika strojnega učenja, nevronske mreže, je bila izvedena na kaskadni trikotni način, podobno kot trikotne metode rezervacij, rezultati napovedi pa so bili primerjani z rezultati, doseženimi s klasičnimi metodami rezervacij. Ugotovitve omogočajo boljše razumevanje morebitne zapletenosti narave škodnih zahtevkov, opozarjajo na nekatere slabosti, ki bi jih lahko imele tradicionalne metode in kažejo na velik potencial algoritmov strojnega učenja.

## 1. Uvod

V času nastanka škodnega dogodka škode s strani zavarovalnic običajno niso takoj v celoti plačane, ampak se izplačila izvajajo z določenim zamikom. Zavarovalničarji med reševanjem škodnega zahtevka skušajo čim bolj oceniti, kakšna bo končna vrednost plačila na podlagi prvotne ocene škode in že izvedenih plačil. Ta pristop je ključnega pomena za zagotavljanje finančne varnosti zavarovalnice, saj ji omogoča ustrezno rezervacijo sredstev. Poleg tega pravilna ocena potrebnih rezervacij pomaga zavarovalnicam pri določanju ustrezne višine premij, ki jo morajo zaračunati svojim zavarovancem.

Aktuarji so zgodovinsko razvijali škodne zahtevke iz neživljenjskih zavarovanj z uporabo agregiranih trikotnikov in uporabljali tehnike, kot je metoda veriženja (angl. chain-ladder). Metoda veriženja predpostavlja, da bo razvoj trenutnih škod sledil povprečnemu razvoju škod v preteklih letih. Sodobne tehnike strojnega učenja, zlasti nevronske mreže, ponujajo potencialno boljše ocene, saj lahko prepoznajo podrobnejše vzorce od povprečnih za individualni razvoj škod. Članek povzema delo delovne skupine, organizirane v okviru mednarodnega združenja aktuarjev s področja premoženjskih zavarovanj (ASTIN) z imenom "Individualni razvoj škodnih zahtevkov s strojnimi učenjem" [1]. Poudarek je bil na raziskovanju strojnega učenja v povezavi s tradicionalnim aktuarskim rezerviranjem. Uporabljene so bile tehnike, kot so umetne nevronske mreže. Delovna skupina je želela proučiti uporabnost strojnega učenja pri rezerviranju in presoditi ali si zasluži več raziskovalnega poudarka.

## 2. Metodologija

Za individualni razvoj zahtevka je mogoče uporabiti različne metode strojnega učenja. Glede na njihove sposobnosti prepoznavanja vzorcev so bile izbrane nevronske mreže. V našem primeru uporabljena metoda ocenjuje končno vrednost škode zgolj na podlagi primerjave dinamike plačil in ocenjenih vrednosti in ne upošteva drugih znanih okoliščin posamezne škode. Sama metoda sicer to omogoča z dodajanjem dodatnih nevronov za vsako dodatno informacijo o škodah.

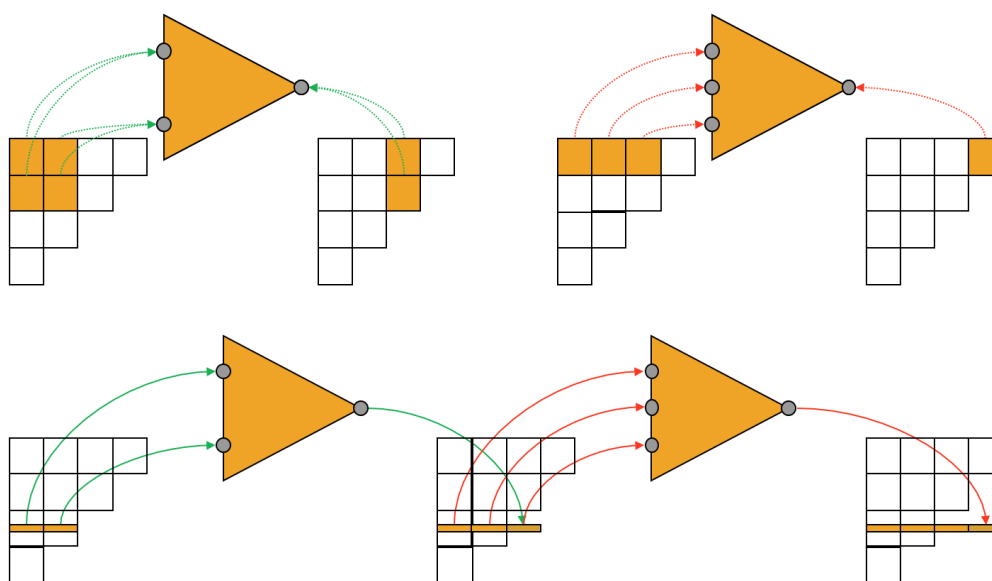
**2.1. Metoda veriženja.** Metoda veriženja je priljubljena metoda v aktuarstvu, ki se uporablja za oceno rezerv za primerljive škode v zavarovalništvu. Ta metoda temelji na načelu veriženja, kjer se uporabijo prejšnji podatki o izplačilih za oceno prihodnjih obveznosti. Pogosto se uporablja za ocenjevanje rezerv v okviru različnih vrst zavarovalniških polic, na primer v neživljenjskih zavarovanjih.

Postopek metode veriženja lahko opišemo v nekaj korakih:

1. *Zbiranje in razvrščanje podatkov:* Zbirajo se zgodovinski podatki o izplačilih škodnih zahtevkov za določeno vrsto zavarovanja, ki se razvrstijo po obdobju, na primer po letih, da se pridobi pregled nad izplačili škodnih zahtevkov v času.
2. *Izračun ocen končnih vrednosti škod z uporabo trikotnika izplačil:* Trikotnik izplačil predstavlja tabelo, kjer so v vrsticah in stolpcih prikazana obdobja in leta. Vsak element trikotnika predstavlja agregirana izplačila škodnih zahtevkov v določenem obdobju in letu. Iz tega trikotnika se nato izračunajo faktorji veriženja, ki predstavljajo razmerje med izplačili v enem letu in izplačili v prejšnjem letu.
3. *Uporaba faktorjev za oceno prihodnjih izplačil:* Faktorji veriženja se nato uporabijo za oceno prihodnjih izplačil v preostalih obdobjih. To se običajno izračuna za vsako obdobje posebej.

Metoda veriženja predpostavlja, da bodo razmerja med izplačili v preteklosti še naprej veljavna v prihodnosti. Če so izpolnjeni pogoji za njeno uporabo (na primer, stabilnost poslovanja in konsistentni podatki), lahko ta metoda zagotovi preprosto in hitro oceno rezerv za škode v zavarovalništvu.

**2.2. Kaskadni pristop.** Kaskadni pristop zahteva serijo umetnih nevronske mreže (v nadaljevanju ANN) in je podoben metodologiji veriženja z razliko, da so nevronske mreže kalibrirane na individualnih namesto na agregiranih podatkih ter da napovedujejo individualni razvoj namesto agregiranega razvoja škod. Kot je prikazano v trikotniku zahtevkov, vsak korak vključuje usposabljanje nadaljnega ANN na podlagi podatkov iz prejšnjega leta, premikanje iz enega razvojnega leta v naslednje (horizontalni razvoj). Ta postopek se ponavlja, dokler ni dokončan spodnji trikotnik podatkov. Ko se kaskada nadaljuje, so zadnji ANN-ji, ki se nanašajo na najnovejša zavarovalna leta (vertikalni razvoj), usposobljeni za relativno manjši nabor podatkov, odvisno od števila zahtevkov v prejšnjih letih.



Slika 1. Kalibriranje nevronske mreže. Trikotniki predstavljajo plačila ali plačila skupaj z ocenami končnih škod združenih vertikalno po letu nastanka in horizontalno po letu razvoja od nastanka škod. Na primer, zgornji levi kvadrata predstavljata vsa plačila škod, ki so nastala pred štirimi leti in so bila izplačana v tistem letu. Zgornji desni kvadrata pa skupen znesek plačanih škod v štirih letih, odkar so škode nastale. Spodaj levi kvadrata predstavljata škode, ki so nastale v zadnjem letu in nadaljnji razvoj še ni poznan. Poznani del razvoja škod predstavljata prikazani trikotnik, manjkajoči del pa skušamo oceniti.

**3. Podatki.** *Simulacije podatkov:* Študija se je začela z generacijo sintetičnih podatkov, ki so bili zasnovani tako, da odražajo dejanske podatke o zavarovalnih zahtevkih. Zneski posameznih zahtevkov so bili ustvarjeni, sledili so znanim distribucijskim zakonom za plačane, odprte in nastale zahtevke.

*Vzorci sintetičnih podatkov* Za sintetične podatke sta bila izbrana dva različna vzorca: eden predstavlja vzorec s kratkim repom, drugi pa vzorec z dolgim repom. To bi lahko ustrezalo materialni in nematerialni škodi zaradi zahtevkov iz motornega zavarovanja tretje osebe.

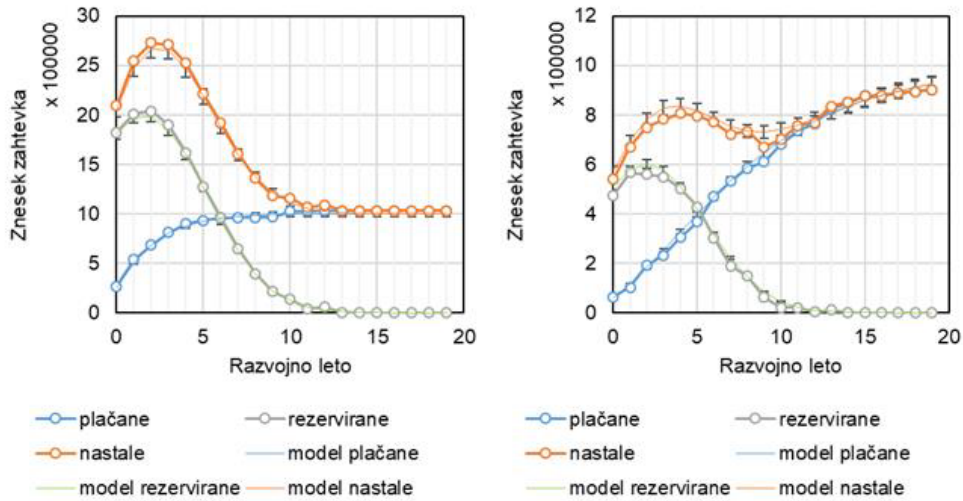
- Vzorec 1: Vzorec s kratkim repom s 6000 zahtevki.
- Vzorec 2: Vzorec z dolgim repom s 4000 zahtevki.

*Razporeditev vzorcev:* Vzorci so bili enakomerno razporejeni čez 20 zavarovalnih let. Na primer:

- Vzorec 1 je imel leta 1997 300 zahtevkov, medtem ko je imel vzorec 2 200 zahtevkov.
- Do leta 2016 je imel vzorec 1 300 zahtevkov, vzorec 2 pa se je zmanjšal na 200 zahtevkov.

*Mešani vzorci:* Ustvarjeni so bili različni mešani vzorci:

- Vzorec 3: Ohranil je stabilno razmerje med zahtevki različnih vzorcev.
- Vzorec 4: Začel je z višjim razmerjem zahtevkov z dolgim repom, vendar se je premaknil proti višjemu razmerju zahtevkov s kratkim repom.
- Vzorec 5: Pokazal je nenadno spremembo razmerja v zadnjih dveh zavarovalnih letih.



Slika 2. Sintetični podatki Vzorca 1 na levi in Vzorca 2 na desni.

#### 4. Rezultati.

Osnovna trikotna metoda, metoda veriženja, je bila uporabljena za ocenjevanje kakovosti napovedi ANN. Ocenjevanje je upoštevalo celotno oceno rezerv v primerjavi z dejansko vrednostjo neplačanih zahtevkov, celotno napako posameznih končnih plačanih zahtevkov in kako so bile napake razdeljene po letu nesreče.



Slika 3. Končna vrednost zahtevkov (Ultimates), kot so napovedovali metoda veriženja (CL) in ANN, v primerjavi z originalno simuliranimi vrednostmi za tretji vzorec.

**4.1. Primerjava napovedi metode veriženja in ANN.** Ko so uporabljali samo plačane zahteve, je ANN pokazal dobro prileganje brez kakršne koli transformacije podatkov. Vsi ANN-ji so imeli eno skrito plast z dvema nevronoma. ANN napoveduje posamezen vzorec za vsak zahtevek. S transformacijo podatkov v razmerja na podlagi kumulativno plačanih in izstopajočih zneskov zahtevkov so bile napovedi izboljšane. Za vzorec 2 (vzorec z dolgim repom s 4000 zahtevki) je ANN deloval dobro brez transformacije podatkov.

#### 4.2. Rezultati mešanih vzorcev.

*Vzorec 3* (Enakomerno porazdeljeni zahtevki z dvema vzorcema): Ta mešanica dveh osnovnih vzorcev je za ANN predstavljala izzive v zgodnjih letih po nesreči pri uporabi kumulativnih zneskov plačanih zahtevkov in izstopajočih zahtevkov kot vhodov. Vendar pa je ANN v nedavnih letih deloval dobro, zlasti ko podatki niso bili transformirani.

*Vzorec 4* (Postopno spreminjanje razmerja zahtevkov z dvema vzorcema): Metoda veriženja ni primerna za ocenjevanje končnih škod pri tem vzorcu s prikrito nehomogeno dinamiko, kar bi lahko povzročilo težave za zavarovalnice. Pri tem vzorcu se je pričakovalo boljše delovanje ANN. Dejansko so vse metode ANN zagotovile bližje napovedi kot metoda veriženja za ta vzorec.

*Vzorec 5* (Nenadna sprememba razmerja zahtevkov z dvema vzorcema): Pri nenadno spreminjajočem se razmerju zahtevkov so bili pričakovani podobni učinki kot pri vzorcu 4. Pričakovalo se je, da metoda veriženja ne bo delovala optimalno s takšnimi podatki, vendar je bilo upanje, da bo ANN prinesel boljše rezultate. Tudi v tem primeru so vse metode ANN zagotovile bližje napovedi kot metoda veriženja.

#### Viri

[1] Harej, B., Gächter, R., Jamal, S., 2017. Individual claim development with machine learning. [http://www.actuaries.org/ASTIN/Documents/ASTIN\\_ICDML\\_WP\\_Report\\_final.pdf](http://www.actuaries.org/ASTIN/Documents/ASTIN_ICDML_WP_Report_final.pdf)

31

## Linearizacija viskoelastičnosti

**Avtor:** Martin Jesenko<sup>1</sup>

**Soavtorji:** Patrick Dondl ; Martin Kružík ; Jan Valdman

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, IMFM

**Povzetek.** V tem prispevku želimo na kratko predstaviti teoretični del članka [3]. Obravnavamo problem iz nelinearne viskoelastičnosti po Kelvin-Voigtovem reološkem modelu. Možen pristop je diskretizacija po času, kar nas privede do zaporedja ekstremalnih problemov. Iz njihovih lastnosti bi pričakovali hitro oscilatorno obnašanje rešitev, česar pa poskusi ne potrjujejo. Naša domneva je, da je treba zaradi efektov disipacije iskati naslednji približek v okolici prejšnjega, ne pa globalno. Zato bomo definirali lokaliziran ekstremalni problem ter zanj pokazali, da je rešljiv in da je dobra aproksimacija prvotnega. V članku [3] se nahajajo tudi numerični poskusi, ki kažejo na dobro ujemanje rezultatov.

### 1. Kelvin-Voigtov reološki model

Če zanemarimo inercialne učinke, položaj  $y : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  nelinearnega viskoelastičnega sredstva v Kelvin-Voigtovem reološkem modelu določa naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \Sigma(\nabla y, \nabla \dot{y}) &= f \text{ na } [0, T] \times \Omega, \\ \Sigma(\nabla y, \nabla \dot{y})n &= g \text{ na } [0, T] \times \Gamma_N, \\ y &= y_D \text{ na } [0, T] \times \Gamma_D, \\ y(0, \cdot) &= y^0 \text{ na } \Omega. \end{aligned}$$

Pri tem je

- $\Sigma : \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$  napetostni tenzor,
- $[0, T]$  časovni interval procesa,
- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ali  $d = 3$ ) gladko omejeno območje, ki določa referenčno konfiguracijo,
- $\Gamma_D \cup \Gamma_N$  disjunktne particije roba  $\partial\Omega$  z zunanjo normalo  $n$ , pri čemer ima  $\Gamma_D$  pozitivno  $(d - 1)$ -dimenzionalno Hausdorffovo mero,
- $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  gostota volumenskih sil,
- $g : [0, T] \times \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^d$  gostota površinskih sil.

Predpisane so tudi robne vrednosti  $y_D : [0, T] \times \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}^d$  in začetne vrednosti  $y^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

## 2. Napetostni tenzor

Napetostni tenzor  $\Sigma$  je pri viskoelastičnosti odvisen tako od gradienta deformacije  $\nabla y$  kot tudi od gradienta njene hitrosti  $\nabla \dot{y}$ . Razdelimo ga na tenzor elastičnosti  $\sigma$  in tenzor disipacije  $\tau$  z definicijama

$$\sigma(F) = \Sigma(F, 0) \quad \text{in} \quad \tau(F, \dot{F}) = \Sigma(F, \dot{F}) - \Sigma(F, 0),$$

tako da je

$$\Sigma(F, \dot{F}) = \sigma(F) + \tau(F, \dot{F}).$$

Predpostavimo obstoj potencialov

$$\sigma(F) = \partial_F W(F) \quad \text{in} \quad \tau(F, \dot{F}) = \partial_{\dot{F}} R(F, \dot{F}).$$

Fizikalno upravičene so naslednje predpostavke za funkcijo shranjene elastične energije  $W$ :

- $W$  je gladka na množici matrik s pozitivno determinanto  $\text{GL}_+(d)$ ,
- $W(QF) = W(F)$  za vse  $F \in \mathbb{R}^{d \times d}$  in vse rotacije  $Q \in \text{SO}(d)$ ,
- $W(F) \geq c(-1 + |F|^p)$  za neka  $c > 0$  in  $p > 1$  ter vse  $F \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,
- $W(F) = +\infty$ , če  $\det F \leq 0$ , in  $\lim_{\det F \rightarrow 0} W(F) = +\infty$ .

Dopusten potencial disipacije mora zadoščati naslednji invarianci:

$$R(F, \dot{F}) = R(QF, Q(\dot{F} + AF)) \quad \forall Q \in \text{SO}(d), \forall A \in \mathfrak{so}(d) = \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} : A^\top = -A\}$$

za vse  $F \in \text{GL}_+(d)$  in vse  $\dot{F} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ .

Z vidika modeliranja je bolj priročno predpostaviti obstoj globalne (gladke) kvazirazdalje

$$D : \text{GL}_+(d) \times \text{GL}_+(d) \rightarrow [0, \infty),$$

za katero je  $D(F, F) = 0$  za vse  $F \in \text{GL}_+(d)$ . Iz nje dobimo potencial  $R$  po formuli

$$R(F, \dot{F}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon^2} D^2(F + \varepsilon \dot{F}, F) = \frac{1}{4} \partial_{\dot{F}}^2 D^2(F, F)[\dot{F}, \dot{F}]$$

za  $F \in \text{GL}_+(d)$ ,  $\dot{F} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Za možne izbire za  $D$  glej npr. [2,5]. Tu bomo zaradi enostavnosti vzeli

$$D(F, G) = |F^\top F - G^\top G| \quad \text{in} \quad \text{posledično} \quad R(F, \dot{F}) = 2|\text{sym}(F^\top \dot{F})|^2.$$

## 3. Pretvorba v variacijski problem

Standardna metoda reševanja takih evolucijskih problemov je diskretizacija v času: Naj bo  $\tau > 0$  časovni korak, tako da je  $T/\tau \in \mathbb{N}$ . Pri podanem predhodnem  $y_\tau^{k-1}$  za  $k = 1, \dots, T/\tau$  iščemo  $y_\tau^k$ , ki zadošča naslednjim enačbam:

$$\begin{aligned} -\text{div} \left( \partial_F W(\nabla y_\tau^k) + \partial_{\dot{F}} R(\nabla y_\tau^k, \nabla \frac{y_\tau^k - y_\tau^{k-1}}{\tau}) \right) &= f_\tau^k := \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(s, \cdot) ds \quad \text{na } \Omega, \\ \left( \partial_F W(\nabla y_\tau^k) + \partial_{\dot{F}} R(\nabla y_\tau^k, \nabla \frac{y_\tau^k - y_\tau^{k-1}}{\tau}) \right) n &= g_\tau^k := \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} g(s, \cdot) ds \quad \text{na } \Gamma_N, \\ y_\tau^k &= y_D \quad \text{na } \Gamma_D. \end{aligned}$$

Zgornji problem lahko formalno prepisemo v naslednje zaporedje variacijskih problemov:

Za dani  $y_\tau^{k-1} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  z  $y_\tau^{k-1} = y_D$  na  $\Gamma_D$  minimiziraj

$$y \mapsto \int_{\Omega} W(\nabla y(x)) \, dx - \int_{\Omega} f_\tau^k(x) \cdot y(x) \, dx - \int_{\Gamma_N} g_\tau^k(x) \cdot y(x) \, dS + \\ + \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega} D^2(\nabla y(x), \nabla y_\tau^{k-1}(x)) \, dx$$

pod pogojem  $y \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ ,  $y = y_D$  na  $\Gamma_D$ ;  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  je prostor Soboljeva enkrat šibko odvedljivih funkcij, ki tako same kot njihov gradient ležijo v  $L^p$ .

#### 4. Direktna metoda variacijskega računa

Za dokaz obstoja ekstremov variacijskih problemov je standardni pristop *direktna metoda variacijskega računa*. Zato jo bomo spodaj na kratko predstavili.

Naj bo  $\mathcal{X}$  Banachov prostor in  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  navzdol omejen funkcional. Potem  $\mathcal{F}$  zagotovo doseže svoj minimum, če se dá izvesti naslednje tri korake:

- Poišči minimizirajoče zaporedje  $(u_j)_j$ , tako da  $\mathcal{F}(u_j) \rightarrow \inf \mathcal{F}$ .
- Pokaži, da  $(u_j)_j$  vsebuje podzaporedje, ki konvergira v primerni topologiji.
- Pokaži, da je  $\mathcal{F}$  v tej topologiji navzdol polzvezen.

Denimo, da je  $\mathcal{X}$  refleksiven in je  $\mathcal{F}$  koercitiven, to je  $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u) = \infty$ . Potem po izrekih Banach-Alaoglu in Eberlein-Šmuljan velja

$$\mathcal{F}(u_j) \leq C \Rightarrow \|u_j\| \leq C \Rightarrow \exists u_{j_k} \rightharpoonup u \text{ (v šibki topologiji)}.$$

Če pokažemo, da je  $\mathcal{F}$  po zaporedjih šibko navzdol polzvezen, potem

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{j_k}) = \inf \mathcal{F}.$$

Torej  $\mathcal{F}$  res doseže svoj minimum, in sicer v  $u$ .

Za integralske funkcionalne je znan potreben in zadosten pogoj za tako polzveznost:

**Izrek.** [4,1] Naj bo  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$  Carathéodoryjeva funkcija, ki zadošča

$$0 \leq f(x, u, X) \leq a(x) + C(|u|^p + |X|^p) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, X \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

za neke  $C > 0$ ,  $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$  in  $p > 1$ . Potem je funkcional

$$u \mapsto \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx$$

po zaporedjih šibko navzdol polzvezen na  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  natanko tedaj, ko je funkcija  $f$  kvazikonveksna v zadnjem argumentu.

**Opomba.** 1. Funkcija  $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , kjer je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$  neko območje, opremljeno z Lebesgueovo mero, je Carathéodoryjeva, če je funkcija  $f(x, \cdot)$  zvezna za skoraj  $x \in \Omega$  in če je funkcija  $f(\cdot, \xi)$  merljiva za vse  $\xi \in \mathbb{R}^N$ . V izreku zgoraj je  $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

2. Lokalno omejena Borelova funkcija  $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  je kvazikonveksna, če

$$\int_{(0,1)^n} f(X + \nabla \varphi(x)) \, dx \geq f(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \varphi \in C_c^\infty((0,1)^n; \mathbb{R}^m).$$

#### 5. Linearizacija viskoelastičnosti

Vrnimo se k našemu variacijskemu problemu. Če zanemarimo sile ( $f = 0$ ,  $g = 0$ ), iščemo minimizatorje funkcionala

$$y \mapsto \int_{\Omega} \left( W(\nabla y(x)) + \frac{1}{2\tau} D^2(\nabla y(x), \nabla y_\tau^{k-1}(x)) \right) \, dx.$$

Funkcija  $F \mapsto D(F, G)$  za fiksen  $G$  ni kvazikonveksna. Zato bi iz izkušenj z drugimi funkcionali s tem defektom pričakovali, da se bodo v sredstvu tvorile mikrostrukture za približevanje infimumu. Vendar noben poskus tega ne pokaže. To nas privede do domneve, da je zaradi učinka disipacije dovolj energijski funkcional minimizirati v majhni okolici prejšnjega stanja in ne globalno.

Če pišemo  $y_\tau^k = y_\tau^{k-1} + \tau z_\tau^k$ , problem pretvorimo v iskanje minimizatorja  $z_\tau^k$  funkcionala

$$z \mapsto \int_{\Omega} \left( W(\nabla y_\tau^{k-1}(x) + \tau \nabla z(x)) + \frac{1}{2\tau} D^2(\nabla y_\tau^{k-1}(x) + \tau \nabla z(x), \nabla y_\tau^{k-1}(x)) \right) dx.$$

Definirajmo za primeren  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  in poljuben  $\tau > 0$  funkcional

$$\mathcal{F}_{y,\tau}(z) := \int_{\Omega} \left( \frac{W(\nabla y(x) + \tau \nabla z(x)) - W(\nabla y(x))}{\tau} + \frac{D^2(\nabla y(x) + \tau \nabla z(x), \nabla y(x))}{2\tau^2} \right) dx.$$

Torej želimo poiskati minimizator funkcionala  $\mathcal{F}_{y_\tau^{k-1},\tau}$ . Ker je  $\tau$  majhen, si za fiksen  $y$  oglejmo limito  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{F}_{y,\tau}$ .

Pišimo  $Y := \nabla y(x)$  in  $Z := \nabla z(x)$  in predpostavimo  $\det Y \geq c > 0$  in  $|Y|, |Z| \leq M < \infty$ . Iz gladkosti funkcije  $W$  sledi, da je

$$\frac{1}{\tau} (W(Y + \tau Z) - W(Y)) = \partial_F W(Y) : Z + o(\tau);$$

z  $A : B = \text{Sled}(B^\top A)$  označujemo Frobeniusov skalarni produkt matrik. Disipativni člen pa lahko ocenimo kot

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau^2} D(Y + \tau Z, Y)^2 &= \frac{1}{2\tau^2} |(Y + \tau Z)^\top (Y + \tau Z) - Y^\top Y|^2 \\ &= \frac{1}{2} |Z^\top Y + Y^\top Z + \tau Z^\top Z|^2 = 2|\text{sym}(Y^\top Z)|^2 + o(\tau). \end{aligned}$$

To nas privede do naslednjega rezultata:

**Lema.** Naj bo  $y \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  z  $\det \nabla y \geq c > 0$ . Funkcional  $\mathcal{F}_{y,\tau}$  je moč na množici  $\{z \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d) : \|\nabla z\|_{L^\infty} \leq M\}$  enakomerno aproksimirati s funkcionalom

$$\mathcal{F}_y(z) = \int_{\Omega} (\partial_F W(\nabla y(x)) : \nabla z(x) + 2|\text{sym}((\nabla y(x))^\top \nabla z(x))|^2) dx$$

tako, da je

$$|\mathcal{F}_{y,\tau}(z) - \mathcal{F}_y(z)| \leq \tau C,$$

kjer je konstanta  $C$  odvisna le od  $\Omega, \|\nabla y\|_{L^\infty}, c, M$  in  $W$ .

Oglejmo si limitni funkcional  $\mathcal{F}_y$ . Naj bo  $d = 3$  in izberimo  $y \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  tako da  $\inf_{x \in \Omega} \det \nabla y(x) > 0$ . Ugotoviti želimo, ali ima  $\mathcal{F}_y$  želene lastnosti za uporabo direktne metode. Funkcija pod integralom je očitno kvazikonveksna v spremenljivki  $\nabla z$ , saj je celo konveksna. Ni pa jasno dvojje:

- Na prvi pogled se zaradi prisotnosti prvega člena  $\partial_F W(\nabla y(x)) : \nabla z(x)$  zdi, da  $\mathcal{F}_y$  sploh ni navzdol omejen.
- Kvadratni člen ni v celoti koercitiven, saj za poševno simetrične  $(\nabla y(x))^\top \nabla z(x)$  velja

$$2|\text{sym}((\nabla y(x))^\top \nabla z(x))|^2 = 0.$$

Najprej pokažimo omejenost navzdol.

Iz odvedljivosti in invariantnosti funkcije  $W : \text{GL}_+(d) \rightarrow \mathbb{R}$  za rotacije hitro sledi, da je  $U^{-1} \partial_F W(U)$  simetrična za vsako matriko  $U \in \text{GL}_+(d)$ . Integrand je enak  $\partial_F W(Y) : Z + 2|\text{sym}(Y^\top Z)|^2$ , kjer uporabimo enake oznake kot zgoraj. Glede na to, da je  $Y^{-1} \partial_F W(Y)$  simetrična, za vsak  $Z \in \mathbb{R}^{d \times d}$  velja

$$\partial_F W(Y) : Z = Y Y^{-1} \partial_F W(Y) : Z = Y^{-1} \partial_F W(Y) : Y^\top Z = Y^{-1} \partial_F W(Y) : \text{sym}(Y^\top Z).$$

Torej je integrand kvadratna forma matrike  $\text{sym}(Y^\top Z)$  in zato navzdol omejen.

Lotimo se še koercitivnosti.



Gre za podobno vprašanje kot pri linearni elastičnosti. Tam imamo spodnjo mejo oblike

$$\mathcal{F}(u) \geq C_1 \|\operatorname{sym} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C_2.$$

Znano je, da v jedru operatorja  $\operatorname{sym} \nabla$  ležijo natanko polja infinitezimalnih togih pomikov:

$$\operatorname{sym} \nabla u = 0 \iff u(x) = a + Ax \text{ za neka } a \in \mathbb{R}^d \text{ in } A \in \mathfrak{so}(d).$$

Dejansko so ta tudi edina, ki nam res delajo težave, saj velja Kornova neenakost v naslednji obliki:

Na vsakem podprostoru  $U \subset W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ , za katerega je  $U \cap \ker \operatorname{sym} \nabla = \{0\}$ , velja

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\operatorname{sym} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in U.$$

Primer takega podprostora je tudi množica funkcij z ničelno vrednostjo na delu roba  $\{u : u|_{\Gamma_D} = 0\}$ .

V našem primeru potrebujemo posplošitev teh rezultatov, ki jih najdemo v [6]. Po analogiji najprej določimo jedro pripadajočega operatorja. Pri zgoraj navedenih predpostavkah o funkciji  $y$  velja

$$\operatorname{sym}((\nabla y)^\top \nabla z) = 0 \iff z(x) = a + Ay(x) \text{ za neka } a \in \mathbb{R}^3 \text{ in } A \in \mathfrak{so}(3).$$

Označimo to jedro z  $\mathcal{N}_y$ . Velja tudi pripadajoča posplošena Kornova neenakost:

Za vsak podprostor  $U \subset W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  z  $U \cap \mathcal{N}_y = \{0\}$  obstaja konstanta  $C > 0$ , tako da

$$\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\operatorname{sym}((\nabla y)^\top \nabla z)\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall z \in U.$$

## 6. Obstoj minimizatorjev

Limitni funkcional ima željene lastnosti, tako da lahko zapišemo in dokažemo

**Izrek.** Za dani  $y \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$  z  $\det \nabla y > 0$  definiramo funkcional

$$\mathcal{F}_y(z) = \int_{\Omega} (\partial_F W(\nabla y(x)) : \nabla z(x) + 2|\operatorname{sym}((\nabla y(x))^\top \nabla z(x))|^2) dx.$$

- a) Funkcional  $\mathcal{F}_y$  doseže na vsakem podprostoru  $U \subset W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  z  $U \cap \mathcal{N}_y = \{0\}$  svoj minimum v natanko eni funkciji. Tak podprostor je tudi  $U = \{z \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3) : z|_{\Gamma_D} = 0\}$  za neko gladko podmožico  $\Gamma_D \subset \partial\Omega$  z  $\mathcal{H}^2(\Gamma_D) > 0$ .
- b) Na celotnem  $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  minimizatorji  $\mathcal{F}_y$  obstajajo in so enolični do prištevanja elementov iz  $\mathcal{N}_y$ .

*Dokaz.* Naj bo  $U$  podprostor z  $U \cap \mathcal{N}_y = \{0\}$ . Funkcional  $\mathcal{F}_y$  je strogo konveksen na  $U$ , saj je za dani  $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  funkcija

$$f_Y(Z) = Y^{-1} \partial_F W(Y) : \operatorname{sym}(Y^\top Z) + 2|\operatorname{sym}(Y^\top Z)|^2$$

kompozitum linearne funkcije  $Z \mapsto \operatorname{sym}(Y^\top Z)$  in funkcije  $X \mapsto Y^{-1} \partial_F W(Y) : X + 2|X|^2$ , ki je strogo konveksna. Ker iz posplošene Kornove in Poincaréjeve enačbe sledi koercitivnost

$$\mathcal{F}_y(z) \geq C \|\operatorname{sym}((\nabla y)^\top \nabla z)\|_{L^2(\Omega)} - C \geq C \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} - C \geq C \|\nabla z\|_{W^{1,2}(\Omega)} - C,$$

obstaja na  $U$  enoličen minimizator  $z_U$ .

Po točki (a) obstaja enoličen minimizator  $z_{\mathcal{N}_y^\perp}$  na  $\mathcal{N}_y^\perp$ . Množica vseh minimizatorjev na  $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$  je torej  $z_{\mathcal{N}_y^\perp} + \mathcal{N}_y$ .  $\square$

## 7. Sklep

Ogledali smo si primer modeliranja viskoelastičnega sredstva. Iskanje rešitev smo formulirali v obliki zaporedja variacijskih problemov. S pomočjo linearizacije smo dobili enostavnejši problem, za katerega smo pokazali, da ima pri predpisanih robnih vrednostih enolično rešitev. V članku [3] je tudi poročilo o numeričnih rezultatih, ki kažejo, da lineariziran problem dobro aproksimira prvotnega.

**Viri**

- [1] E. Acerbi, N. Fusco. *Semicontinuity problems in the calculus of variations*. Arch. Rational Mech. Anal., 86(2) (1984), 125–145
- [2] S. S. Antman. *Physically unacceptable viscous stresses*. Z. Angew. Math. Phys., 49(6) (1998), 980–988
- [3] P. Dondl, M. Jesenko, M. Kružík, J. Valdman. *Linearization and computation for large-strain viscoelasticity*. Math. Eng. 5(2), (2023), Paper No. 030
- [4] N. G. Meyers. *Quasi-convexity and lower semi-continuity of multiple variational integrals of any order*. Trans. Amer. Math. Soc., 119 (1965), 125–149,
- [5] A. Mielke, C. Ortner, and Y. Şengul. *An approach to nonlinear viscoelasticity via metric gradient flows*. SIAM J. Math. Anal., 46(2) (2014), 1317–1347,
- [6] P. Neff. *On Korn's first inequality with non-constant coefficients*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 132(1) (2002), 221–243

57

**On Laplacians on infinite metric graphs****Avtor:** Aleksey Kostenko<sup>1</sup>**Soavtorja:** Delio Mugnolo, Noema Nicolussi<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Laplacian operators on graphs have a long history and enjoy deep connections to numerous branches of mathematics and mathematical physics. Laplacians on metric graphs, which are also widely known as quantum graphs, got a lot of attention during the last decades as simplified models of complicated quantum systems.

The main focus in this talk was on the self-adjointness problem (a.k.a. quantum completeness) for the corresponding Laplacian. More specifically, we discussed the relationship between one of the classical notions of boundaries for infinite graphs, graph ends, and self-adjoint extensions of the minimal Kirchhoff Laplacian on a metric graph.

**Predstavitel plakotov (raziskovalno–aplikativna sekcija) / 44****Stohastični individualni razvoj škod****Avtor:** Enej Kovač<sup>1</sup><sup>1</sup> študent UL FMF

Tako kot večina podjetij, tudi zavarovalnice poslujejo v negotovem svetu. Ena izmed glavnih negotovosti, s katero se srečujejo, je višina škodnih zahtevkov, ki jih morajo izplačati. Večino sredstev za izplačila predstavljajo zbrane premije. Ker so premije obračunane pred nastankom škodnega dogodka, zavarovalnice del teh sredstev »rezervirajo« za izplačilo škodnih zahtevkov. Te rezervacije se v neživljenjskih zavarovanjih v grobem delijo na prenosno premijo in škodne rezervacije.

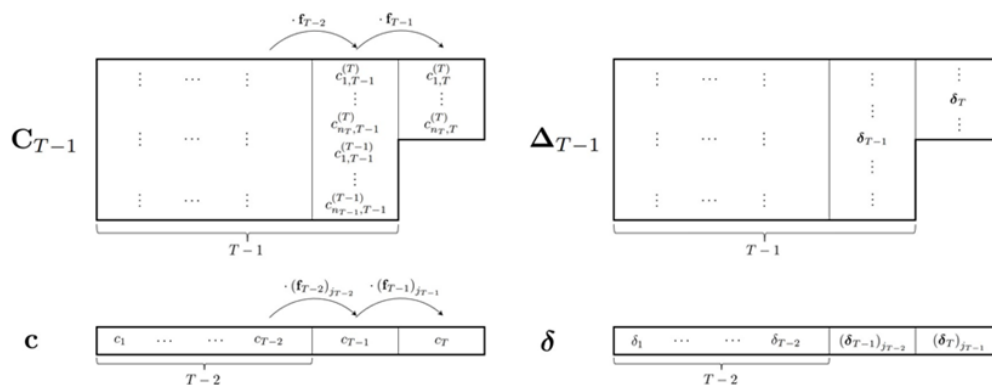
Prenosna premija predstavlja del premije, ki še ni bil zaslužen. Premije so namreč plačane vnaprej, zavarovalne pogodbe pa nudijo zavarovalno kritje za določeno obdobje. Prenosna premija v določenem trenutku je torej del premije, ki ustreza prihodnjemu, še ne iztečenemu obdobju zavarovalnega kritja.

Izračun škodnih rezervacij je bolj kompleksen. Škodne rezervacije za razliko od prenosne premije predstavljajo sredstva, ki so namenjena plačilu škodnih zahtevkov, ki so se že zgodili. Ti zahtevki

so bili lahko zavarovalnici že prijavljeni, lahko pa tudi ne. Za prijavljene zahtevke zavarovalnica ob prijavi oceni znesek, ki ga bo morala izplačati za ta zahtevek. Od prijave in ocene višine zahtevka lahko nato do končnega izplačila preteče nekaj časa, končno izplačilo pa se lahko od prvotne ocene precej razlikuje. Spreminjanju ocene skozi čas včasih pravimo tudi »razvoj škode«. Razvoj škod je pomemben predvsem pri bolj kompleksnih škodah (ali pozavarovalnih škodah, kjer pozavarovalne pogodbe krijejo skupino oziroma portfelj zavarovalnih pogodb), za katere je končno višino težje oceniti. Spremembe v višini ocen za že prijavljene škode predstavljajo prvo komponento škodnih rezervacij.

Druga komponenta škodnih rezervacij pa so sredstva, namenjena kritju škodnih zahtevkov, ki so se že zgodili, a še niso bili prijavljeni zavarovalnici. Razlogov za zamike pri prijavi zahtevkov je lahko več. Na primer, obseg škode je lahko znan šele potem, ko preteče nekaj časa (npr. ugotavljanje obsega poškodb po prometni nesreči). Ta del škodnih rezervacij je predvsem težko oceniti, saj zavarovalnica ne ve niti, koliko škodnih zahtevkov bo prijavljenih, niti ne pozna njihovih lastnosti.

Metod za izračun škodnih rezervacij je veliko. Klasične, najstarejše metode so deterministične in namenjene predvsem izračunu točkovne ocene. Takšna ocena je najboljša možna, ne da pa občutka, do kakšnih odstopanj v praksi lahko pride. V tem primeru ponudijo koristne rezultate metode, ki uporabljajo stohastični pristop in tako omogočajo boljše razumevanje porazdelitve rezervacij. Spomnimo, da višina rezervacij ne more biti znana z gotovostjo, saj je končna višina škod neznana. Oba omenjena pristopa po navadi temeljita na agregatnih podatkih celotnega portfelja. Ker se pri agregiranju nekaj informacij izgubi, nekatere metode uporabljajo individualni pristop. To pomeni, da uporabljajo individualne podatke in rezervacije izračunajo za individualne škode. Individualni pristop, sploh zaradi hitrega razvoja algoritmov, vedno pogosteje sloni na uporabi strojnega učenja. Metode, ki temeljijo na individualnem pristopu, povečini izračunajo le najboljšo oceno rezervacij, ne dajo pa nam občutka o njihovi porazdelitvi.

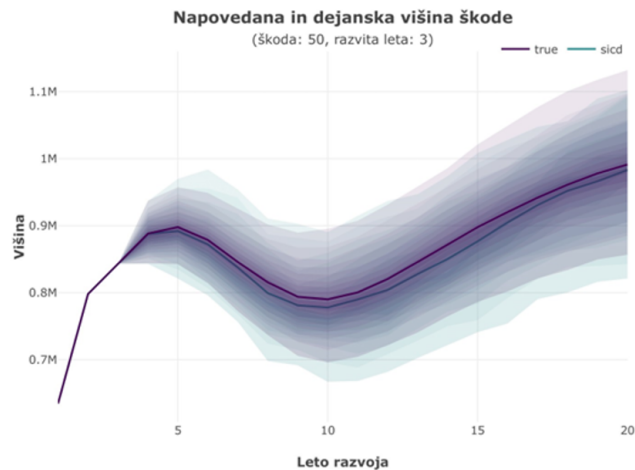


Slika 1: Napovedovanje razvoja škode z algoritmom SICD

Magistrsko delo Stohastični individualni razvoj škod se omeji na škodne rezervacije za že prijavljene škode in predlaga metodo za njihov izračun. Metoda hkrati sledi tako individualnemu kot tudi stohastičnemu pristopu in tako združuje prednosti obeh. S pomočjo informacij preteklih škod oblikuje stohastične napovedi razvojev individualnih škod. Pri tem, za razliko od večine metod, uporablja informacije o likvidiranih in tudi nastalih vrednosti. To omogoča, da napovedi poleg končnih višin škod vključujejo tudi pripadajoče razvoje likvidiranih in nastalih vrednosti. Metoda je implementirana v obliki algoritma, bolj podrobno opisanega v nadaljevanju. Algoritem je nekakšna posplošitev metode veriženja - ene izmed najbolj znanih metod za izračun rezervacij. Za napovedovanje razvoja škod podobno iterativno uporablja razvojne faktorje, razlika pa je v tem, da uporablja faktorje individualnih škod, ter da med njimi stohastično izbira. Pri tem je verjetnost izbire odvisna od podobnosti med škodami. Zamislimo si škodo, ki se še razvija. Ideja algoritma je, da poskuša za preteklo, bolj razvite škode določiti, kako podobne so dani škodi. Podobnost določi glede na neko razdaljo med škodami, ki jo poskuša smiselno kvantificirati. Da bi bil izračun rezervacij stohastičen, omenjene razdalje pretvori v verjetnostno porazdelitev. Ta pove, kako verjetno bo napovedan razvoj škode sledil vzorcu določene pretekle škode. Ta ideja je prikazana na sliki 1. Na sliki so prikazani razvoji preteklih škod ter trenutno znan razvoj škode, katere razvoj poskuša algoritem napovedati. Matrika  $C_{T-1}$  predstavlja razvoje nastalih vrednosti preteklih škod, matrika  $\Delta_{T-1}$  pa pripadajoče likvidirane deleže. Podobno  $c$  in  $\delta$  predstavljata za posamezno škodo. Algoritem razdalje med škodami izračuna glede na trenutno znan razvoj. Te razdalje pretvori v verjetnostno porazdelitev na preteklih škodah in nato eno izmed njih naključno izbere. Pripadajoči razvojni faktor nastalih vrednosti

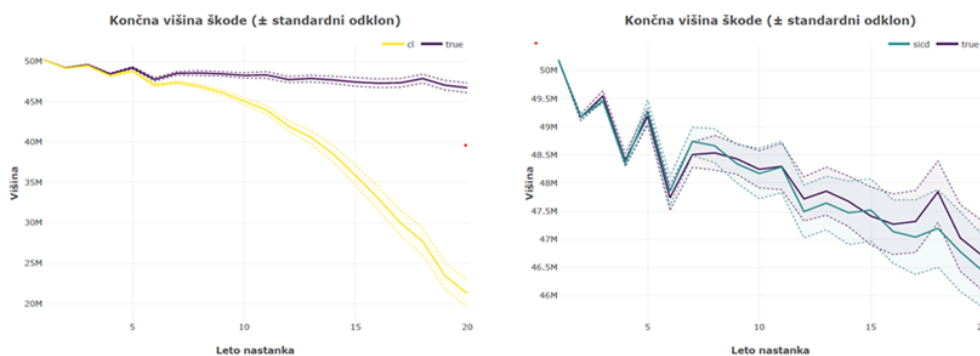
$(f_{T-2})_{j_{T-2}}$  in likvidiran delež  $(\delta_{T-2})_{j_{T-2}}$  uporabi pri napovedovanju razvoja v naslednjem koraku. Postopek ponavlja, dokler razvoj škode ni zaključen.

Tako algoritem napove eno možno realizacijo prihodnjega razvoja škode. Algoritem postopek ponavlja in napove več možnih realizacij. Tako dobi stohastično napoved prihodnjega razvoja posamezne škode. Napovedi posameznih škod za vsako od realizacij lahko združi in dobi stohastično oceno razvoja škod in rezervacij celotnega portfelja. Primer napovedi razvoja posamezne škode prikazuje slika 2.



Slika 2: Primer razvoja posamezne škode

Napovedi algoritma so ovrednotene na sintetičnih portfeljih z različnimi sestavami. Portfelji vsebujejo škode dveh različnih tipov, vsako škodo pa predstavljata simulirana razvoja likvidiranih in nastalih vrednosti. Izhodišče za primerjavo so dejanske vrednosti sintetičnih podatkov ter napovedi metode veriženja. Ta izbira metode nam omogoča primerjavo tako točkovnih ocen kot tudi njihovih porazdelitev. V primeru homogenih portfeljev so napovedi obeh omenjenih metod primerljive s pravimi vrednostmi sintetičnih podatkov. Ker pa predlagana metoda uporablja informacije individualnih škod, so njene napovedi precej boljše v primeru nehomogenih portfeljev.



Slika 3: Končne višine škod in standardni odklon napovedi

Primer primerjave za nehomogen portfelj prikazuje slika 3. Glede na leto nastanka škod so prikazane napovedane in prave vrednosti končnih višin škod celotnega portfelja, ter ocenjenega standardnega odklona napovedi. Na levi strani so z rumeno barvo prikazane napovedi metode veriženja, z vijolično barvo pa prave vrednosti sintetičnega portfelja. Podobno so na desni strani z modro barvo prikazane napovedi predlaganega algoritma. V tem primeru so napovedi algoritma mnogo boljše kot napovedi metode veriženja.

Omenimo še, da se algoritem kljub fiksnim vrednostim parametrov, na vseh sintetičnih portfeljih izkaže relativno dobro. Zaradi robustnih napovedi je lahko uporaba v praksi precej bolj enostavna. Pomembna lastnost predlaganega algoritma je tudi možnost interpretacije njegovih napovedi. Intuitivno delovanje algoritma SICD omogoča, da so napovedi veliko bolj razumljive kot pri večini

kompleksnih algoritmov strojnega učenja. Uporaba algoritma je tako lahko koristna iz dveh razlogov. Prvi je, da so lahko njegove napovedi, kljub neizpolnjenim predpostavkam klasičnih metod, korektne. Drugi razlog pa je, da lahko, kljub uporabi klasičnih metod, vseeno služi kot alternativna ocena možne višine rezervacij.

#### Viri

- [1] B. Harej, R. Gächter in S. Jamal, Individual claim development with machine learning (2017), [ogled: 9.6.2022], dostopno na: [https://www.actuaries.org/astin/documents/astin\\_icdml\\_wp\\_report\\_final.pdf](https://www.actuaries.org/astin/documents/astin_icdml_wp_report_final.pdf)
- [2] T. Mack, Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates, ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA 23(2), (1993) 213–225
- [3] M. Merz in M. Wüthrich, Modelling the claims development result for solvency purposes, Casualty Actuarial Society E-Forum (Fall 2008), 542–568
- [4] I. Goodfellow, Y. Bengio in A. Courville, Deep Learning, MIT Press, 2016

46

## Parcialne preslikave, polgrupe in teorija dualnosti

**Avtorica:** Ganna Kudryavtseva<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

### 1. Parcialne preslikave ter regularne in inverzne polgrupe

Spomnimo se, da množico  $S$  z asociativno binarno operacijo imenujemo *polgrupa*. Pomemben primer polgrupe je polgrupa  $\mathcal{PT}(X)$  vseh preslikav  $X \rightarrow X$  (kjer je  $X$  neprazna množica) z operacijo komponiranja preslikav. Polgupo  $S$  imenujemo *regularna*, če za vsak  $a \in S$  obstaja  $b \in S$ , da velja  $a = aba$ . Potem za  $a$  in  $c = bab$  velja  $aca = a$  in  $cac = c$ , torej sta si  $a$  in  $c$  *inverzna*. Polgrupa  $\mathcal{PT}(X)$  je regularna, čeprav imajo lahko njeni elementi več različnih inverzov.

Polgrupo  $S$  imenujemo *inverzna polgrupa*, če ima vsak njen element natanko en inverz. Prototip inverzne polgrupe je polgrupa  $\mathcal{I}(X)$ , katere elementi so vse injektivne parcialne preslikave  $X \rightarrow X$ , torej injektivne preslikave  $f: Y \rightarrow X$ , kjer je  $Y \subseteq X$ . Množico  $Y$  imenujemo *domena*  $f$  in pišemo  $Y = \text{dom}(f)$ . Množico  $f(Y)$  pa imenujemo *slika*  $f$  in pišemo  $f(Y) = \text{ran}(f)$ . Preslikava  $f$  je potem bijekcija med  $\text{dom}(f)$  in  $\text{ran}(f)$ , ki ji pravimo *parcialna permutacija* množice  $X$ . Za parcialno permutacijo  $f: \text{dom}(f) \rightarrow \text{ran}(f)$  je njen edini inverz kar inverzna bijekcija  $f^{-1}: \text{ran}(f) \rightarrow \text{dom}(f)$ . Inverzno polgrupo  $\mathcal{I}(X)$  imenujemo *simetrična inverzna polgrupa* na  $X$ . Če je  $X = [n]$  pišemo  $\mathcal{I}_n$  namesto  $\mathcal{I}(X)$ . Wagner-Prestonov izrek pravi, da lahko vsako inverzno polgrupo  $S$  vložimo v neko simetrično inverzno polgrupo, in sicer v  $\mathcal{I}(S)$ .

Element  $e$  polgrupe  $S$  se imenuje *idempotent*, če je  $e^2 = e$ . Da se pokazati, da je polgrupa  $S$  inverzna natanko tedaj, ko je regularna in njeni idempotenti komutirajo. Množica idempotentov  $E(S)$  tako tvori *polmrežo*, torej idempotentno in komutativno polgrupo. V simetrični inverzni polgrupi  $\mathcal{I}(X)$  so idempotenti oblike  $\text{id}_A$ , kjer je  $A \subseteq X$ . Vidimo, da ima inverzna polgrupa lahko veliko idempotentov, za razliko od grup, ki so natanko inverzne polgrupe z enim samim idempotentom. *Naravna delna urejenost* na inverzni polgrupi  $S$  je definirana z  $a \leq b$ , če je  $a = be$  za neki idempotent  $e$ . Če sta  $f, g \in \mathcal{I}(X)$ , velja neenakost  $f \leq g$  natanko takrat, ko je  $f$  *zožitev*  $g$  na neko podmnožico, vsebovano v  $\text{dom}(g)$ .

Elemente  $\mathcal{I}_n$  lahko upodobimo s *trdnjavnimi matrikami*, torej z 0-1 matrikami dimenzije  $n$ , katerih vsak stolpec in vsaka vrstica vsebuje kvečjemu eno enico. Parcialni permutaciji  $f: [n] \rightarrow [n]$  priredimo 0-1 matriko  $A_f$  z  $a_{ij} = 1$  natanko tedaj, ko je  $f(j) = i$ . Enostavno je videti, da trdnjavne  $n \times n$  matrike tvorijo inverzno polgrupo, ki je izomorfná  $\mathcal{I}_n$ . Zgornje trikotne trdnjavne matrike tvorijo podpolgrupo polgrupe trdnjavnih matrik, a niso zaprte za operacijo invertiranja in tako ne tvorijo inverzne podpolgrupe. Zaprte pa so za operaciji  $a \mapsto a^{-1}a$  in  $a \mapsto aa^{-1}$  in tako naletimo na naravni premer (dvostranske) omejitvene polgrupe (glej podrazdelek 2.2). Za več informacij o inverznih polgrupah bralcu priporičamo knjigi [13] in [16], o transformacijskih polgrupah lahko prebere v [4], za uvod v teorijo inverznih polgrup v slovenščini pa svetujemo članek [8].

## 2. Ehresmannove in omejitvene polgrupe

V tem razdelku definiramo Ehresmannove in omejitvene polgrupe, ki so centralni objekt nadaljnjih razdelkov.

**2.1. Ehresmannove polgrupe.** Za neprazno množico  $X$  naj bo  $\mathcal{B}(X)$  polgrupa vseh binarnih relacij na  $X$ . Veljajo vključitve  $\mathcal{B}(X) \supseteq \mathcal{PT}(X) \supseteq \mathcal{I}(X)$ . Polgrupa  $\mathcal{B}(X)$  ima naravno involucijo  $f \mapsto f^{-1}$ , kjer je  $f^{-1}$  inverz relacije  $f$ , čeprav ta polgrupa ni regularna in potem seveda tudi ni inverzna. Vsaki binarni relaciji  $f$  lahko priredimo njeno *domensko relacijo*  $\rho^* = \{(x, x) : y \rho x \text{ za nek } y\}$  in *kodomensko relacijo*  $\rho^+ = \{(x, x) : x \rho y \text{ za nek } y\}$ . Elemente oblike  $\rho^+$  ali  $\rho^*$  imenujemo *projekcije*. Projekcije so idempotenti, a ni vsak idempotent projekcija. Polgrupa  $\mathcal{B}(X)$  je primer (dvostranske) *Ehresmannove polgrupe*, torej algebre  $(S, \cdot, *, +)$ , kjer je  $\cdot$  asociativna operacija in  $*$ ,  $+$  unarni operaciji, pri čemer veljajo aksiomi:

$$x^+x = x, \quad x^+y^+ = y^+x^+, \quad (x^+y)^+ = x^+y^+. \quad (3)$$

$$xx^* = x, \quad x^*y^* = y^*x^*, \quad (xy^*)^* = x^*y^*. \quad (4)$$

$$(x^+)^* = x^+, \quad (x^*)^+ = x^*.$$

Če je  $(S, \cdot, +)$  algebra, kjer je  $(S, \cdot)$  polgrupa,  $+$  unarna operacija in velja (3), je  $(S, \cdot, +)$  *leva Ehresmannova polgrupa*. Pojem *desne Ehresmannove polgrupe* je simetričen. Če je  $S$  leva Ehresmannova polgrupa, je množica

$$P(S) = \{x^+ : x \in S\}$$

polmreža, ki jo imenujemo *polmreža projekcij*. Če je  $S = \mathcal{B}(X)$  ali  $S = \mathcal{PT}(X)$ , je  $P(S)$  sestavljena iz vseh  $\text{id}_A$ ,  $A \subseteq X$ .

**2.2. Omejitvene polgrupe.** Če identitetam v definiciji leve (oz. desne) Ehresmannove polgrupe dodamo še

$$xy^+ = (xy)^+x \quad (\text{oz. } x^*y = y(xy)^*),$$

dobimo definicijo *leve (oz. desne) omejitvene polgrupe*. Za definicijo dvostranske omejitvene polgrupe dodamo obe identiteti. V omejitveni polgrupi  $S$  za vse  $a \in S$  in  $e \in P(S)$  veljata enakosti  $ea = a(ea)^*$  in  $ae = (ae)^+$ . Polgrupa  $\mathcal{PT}(X)$  je primer leve omejitveni polgrupe, ni pa desna omejitvena (če  $|X| \geq 2$ ). Vsako levo omejitveno polgrupo lahko vložimo v  $\mathcal{PT}(X)$ . Polgrupa zgornje trikotnih trdnjavnih matrik je omejitvena polgrupa. Vsaka inverzna polgrupa je omejitvena, kjer je  $a^+ = aa^{-1}$  in  $a^* = a^{-1}a$ , in  $P(S) = E(S)$ . Prav tako je vsak monoid omejitvena polgrupa z  $a^+ = a^* = 1$  za poljuben element  $a$ .

## 3. Teorija dualnosti

**3.1. Klasična Stonova dualnost.** Preden predstavimo lastne rezultate iz nekomutativnih posplošitev Stonove dualnosti, za lažje branje na kratko osvežimo klasične 'komutativne' rezultate.

Spomnimo se, da je vsaka končna Boolova algebra izomorfná potenčni množici neke množice, kar ne velja v neskončnem primeru, zato za opis neskončnih Boolovih algeber kot Boolovih algeber podmnožic potrebujemo pojem topološkega prostora. Spomnimo se, da je *lokalno kompaktni Stonov prostor* definiran kot lokalno kompakten 0-razsežen Hausdorffov prostor, ali, ekvivalentno, kot Hausdorffov prostor, kjer kompaktno-odprte množice tvorijo bazo topologije. *Stonov prostor* je lokalno kompaktni Stonov prostor, ki je kompakten. *Posplošena Boolova algebra* je distributivna mreža  $L$  z najmanjšim elementom 0, kjer za vsaka  $a, b \in L$  obstaja *relativen komplement*  $a \setminus b \in L$ , ki zadošča pogojema  $(a \setminus b) \wedge b = 0$  in  $(a \setminus b) \vee (a \wedge b) = a$ . *Boolova algebra* je posplošena Boolova algebra, ki ima največji element 1. V Boolovi algebri  $B$  lahko definiramo operacijo *komplementa*  $b^c = 1 \setminus b$  za vsak  $b \in B$ , potem velja  $b^c \wedge b = 0$  in  $b^c \vee b = 1$ . Relativen komplement v Boolovi algebri se izrazi preko komplementa kot  $a \setminus b = a \wedge b^c$ . Zato je Boolova algebra - komplementarna distributivna mreža z najmanjšim elementom 0 in največjim elementom 1.

Klasični izrek Marshalla Stona iz leta 1937 pravi, da je vsaka posplošena Boolova algebra izomorfná posplošeni Boolovi algebri vseh kompaktnih in odprtih podmnožic nekega lokalno kompaktnega Stonovega prostora. Tako je vsaka Boolova algebra izomorfná Boolovi algebri vseh zaprto-odprtih podmnožic nekega Stonovega prostora. V jeziku kategorij se klasična Stonova dualnost glasi tako.

**Izrek 1** (Klasična Stonova dualnost). *Kategorija posplošenih Boolovih algeber je dualno ekvivalentna kategoriji lokalno kompaktnih Stonovih prostorov.*

**3.2. Breztočkovna topologija.** *Breztočkovna topologija* preučuje mreže z lastnostmi, ki so podobne lastnostim mrež odprtih množic topoloških prostorov. Mreža  $L$  se imenuje:

- *sup-mreža*, če za vse  $x_i \in L, i \in I$ , obstaja natančna zgornja meja  $\bigvee_{i \in I} x_i \in L$ .
- *neskončno distributivna mreža* če za vse  $x_i \in L, i \in I$ , in  $y \in L$  velja:

$$y \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} (y \wedge x_i).$$

Neskončno distributivne sup-mreže imenujemo *okvirji*.

*Okoliši* tvorijo kategorijo, nasprotno kategoriji okvirjev. Če je  $L$  okoliš, z  $O(L)$  označujemo okvir 'odprtih množic' okoliša  $L$ , dejansko pa sta  $L$  in  $O(L)$  isti objekt. Morfizem med okoliši  $f: L_1 \rightarrow L_2$  je po definiciji podan z morfizmom okvirjev  $f^*: O(L_2) \rightarrow O(L_1)$ . Dualnost med okvirji in okoliši se omeji na naslednje dualnosti. Vse manjkajoče definicije in podrobnosti lahko bralec najde v knjigi [5].

- Kategorija prostorskih okvirjev je dualna kategoriji treznih prostorov.
- Kategorija koherentnih okvirjev je dualna kategoriji spektralnih prostorov.
- Kategorija distributivnih mrež je dualna kategoriji spektralnih prostorov.
- Kategorija posplošenih Boolovih algebr je dualna kategoriji lokalno kompaktnih Stonovih prostorov.
- Kategorija Boolovih algebr je dualna kategoriji Stonovih prostorov.

**3.3. Nekomutativne dualnosti.** Nekomutativni objekti, ki posplošijo okvirje, so *pseudogrupe*, torej inverzne polgrupe, katerih idempotenti tvorijo okvir in velja še dodaten pogoj, da ima vsaka kompatibilna družina elementov supremum. Primer pseudogrupe je simetrična inverzna polgrupa  $\mathcal{I}(X)$ . Bolj splošno lahko namesto inverznih polgrup obravnavamo (dvostranske) omejitvene polgrupe. Kljub večji splošnosti so slednje lažje za obravnavo, saj so dualne kategorijam, ki nimajo involucije, torej imajo manj strukture kot grupoidi. Ustrezne posplošitve pseudogrup so *polne omejitvene polgrupe*. V članku [12] je razvita teorija dualnosti za polne omejitvene polgrupe. Nekomutativne posplošitve okolišev so *étalne okoliške kategorije*, torej notranje kategorije v kategoriji okolišev. Značilnost nekomutativnega primera je, da so naravno vmes še druge algebraične objekte, ki jim rečemo *omejitveni kvantalni okvirji*. Če je podana étalna okoliška kategorija  $G = (G^1, G^0)$ , je  $O(G^1)$  okvir, ki ima dodatno strukturo. Abstraktna različica slednjih objektov so omejitveni kvantalni okvirji. Okvir  $O(G^1)$  z operacijo množenja odprtih množic in ustrezno definiranimi operacijama  $+$  in  $*$  ne tvori omejitvene polgrupe, tvori pa Ehresmannovo polgrupo. Zato so omejitveni kvantalni okvirji primer bolj splošnega pojma Ehresmannovega kvantalnega okvirja. Če se v  $O(G_1)$  omejimo le na posebne elemente, ki jim rečemo *parcialne izometrije*, le-ti tvorijo polno omejitveno polgrupo, ki jo priredimo dani okoliški étalni kategoriji. Obratno, če je podana polna omejitvena polgrupa  $S$ , definiramo  $S^\vee$  kot množico  $\vee$ -zaprtih urejenostnih idealov v  $S$ . Slednja tvori omejitveni kvantalni okvir, iz katerega lahko preidemo še do okoliške étalne kategorije. Na koncu dobimo naslednji izrek, ki je dokazan v članku [12] ter posploši in poenoti rezultate člankov [14,17].

**Izrek 2.** *Kategorija polnih omejitvenih polgrup je dualna kategoriji okoliških étalnih kategorij.*

Iz tega izreka podobno kot v komutativnem primeru lahko izpeljemo več posledic. Ena posledica je adjungiranost med kategorijo étalnih okoliških kategorij in kategorijo topoloških étalnih kategorij, ki posploši klasično adjungiranost med okoliši in topološkimi prostori. Kategorija Boolovih omejitvenih polgrup pa je dualna kategoriji étalnih topoloških grupoidov s Stonovim prostorom identitet. V posebnem, ko so kategorije grupoidi, na algebraični strani namesto omejitvenih polgrup dobimo inverzne polgrupe. Podrobnosti lahko bralec najde v članku [12]. Več podrobnosti o Boolovih inverznih polgrupah je v knjigi [19].

Vsaki inverzni polgrupi  $S$  lahko priredimo univerzalni Boolovi inverzni polgrupi  $B(S)$  in  $B_T(S)$ , ki ju imenujemo *univerzalna Booleanizacija* in *tesna Booleanizacija* polgrupe  $S$ . Izkaže se, da dualni grupoid za  $B(S)$  sovпада z *univerzalnim grupoidom* inverzne polgrupe  $S$ , dualni grupoid za  $B_T(S)$  pa s *tesnim grupoidom*  $S$ . O posplošitvi teh pojmov lahko bralec prebere v [9]. Slednja grupoida igrata ključno vlogo v teoriji Steinbergovih algebr [3] in grupoidnih  $C^*$ -algebr [15].

Oglejmo si naslednji primer. Definirajmo preslikavi  $a, b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  s predpisoma  $a(n) = 2n$  in  $b(n) = 2n - 1$ . Potem velja  $a^{-1}a = b^{-1}b = \text{id}_{\mathbb{N}}$ ,  $aa^{-1}bb^{-1} = 0$ ,  $aa^{-1} \vee bb^{-1} = \text{id}_{\mathbb{N}}$ . Elementa  $a$  in  $b$  generirata inverzni podmonoid  $\mathcal{P}_2 \vee \mathcal{I}(\mathbb{N})$ , znan kot *policiklični inverzni monoid* na dveh generatorjih. Če vzamemo  $n$  generatorjev  $a_1, \dots, a_n$ , za katere velja

$$a_i^{-1}a_j = \delta_{ij}1, \quad \bigvee_{i=1}^n a_i a_i^{-1} = 1,$$

dobimo policiklični inverzni monoid na  $n$  generatorjih. Izkaže se, da je tesna  $K$ -algebra monoida  $\mathcal{P}_n$  (kjer je  $K$  polje) izomorfná Leavittovi algebrí  $L = L_K(1, n)$ . Ta algebra ima modúlski tip  $(1, n)$ , torej je  $n$  najmanjše število  $m > 1$ , da je  ${}_L L \sim {}_L L^m$ . Klasični Leavittov izrek pove, da je algebra  $L_K(1, n)$  enostavna in je univerzalni (začetni) objekt za vse  $K$ -algebre modúlskega tipa  $(1, n)$ . Več podrobnosti lahko bralec najde v knjigi [1] in tudi v preglednem članku [18].

#### 4. Parcialna delovanja in strukturna teorija

V nadaljevanju bomo opisali nekaj lastnih prispevkov k strukturni teoriji inverznih, omejitvenih in Ehresmannovih polgrup, zlasti v povezavi s parcialnimi delovanji. V delu [2] smo našli naraven kombinatorični model za določene univerzalne  $F$ -inverzne monoide preko Cayleyjevih grafov pripadajočih grup. Ta temeljni rezultat posploši in združi dva klasična rezultata o Birget-Rhodesovi in Margolis-Meakinovi razširitvi grupe.  $F$ -inverzni monoidi tvorijo pomemben podrazred  $E$ -unitarnih inverznih polgrup, ki jih lahko opišemo kot poldirektne produkte grup in polmrež glede na parcialno delovanje grupe na polmreži s urejenostnimi avtomorfizmi med urejenostnimi ideali.

V članku [7] obravnavamo posplošitev Birget-Rhodesove grupne razširitve na monoide in definiramo družino univerzalnih razširitev monoidov, ki so dvostranski omejitveni monoidi. V posebnem primeru, ko je parcialno delovanje močno in ko je monoid grupa, pa sovpadajo s klasično Birget-Rhodesovo razširitvjo. Ker so konstruirane razširitve prave, dopuščajo koordinatizacijo preko parcialnega delovanja monoida na neki polmreži s urejenostnimi avtomorfizmi med urejenostnimi ideali (glej članek [6]). Pojavi se vprašanje razumevanja strukture slednjega parcialnega delovanja z avtomorfizmi, odvisno je zgolj od podanega monoida, ki v splošnem nima simetrij. Izkaže se, da je iskano parcialno delovanje na polmreži idempotentov posebne *inverzne* polgrupe, ki ima le pomožno vlogo in v splošnem ni  $E$ -unitarna. Ta rezultat prevede vprašanja o razširitvah monoidov na vprašanja o monoidih in inverznih polgrupah, teorija katerih je precej bolj razvita, kot teorija omejitvenih monoidov.

Za konec naj omenimo še raziskave, povezane z globalizacijo parcialnih delovanj različnih algebraičnih objektov. V članku [6] konstruiramo globalizacijo levo močnega parcialnega delovanja monoida na polmreži in dokažemo analog McAlisterjevega  $P$ -izreka za omejitvene polgrupe. V članku [10] konstruiramo dve univerzalni globalizaciji parcialnega delovanja polgrup na množicah preko tenzorskih produktov in preko določenih množic funkcij. Izkaže se, da prva konstrukcija definira začetni objekt, druga pa končni objekt v ustreznih kategorijah globalizacij. Prva konstrukcija je posplošitev znane konstrukcije Hollingsa, druga pa je popolnoma nova. V posebnem primeru, ko je monoid grupa, obe konstrukciji sovpadata, sicer pa si nista izomorfní in je med njima lahko neskončno mnogo neizomorfnih globalizacij. Posplošitve parcialnih delovanj monoidov, primerne za obravnavo pravih Ehresmannovih polgrup, preučujemo v članku [11], kjer dokažemo tudi usterzen strukturni izrek.

#### Viri

- [1] G. Abrams, P. Ara, M. Siles Molina, *Leavitt path algebras*, Lecture Notes in Math., 2191, Springer, London, 2017.
- [2] K. Auinger, G. Kudryavtseva, M. B. Szendrei, *F-inverse monoids as algebraic structures in enriched signature*, Indiana Univ. Math. J. 70 (5), (2021), 2107–2131.
- [3] L. O. Clark, R. Hazrat, *Étale groupoids and Steinberg algebras, a concise introduction*, Leavitt path algebras and classical K-theory, Indian Stat. Inst. Ser., Springer, Singapore (2020), 73–101.
- [4] O. Ganyushkin, V. Mazorchuk, *Classical Finite Transformation Semigroups*, Algebr. Appl., vol.9, Springer-Verlag, 2009.
- [5] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [6] G. Kudryavtseva, *Partial monoid actions and a class of restriction semigroups*, J. Algebra, (429), (2015), 342–370.
- [7] G. Kudryavtseva, *Two-sided expansions of monoids*, Internat. J. Algebra Comput., (29) (8), (2019), 1467–1498.
- [8] G. Kudryavtseva, *Povabilo v inverzne polgrupe*, Obzornik za matematiko in fiziko 67 (4), (2020),



121–135.

- [9] G. Kudryavtseva, *Quotients of the Booleanization of an inverse semigroup*, *Semigroups, categories, and partial algebras*, Springer Proc. Math. Stat., **345**, Springer, Singapore (2021), 71–94.
- [10] G. Kudryavtseva, V. Laan, *Proper Ehresmann semigroups*, Proc. Edinb. Math. Soc. **66** (3), (2023), 758–788.
- [11] G. Kudryavtseva, V. Laan, *Globalization of partial actions of semigroups*, Semigroup Forum **107** (1), (2023), 2000–2017.
- [12] G. Kudryavtseva, M. V. Lawson, *A perspective on non-commutative frame theory*, Adv. Math., **311** (2017), 378–468.
- [13] M. V. Lawson, *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, World Scientific, River Edge, 1998.
- [14] M. V. Lawson, D. H. Lenz, *Pseudogroups and their étale groupoids*, Adv. Math. **244**, (2013), 117–170.
- [15] A. T. Paterson, *Groupoids, inverse semigroups and their operator algebras*, Progr. Math., vol. 170, Birkhauser, Boston, 1999.
- [16] M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.
- [17] P. Resende, *Étale groupoids and their quantales*, Adv. Math. **208**, (2007), 147–209.
- [18] S. W. Rigby, *The groupoid approach to Leavitt path algebras*, Leavitt path algebras and classical K-theory, Indian Stat. Inst. Ser. Springer, Singapore, 2020, 21–72.
- [19] F. Wehrung, *Refinement monoids, equidecomposability types, and Boolean inverse semigroups*, Lecture Notes in Math., 2188, Springer, Cham, 2017.

37

## Vztrajna homologija in rekonstrukcijski rezultati

**Avtor:** Boštjan Lemež<sup>1</sup>

**Soavtor:** Žiga Virk<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko

### 1. Uvod

Računska topologija se ukvarja z algoritmičnimi rešitvami topoloških problemov. V tem okviru se je vztrajna homologija v kratkem času izkazala za eno izmed najučinkovitejših metod v topologiji, računalništvu in drugih znanostih. Vztrajna homologija je naravna posplošitev homologije in je v nekem smislu njena funktorialna verzija, ki ju uporabimo na filtracijah. Vztrajna homologija nam poda ne le topološke, ampak tudi geometrijsko informacije o prostoru. Proučuje celoten spekter homoloških grup po vseh nivojih, vključno s povezavami med temi nivoji. Prav tako lahko s primerno omejitvijo koeficientov dosežemo ravninsko prezentacijo vztrajne homologije z vztrajnostnim diagramom ali s črtno kodo, kar je uporabno pri analizi podatkov iz drugih ved v znanosti. Pomembna lastnost teh diagramov je, da so stabilni za majhne spremembe prostorov.

Selektivni Ripsov kompleks je posplošitev Vietoris-Ripsovega simplicialnega kompleksa, kjer imamo, namesto enega parametra, zaporedje parametrov. Osredotočili se bomo na rekonstrukcije metričnih prostorov do homotopskega tipa s pomočjo selektivnega Ripsovega kompleksa. Njegove lastnosti nam omogočajo detektirati več lokalnih lastnosti kot z Vietoris-Ripsovim kompleksom.

Pokazali bomo tudi ozadje glavnega rekonstrukcijskega rezultata s selektivnimi Ripsovimi kompleksi, ki se glasi: Naj bo  $X$  sklenjena Riemannova mnogoterost. Tedaj obstajajo takšni parametri  $r_i > 0$ , da je selektivni Ripsov kompleks na  $X$  (s parametri  $r_i$ ) homotopsko ekvivalenten  $X$ . Več podrobnosti o rekonstrukcijskih rezultatih, izreku o živcu, geodezičnih prostorih glej: [1, 2, 3, 4, 5, 6].

## 2. Definicije in znani rezultati

Naj bo  $A \subseteq X$  podprostor metričnega prostora  $(X, d)$  in naj bo  $r > 0$  poljuben skalar. Za vsak  $x \in X$  naj bo  $B_A(x, r) = \{a \in A \mid d(a, x) < r\}$  odprta okolica točke  $x$ . Če je  $A = X$  pišemo  $B_A(x, r) = B(x, r)$ . Diameter prostora  $A$  je definiran kot  $\text{Diam}(A) = \sup_{x, y \in A} \{d(x, y)\}$ .

**Definicija** (Selektivni Ripsov kompleks). Naj  $A \subseteq X$  podprostor metričnega prostora  $X$  in naj bo  $\tilde{r} = (r_1, r_2, \dots)$  padajoče zaporedje pozitivnih števil ( $r_1 \geq r_2 \geq \dots > 0$ ). Selektivni Ripsov kompleks  $\text{sRips}(A; r_1, r_2, \dots)$  je abstrakten simplicialni kompleks definiran z naslednjim pravilom:

- $A$  je množica točk,
- končna podmnožica  $\sigma \subset A$  je  $n$ -simpleks, če za vsak  $i = 1, \dots, n$  in za vsak  $k = 1, \dots, i$  obstajajo množice  $U_k^i \subseteq A$ , da velja

$$\sigma = U_1^i \cup U_2^i \cup \dots \cup U_i^i,$$

kjer je  $\text{Diam}(U_k^i) < r_i$ .

Metrični prostor  $(X, d)$  je geodezičen, če za vsak  $x, y \in X$  obstaja pot, geodetka, od  $x$  do  $y$  dolžine  $d(x, y)$ .

**Definicija** (glej [1]). Naj bo  $X$  geodezičen prostor. Definiramo  $r(X) \geq 0$  kot najmanjšo zgornjo mejo množice realnih števil  $r$ , ki zadošča naslednjim lastnostim:

1. Za vsak  $x, y \in X$ , kjer je  $d(x, y) < 2r$  obstaja enolična geodetka od  $x$  do  $y$  dolžine  $2r$ .
2. Naj bodo  $x, y, z, u \in X$ , da velja  $d(x, y) < r$ ,  $d(u, x) < r$ ,  $d(u, y) < r$  in naj bo  $z$  točka na najkrajši geodetki od  $x$  do  $y$ . Tedaj  $d(u, z) \leq \max\{d(u, x), d(u, y)\}$ .
3. Če sta  $\gamma$  in  $\gamma'$  parametrizaciji geodetk, da velja  $\gamma(0) = \gamma'(0)$  in če je  $0 \leq s, s' < r$  in  $0 \leq t < 1$ , tedaj je  $d(\gamma(ts), \gamma'(ts')) \leq d(\gamma(s), \gamma'(s'))$ .

Za vsako sklenjeno Riemannovo mnogoterost  $X$  velja, da je  $r(X) > 0$  ([1]). Zvezdast radij  $r(X)$  bomo označevali z  $\rho$ . Naj bo  $A \subseteq X$ . Pravimo, da je  $A$  zvezdasta s središčem v  $x_0 \in A$ , če so za vsak  $x \in A$  vse geodetke od  $x_0$  do  $x$  v  $A$ .

Glavna metoda dokazovanja rekonstrukcijskega rezultata je izrek o živcu. Živec odprtega pokritja je vpeljal Aleksandroff leta 1928. Prve klasične verzije izreka o živcu pa sta dokazala Borsuk in Leray.

**Definicija.** Pokritje  $\mathcal{U}$  prostora  $X$  je dobro odprto pokritje, če so vse množice iz  $\mathcal{U}$  odprte in vsi končni preseki množic iz  $\mathcal{U}$  bodisi prazni bodisi kontraktibilni.

Najprej definiramo živec pokritja:

**Definicija.** Naj bo  $\mathcal{U}$  množica podmnožic topološkega prostora  $X$ . Živec pokritja  $\mathcal{U}$  je abstraktni simplicialni kompleks  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  definiran kot:

- vsi neprazni elementi pokritja  $\mathcal{U}$  so točke v  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ ,
- končna podmnožica  $\sigma \in \mathcal{U}$  je simpleks, če  $\bigcap_{U \in \sigma} U \neq \emptyset$ .

**Izrek** (Izrek o živcu). Naj bo  $\mathcal{U}$  dobro pokritje kompaktnega metričnega prostora  $X$ . Tedaj velja:

$$X \simeq \mathcal{N}(\mathcal{U}).$$

## 3. Rekonstrukcijski rezultat s selektivnim Ripsovim kompleksom

Najprej si bomo ogledali posplošitev Hausmannovega rekonstrukcijskega izreka na selektivne Ripsove komplekse [2]. Če se omejimo na Vietoris-Ripsove komplekse, potem je ta dokaz nov dokaz Hausmannovega rekonstrukcijskega rezultata. Naša glavna metoda bo uporaba izreka o živcu. Pokazali bomo tudi funktorialni rekonstrukcijski rezultat sklenjenih Riemannovih mnogoterosti.

V glavnem rezultatu rekonstruiramo sklenjeno Riemannovo mnogoterost do homotopskega tipa s selektivnimi Ripsovimi kompleksi.

Za nadaljevanje fiksirajmo geodezičen prostor  $X$  z zvezdastim radijem  $\rho > 0$  in skalarje  $\tilde{r} = r_1, r_2, \dots$ , da velja:

$$\rho/2 \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$$

Oglejmo si naslednje lastnosti:

**Lema.** Naj bo  $x \in X$  in naj bo  $A \subseteq B(x, \rho/2)$  zvezdasta podmnožica s središčem v  $a \in A$ . Tedaj je  $\text{sRips}(A; r_1, r_2, \dots)$  kontraktibilen za poljubno izbiro parametrov  $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$ .

**Lema.** Za poljuben  $\alpha \leq \rho/2$  je množica  $\mathcal{U} = \{B(x, \alpha) \mid x \in X\}$  dobro odprto pokritje  $X$ .

**Lema.** Za poljubno kolekcijo podmnožic  $A_1, A_2, \dots, A_k \subset X$  velja

$$\bigcap_{i=1}^k \text{sRips}(A_i; r_1, r_2, \dots) = \text{sRips}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i; r_1, r_2, \dots\right).$$

Nadalje vpeljemo pokritje od  $\text{sRips}(X; r_1, r_2, \dots)$ .

**Lema.** Množica  $\mathcal{W}' = \{\text{sRips}(B(x, \rho/2); r_1, r_2, \dots) \mid x \in X\}$  je pokritje prostora  $\text{sRips}(X; r_1, r_2, \dots)$ .

Zaprto pokritje  $\mathcal{W}'$  lahko malenkost napihnemo, da dobimo izomorfno odprto pokritje  $\mathcal{W}$ .

**Lema.** Odprto pokritje  $\mathcal{W}$  prostora  $\text{sRips}(X; r_1, r_2, \dots)$  je dobro odprto pokritje.

**Trditev.** Naj bo  $\mathcal{U} = \{B(x, \rho/2) \mid x \in X\}$  in naj bo  $\mathcal{W}$  odprto pokritje prostora  $\text{sRips}(X; r_1, r_2, \dots)$ . Tedaj velja

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{N}(\mathcal{W}).$$

Naslednji izrek je posplošitev Hausmannovega izreka [1, Izrek 3.5] na selektivne Ripsove komplekse.

**Izrek** (glej [2]). Naj bo  $X$  geodezičen prostor z zvezdastim radijem  $\rho > 0$  in naj bo  $\tilde{r} = \{r_1, r_2, \dots\}$  takšno zaporedje pozitivnih števil, da velja  $\rho/2 \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$ . Tedaj je

$$X \simeq \text{sRips}(X; \tilde{r}).$$

Skica dokaza je naslednja:

Naj bo  $X$  geodezični prostor z  $\rho > 0$  in naj bo  $\alpha \leq \rho/2$ .

1. Pokritje

$$\mathcal{U} = \{B(x, \alpha) \mid x \in X\}$$

je dobro pokritje prostora  $X$ , saj je  $\alpha \leq \rho/2$ .

2. Pokritje  $\mathcal{W}' = \{\text{sRips}(B(x, \rho/2); \tilde{r}) \mid x \in X\}$  je dobro pokritje prostora  $\text{sRips}(X; \tilde{r})$ .

3.  $\mathcal{W}$  dobimo tako, da elemente pokritja  $\mathcal{W}'$  napihnemo.

4. Vzpostavimo naslednje povezave:

$$X \stackrel{(i)}{\simeq} \mathcal{N}(\mathcal{U}) \stackrel{(ii)}{\cong} \mathcal{N}(\mathcal{W}) \stackrel{(iii)}{\simeq} \text{sRips}(X; \tilde{r})$$

5. Po izreku o živcu sledi, da je  $X \simeq \mathcal{N}(\mathcal{U})$ . Od tod sledi (i).

6. Pokritji  $\mathcal{U}$  in  $\mathcal{U}$  sta izomorfni. Od tod sledi (ii).

7.  $\mathcal{W}$  je dobro odprto pokritje od  $\text{sRips}(X; r_1, r_2, \dots)$ . Po izreku o živcu sledi (iii).

S tem smo rekonstruirali sklenjeno Riemannovo mnogoterost do homotopskega tipa s selektivnimi Ripsovimi kompleksi za primerno majhne parametre. Ta rezultat je posplošitev Hausmannovega rekonstrukcijskega izreka. Kot poseben primer je ta dokaz tudi nov dokaz rekonstrukcijskega izreka za Vietoris-Ripsov kompleks, saj je glavna metoda v tem dokazu izrek o živcu.

## Viri

- [1] J. C. Hausmann, *On the Vietoris-Rips complexes and a cohomology theory for metric spaces*, Ann. of Math. Stud., 138 (1995), 175–188.
- [2] B. Lemež in Ž. Virk, *Reconstruction properties of selective Rips complexes*, Glas. Mat. Ser. III, 57 (2022), 73–88.
- [3] B. Lemež in Ž. Virk, *Finite reconstruction with selective Rips complexes*, arXiv:2205.05525, 2022.
- [4] Ž. Virk, *Rips complexes as nerves and a functorial dower-nerve diagram*, Mediterr. J. Math., 58 (2021).
- [5] Ž. Virk, *Persistent homology with selective rips complexes detects geodesic circles*, arXiv:2108.07460, 2021.
- [6] Ž. Virk, *Footprints of geodesics in persistent homology*, arXiv:2103.07158, 2021.

26

## Uporaba matematike v industriji

**Avtor:** Primož Lukšič<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Abelium d.o.o.*

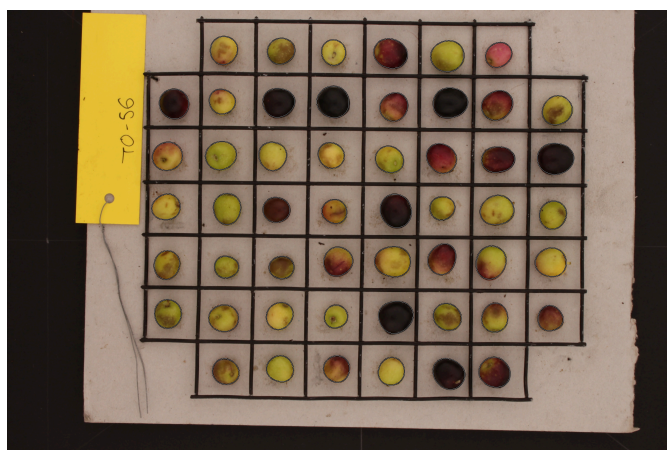
Podjetje Abelium je nastalo z vizijo reševanja zahtevnejših problemov v industriji s pomočjo pridobljenega znanja matematike in računalništva. V petnajstih letih delovanja smo izvedli več deset raziskovalno-razvojnih projektov na področju logistične optimizacije, razvoja komponent pametnih mest in pametnega kmetijstva, razvoja inovativnih poslovnih modelov, izboljšanja poslovnih procesov, analize velikih omrežij in razvoja naprednih sistemov za e-učenje. Ob tem smo zaposlili več kot 20 diplomantov in doktorandov matematičnih smeri, hkrati pa vseskozi vlagamo v razvoj novih kadrov in skrbimo za promocijo matematike s podporo organizaciji matematičnih konferenc, matematičnih tekmovanj ipd. Nekateri projekti so za uspešno izvedbo zahtevali uporabo naprednih matematičnih algoritmov in ravno tovrstni projekti so bili med najbolj zaželenimi, saj so lahko zaposleni pri njih v praksi uporabili znanje, pridobljeno med študijem. V nadaljevanju bomo predstavili štiri od njih, ki se razlikujejo tako na področjih uporabe, kot v uporabljenih algoritmih.

### Mobilna aplikacija za napovedovanje kakovosti in količine oljčnega olja

Leta 2011 smo sodelovali pri projektu v okviru razpisa Spodbujanje procesa komercializacije znanj, ki se je izvajal pod okriljem tedanje Javne agencije za tehnološki razvoj Republike Slovenije. Pri tem smo spoznali tujega investitorja, ki nam je predstavil idejo o avtomatizaciji postopka analize oliv in s tem skrajšanja časa za napoved kakovosti olja. Klasični postopki preverjanja kakovosti letine v laboratorijih so bili namreč tedaj dokaj zamudni, želja investitorja pa je bila to nadomestiti z mobilno aplikacijo. S pomočjo te bi fotografije oliv pošiljali v računalniški oblak, kjer bi jih obdelali s posebnimi algoritmi, nato pa bi na podlagi strojnega učenja pridobili oceno vsebovanosti olja in kislosti oliv. Postopek smo zastavili na naslednji način. Najprej je bilo treba olive razporediti v mrežo, ki je prikazana na spodnji fotografiji, jih fotografirati s pomočjo aplikacije, ta pa je fotografijo poslala v računalniški oblak.

V zalednem sistemu, ki se je nahajal v računalniškem oblaku, se je nato začela obdelava fotografije. Prvi korak je obsegal normalizacijo barv in osvetlitve, saj so bile lahko fotografije narejene v različnih pogojih. Algoritmi za normalizacijo ponavadi uporabijo podatke iz okolice slikovne pike, ki jo želimo normalizirati, ali pa izračunajo transformacijsko matriko iz vseh podatkov in jo nato uporabijo na vseh pikah. Po opravljeni normalizaciji je sledila segmentacija, tj. odkrivanje oliv na fotografiji. Pri tem je delno pomagala sama mreža, ki so jo dopolnjevali algoritmi za segmentacijo. V sklepnih fazah pa je bilo treba olive razvrstiti na podlagi barve, oblike in teksture. S pomočjo algoritmov strojnega učenja, ki so izhajali iz učne množice oliv z že preverjeno količino olja in kislostjo, smo ta podatka izračunali še za olive s pridobljene fotografije. Aplikacija iOliva skupaj z opisanim zalednim sistemom je bila leta 2012 izbrana za najboljšo storitveno inovacijo na 7. Slovenskem forumu

inovacij, investitor pa jo je nameraval vpeljati v uporabo v španski oljčni industriji, ki obvladuje kar 50 odstotkov svetovne proizvodnje oljčnega olja.



Slika 1: Priprava oliv za fotografiranje z mobilno aplikacijo.

### Optimizacija prevozov potnikov

Leta 2013 je do nas pristopilo podjetje GoOpti d. o. o., ki se ukvarja z organizacijo prevozov potnikov do letališč. Zaradi vsakoletnega povečevanja števila potnikov so iskali celovito rešitev za nakup vozovnic, vzpostavitev cenovne politike, optimizacijo uvrščanja potnikov v vozila, izbiro prevoznikov in podporo pri vključevanju drugih deležnikov (agencij, poslovnih partnerjev, pospeševalcev prodaje ipd.). Matematični algoritmi so odigrali ključno vlogo pri optimizaciji uvrščanja potnikov v vozila, zato si bomo ta postopek ogledali podrobneje. Pred uvajanjem kakršnekoli optimizacije je bilo treba pridobiti podatke o lokacijah postajališč in trajanju poti med njimi, časovnih omejitvah potnikov (potniki lahko namreč pri nakupu v zameno za ugodnejšo ceno izberejo možnost določenega odstopanja pri času pobiranja oziroma dostave) in tudi o omejitvah na strani prevoznikov (cena prevoza, kapaciteta vozil, razpoložljivost vozil in voznikov). Cilj optimizacije je bil izdelati takšno razporeditev potnikov v vozila, ki bo karseda zmanjšala prevozne stroške, pri tem pa upoštevala zgoraj naštetе omejitve in tudi dodatne pogoje za t. i. ohranjanje zadovoljstva potnikov (mednje štejemo omejitve glede pobiranja na poti, časa čakanja na druge potnike, maksimalnega trajanja vožnje brez postankov ipd.). Postopek optimizacije je potekal v več korakih:

1. Najprej je treba poiskati vse nakupe prevozov, ki jih je možno izvesti z istim vozilom. Pri tem je bilo treba upoštevati želene čase odhoda oz. prihoda, lokacije pobiranja oz. dostavljanja in omejitve glede dolžine poti.
2. Izmed vseh možnih razporeditev v vozila se je nato izbralo neko dovolj dobro rešitev glede na cilj optimizacije.
3. Izbrane razporeditve se je povezalo prevoze v krožne vožnje, saj je bilo treba vozila pripeljati nazaj na izhodišče.
4. Sledil je postopek, ki je skušal minimizirati stroške z izvedbo večje količine manjših sprememb (t. i. lokalna optimizacija).
5. Ko je bilo jasno, da se rešitve ne da več občutneje optimizirati, se je vozilom dodelilo še voznike (z upoštevanjem omejitev glede časa počitka).

Dobljena rešitev je še vedno dopuščala ročne popravke, saj so v praksi nastajale nepredvidene situacije (zamude letal oziroma potnikov, zastoji na cestah, nedosegljivost vozil ali voznikov, nepredvidene količine prtljage ipd.). Znamka GoOpti se je z našo podporo razvila v inovativen skalabilen sistem, podprt z 90-odstotnim zadovoljstvom uporabnikov. Na podlagi implementiranih rešitev je nadgrajena storitev pridobila priznanja za:

- najbolj inovativen poslovni model v Sloveniji (8. Slovenski forum inovacij, 2013),
- najboljši primer uporabe oblačnih rešitev v Sloveniji (EuroCloud Slovenija, 2014),

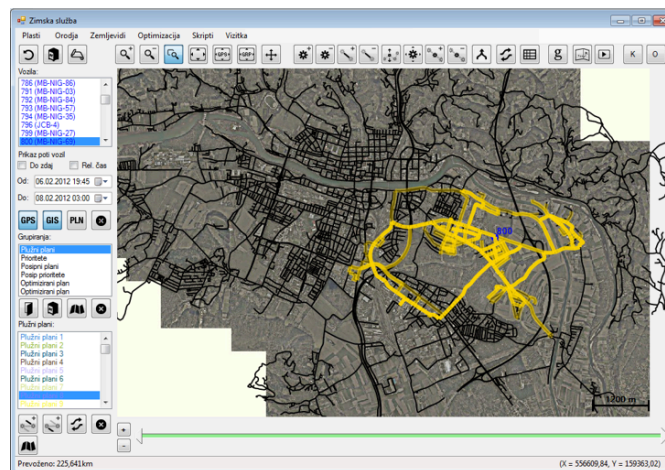
- najboljši vpliv uporabe oblačnih rešitev v Evropi (EuroCloud Europe, 2014),
- najboljšo predstavitev poslovnega modela (European Venture Contest, 2014),
- startup leta 2015 (ABC Accelerator).

v letih 2016/18 pa tudi financiranje v okviru evropske sheme »SME Instrument« – faza 2 (št. projekta 726547).

## Optimizacija delovanja zimske službe

V okviru izvajanja ARRS projekta št. L5-4282 smo se osredotočili na obravnavo logističnega pod-sistema zimske službe podjetja Nigrad d. d., ki sicer skrbi za vzdrževanje cestnega omrežja Mestne občine Maribor. V sodelovanju z ustreznimi službami znotraj podjetja smo najprej pridobili in uredili ustrezne podatkovne zbirke (GIS cestno omrežje, GPS sledi, plužni plani, poslovni podatki), s pomočjo katerih smo lahko nato izvedli ekonomsko analizo in razvili optimizacijske metodologije ter algoritme. Med projektom smo razvili zbirko informacijskih orodij za hranjenje, obdelavo, analitiko in vizualizacijo omenjenih vrst podatkov, pa tudi orodja za komunikacijo z mobilnimi napravami.

Ključni izziv zimske službe je kakovostno in učinkovito čiščenje in posipavanje cest. Pri tem je najpomembnejša prioriteta pluzenje cest, izogibati pa se je treba podvajanju dela in neakovostnemu delu (npr. spregled določenih cestnih odsekov). Med pluzenjem cest je treba z obstoječo floto vozil ceste splužiti v čim krajšem času. Pri tem se zaradi vremenskih sprememb in možnih okvar, kljub vnaprej določenemu planu pluzenja, lahko zgodijo številne intervencije, zato ni nujno, da bo načrtovani plan pluzenja na koncu v celoti dosežen.



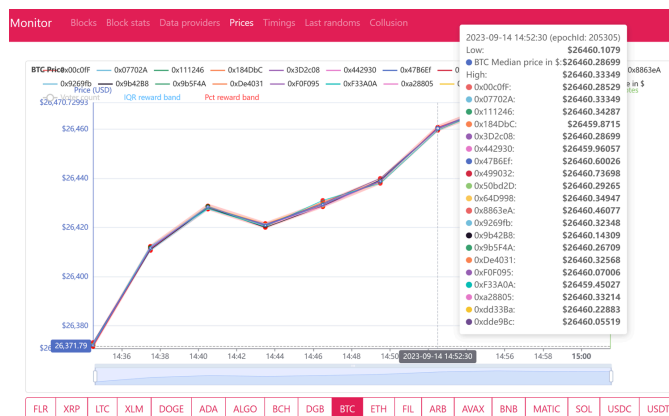
Slika 2: Prikaz aplikacije za optimizacijo pluzenja.

Kot enega od pomembnejših dosežkov projekta bi izpostavili razvoj lastnega heurističnega algoritma, ki na osnovi zahtev plužnega plana (tj. zahtev po pokritju usmerjenih povezav) ter začetne baze in vmesnih postaj za nalaganje posipnega materiala, ob omejitvi dolžine zank zaradi omejene količine posipnega materiala na vozilu, poišče čim bolj optimalno vožnjo, med katero z minimalnim številom zank (vračanje v bazo ali na postaje) sledi zastavljenemu planu. Problematiko obvladovanja kompleksnosti sistema v realnem času zaradi intervencij (izpad vozila, sprememba prioritete za pluzenje) smo modelirali s problemom uteženega razvoza po povezavah (CARP - Capacitated Arc Routing Problem), pri čemer smo poleg razdalje in časa v kriterijsko funkcijo vključili še razne druge omejitve, tipično preko mehke penalizacije. Z uporabo algoritma na že izvedenih plužnih planih smo ugotovili, da je z optimiranimi vožnjami na obstoječih plužnih planih mogoče doseči od 20 do 40 % manjše število prevoženih kilometrov na ravni celotnega voznega parka. Če k temu dodamo še optimizacijo izbire baz za nalaganje posipnega materiala, pa je bilo mogoče doseči še dodatne izboljšave za od 7 do 10 %.

## Sporočanje tečajev virtualnih valut oraklju v distribuiranem omrežju

Projekt Flare predstavlja primer decentraliziranega omrežja, ki temelji na tehnologiji veriženja blokov. V osnovi je podoben omrežjem, kot sta Avalanche in Ethereum, saj deluje potrjevanje blokov

na enak način (t. i. Proof-of-Stake), prav tako pa omogoča funkcionalnost t. i. pametnih pogodb, tj. računalniških programov, ki jih je mogoče klicati v omrežju. Ena od posebnosti omrežja Flare je, da vsebuje t. i. orakelj, ki generira časovne vrste različnih podatkov, ki jih pridobi iz zunanjih virov. Ti podatki so na voljo vsem aplikacijam, ki delujejo na omrežju, oziroma pametnim pogodbam v omrežju. S tem se naslavlja ena od omejitev distribuiranih omrežij, tj. da lahko uporabljajo samo informacije, generirane znotraj samega omrežja. Delovanje oraklja poteka na naslednji način: Vsake 3 minute prejme za vsak podatek informacijo o njegovi vrednosti (npr. tečaju neke virtualne valute), ki jo množica (do 100) uporabnikov pošlje na določeno pametno pogodbo. Prejete podatke uteži z močjo, ki jo imajo uporabniki (tj. s številom Flare žetonov, ki si jih lastijo), in izračuna mediano. Ta informacija je nato na voljo kot »sveža« vrednost tega podatka naslednje 3 minute. Uporabniki so motivirani za pošiljanje vrednosti, ki čim bolj odražajo dejansko vrednost tega podatka, saj so najuspešnejši med njimi (tj. tisti, ki so poslali vrednost dovolj blizu izračunani mediani) za to nagrajeni. Vrednosti je treba poslati nekaj sekund pred izračunom mediane, saj se morajo transakcije najprej potrditi v omrežju, kar pomeni, da se napoveduje vrednost v prihodnosti. Pri tem se je izkazalo, da je ključnega pomena pridobiti dobre vhodne podatke, tj. vrednosti podatkov iz različnih virov. V primeru virtualnih valut to npr. pomeni pridobiti tečaje iz čim več različnih borz in jih ustrezno utežiti glede na uporabljen algoritem. Pri tem lahko uporabimo različne oblike interpolacije, statistične algoritme (kot je npr. ARIMA - Auto Regressive Integrated Moving Average), strojno učenje (npr. Gaussov proces) ali pa nevronske mreže (kot je LSTM - Long Short-Term Memory). Podjetje Abelium v omrežje sporoča vrednosti, ki se izračunajo na podlagi lastnega algoritma, ta pa se v natančnosti redno nahaja med prvimi 10 poročevalci. To predstavlja velik uspeh, saj je konkurenca zelo močna in se ves čas spreminja, kar pa zahteva redno prilagajanje algoritma.



Slika 3: Sporočeni tečaji valute Bitcoin prvih 20 poročevalcev in izračunana mediana.

## Predstavitev plakatov (raziskovalno-aplikativna sekcija) / 45

### P(izraz|gramatika)

Avtor: Urh Primožič<sup>1</sup>

<sup>1</sup> student UL FMF

Simbolna regresija je področje strojnega učenja, ki se ukvarja z iskanjem funkcij, ki se prilagajajo danim podatkom in imajo čim bolj preprost predpis. Novi algoritmi simbolne regresije za tvorjenje predpisov uporabljajo verjetnostne gramatike. Računamo lahko, s kakšno verjetnostjo dana gramatika tvori izbrano enačbo. Izkaže se, da je računanje verjetnosti neizračunljiv problem, za nekatere družine gramatik pa obstajajo matematično zanimive rešitve.

### Verjetnostne gramatike

Naj bosta  $N$  in  $T$  poljubni disjunktni, neprazni, končni množici simbolov in naj bo v množici  $N$  odlikovan začetni simbol  $S \in N$ . Naj bo  $R \subseteq N \times (N \cup T)^*$  celovita relacija, ki vsakemu simbolu iz  $N$  priredi vsaj eno besedo, sestavljeno iz simbolov v  $N \cup T$ . Tedaj četvercu  $G = (N, T, S, R)$

rečemo kontekstno neodvisna gramatika. Simbolom iz  $N$  rečemo ne-končni, iz  $T$  pa končni simboli. Urejene pare iz  $R$  imenujemo prepisovalna pravila. Par  $(A, w) \in R$  pišemo kot  $A \rightarrow w \in R$  in rečemo, da se  $A$  prepíše v  $w$ .

Z uporabo prepisovalnih pravil iz  $R$  lahko v končnem številu korakov začetni simbol  $S$  prepíšemo v besedo  $w \in T^*$ , sestavljeno le iz končnih simbolov. V tem primeru rečemo, da gramatika  $G$  tvori  $w$ . Množico vseh besed, ki jih tvori gramatika  $G$ , označimo z  $L(G)$ .

Verjetnostna gramatika je gramatika skupaj s porazdelitvijo  $P: R \rightarrow (0, 1]$ , da za fiksen  $A \in N$  velja  $\sum_{A \rightarrow w \in R} P(A \rightarrow w) = 1$ . Na tvorbo besed z verjetnostno gramatiko lahko gledamo kot na markovski proces in računamo verjetnost tvorbe.

Množico  $\{A \rightarrow w_1, \dots, A \rightarrow w_n\}$  prepisovalnih pravil za  $A$  ob dani porazdelitvi  $P$  običajno podamo kot  $A \rightarrow w_1 \mid P(A \rightarrow w_1) \mid \dots \mid w_n \mid P(A \rightarrow w_n)$ . Primer.  $G = (\{S\}, \{x, +\}, S, R)$  s prepisovalnima praviloma  $S \rightarrow S + x \mid p \mid x \mid 1 - p$  tvori množico besed  $L(G) = \{x, x + x, x + x + x, \dots\}$ . Besedo  $\underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-krat}}$  krajše pišemo kot  $nx$ . Verjetnost, da tvorimo besedo  $nx$ , je  $P(nx) = (1 - p)^n p^{n-1}$ .

### Uporaba v simbolni regresiji

Algoritem za odkrivanje enačb ProGED [1] z gramatikami tvori različne oblike predpisov za izraze oblike  $f(x_1, \dots, x_n, c)$ , nato pa vsako pojavitev simbola  $c$  v predpisu z numerično optimizacijo nadomesti s tako konstanto, da se izraz čim bolj prilaga podatkom.

Primer.

$$\begin{aligned} E &\rightarrow cV + E \mid c \\ V &\rightarrow xV \mid x \end{aligned}$$

Zgornja gramatika tvori polinome s konstantami oblike  $cx^{r_1} + \dots + cx^{r_m} + c$ . Algoritem izmed množice funkcij  $\{c_0x^{r_1} + \dots + c_{m-1}x^{r_m} + c_m \mid c_i \in \mathbb{C}\}$  izbere tisto, ki se podatkom najbolj prilaga. Z vidika simbolne regresije lahko predpis, tvorjen z gramatiko, enačimo z množicami vseh funkcij, ki jih dobimo iz predpisa, če simbole  $c$  nadomestimo s števili.

**Formalizacija predpisa.** Zgornjo intuicijo povzamemo v formalni definiciji izraza. Naj bo  $\mathbb{F}$  poljubna množica dovoljenih vrednosti konstant  $c$ ,  $D$  pa poljubna domena za spremenljivke  $x_1, \dots, x_n$ . Naj bo  $G$  verjetnostna gramatika, ki tvori le besede oblike  $w = w_1cw_2c \dots cw_{m+1}$  (kjer v členih  $w_i$  ni znaka  $c$ ) in za vsako izbiro konstant  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}$  beseda  $w_1c_1w_2c_2 \dots c_mw_{m+1}$  predstavlja predpis za funkcijo

$$\begin{aligned} \phi_w(c_1, \dots, c_m): U &\longrightarrow D \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto w_1c_1w_2c_2 \dots c_mw_{m+1}, \end{aligned}$$

kjer je  $U \subseteq D^n$  maksimalna domena, da je  $\phi_w(c_1, \dots, c_m)$  še dobro definirana. Če je  $D \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  dodatno privzamemo, da  $\phi_w(c_1, \dots, c_m)$  zvezno razširimo na vse robne točke domene  $U$ , kjer je to mogoče.

Na množici besed gramatike  $G$  definiramo preslikavo

$$\Phi(w) = \{\phi_w(c_1, \dots, c_m) \mid c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}\}.$$

Na  $L(G)$  uvedemo ekvivalenčno relacijo

$$w \sim v \iff \Phi(w) = \Phi(v).$$

in preko nje definiramo *prostor formalnih izrazov* kot kvocient  $L(G)/\sim$ .

**Izračun verjetnosti.** Iščemo algoritem, ki bi za poljubno gramatiko  $G$  kot zgoraj in poljubno besedo  $w \in L(G)$  izračunal  $P([w]) := \sum_{v \sim w} P(v)$ . Izkaže se, da je splošen problem neizračunljiv [2], obstajajo pa rešitve za manjše družine gramatik. Osnovna gramatika, ki jo uporablja ProGED, je podana s pravili

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + cV \mid p \mid c \mid 1 - p \\ V &\rightarrow x_1 \mid q_1 \mid \dots \mid x_n \mid q_n \end{aligned}$$

in tvori linearne izraze oblike  $w = c + cx_{r_1} + \dots + cx_{r_k}$ . Velja enakost



$$P([w]) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \frac{1-p}{1-p \sum_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} q_{r_i}}$$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} (1-p)p^i \left( \sum_{\substack{l_1 + \dots + l_k = i \\ l_j \geq 1}} \binom{i}{l_1, \dots, l_k} q_{r_1}^{l_1} \dots q_{r_k}^{l_k} \right).$$

## Viri

[1] Jure Brencelj, Ljupčo Todorovski, and Sašo Džeroski. Probabilistic grammars for equation discovery. *Knowledge-Based Systems*, 224:107077, (2021)

[2] Urh Primožič, Ljupčo Todorovski, and Matej Petkovič. P(expression|grammar): Probability of deriving an algebraic expression with a probabilistic context-free grammar, (2022)  
<https://arxiv.org/pdf/2212.00751.pdf>

28

## O solitonih

**Avtor:** Pavle Saksida<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

V članku najprej na kratko opišemo pojem solitonske rešitve parcialne diferencialne enačbe. Nato predstavimo postopek, s katerim lahko izračunamo solitonske rešitve Maxwell-Blochove enačbe. Te enačbe opisujejo interakcijo med materijo in svetlobo. Rešitve Maxwell-Blochove enačbe najprej predstavimo kot verigo Neumannovih nihala, v katerih sosedje med seboj interagirajo. Simplektična redukcija te rešitve prevede v verigo interagirajočih magnetnih sferičnih nihala. Pokažemo, da homoklinične rešitve magnetnega sferičnega nihala porodijo solitonske rešitve Maxwell-Blochove enačbe. Dobimo nenavadne solitone, ki so kombinacije osamljenih valov in nihajočih rešitev.

### 1. Uvod

Diferencialne enačbe gotovo sodijo med najbolj proučevane, pa tudi med najbolj uporabne matematične pojme. Kljub temu znamo analitično, v zaključeni obliki, rešiti komaj kakšno diferencialno enačbo. Še posebej zahtevna je obravnava nelinearnih enačb. Danes dobro vemo, da je vedenje številnih pojavov, ki jih lahko dobro modeliramo s povsem determinističnimi, a nelinearnimi diferencialnimi enačbami, v praksi nenapovedljivo. Običajno enačbe, ki tvorijo model, niso analitično rešljive. Celo numerične rešitve bodo dobri približki rešitev le lokalno. Dober vsakdanji primer take situacije je napovedovanje vremena. Vemo, da se največkrat ne moremo s pretirano gotovostjo zanesti na desetdnevno vremensko napoved.

Vendar pa vsi nelinearni pojavi v naravi niso kaotični in nenapovedljivi. Vedenje nekaterih je presenetljivo regularno. V splošnem se oblika vodne gladine pod vplivom vetra ali pa tokov spreminja na precej kaotičen način. A če spustimo v dovolj plitev vodni kanal veliko utež, katere velikost je primerljiva s širino kanala, bo nastal stabilen osamljen val, ki se bo gibal po kanalu s konstantno hitrostjo in pri potovanju ne bo spreminjal svoje oblike. Take valove danes imenujemo solitoni ali osamljeni valovi. Ta pojav je leta 1834 prvi opisal škotski inženir in ladijski arhitekt John Scott Russell. Hitro se je izkazalo, da je za opis tega pojava potrebna *nelinearna* parcialna diferencialna enačba. Po več poskusih kar nekaj znanih znanstvenikov sta leta 1895 holandska matematika Deiderik Korteweg in Gustav de Vries objavila članek, v katerem sta izpeljala enačbo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

ki se danes po njiju imenuje Korteweg-deVriesova ali KdV enačba. Ena od rešitev te enačbe je tudi funkcija

$$u(x, t) = -\frac{c}{2 \cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - a)\right)}. \quad (5)$$

Ta funkcija opisuje soliton, ki s hitrostjo  $c$  potuje na desno, in je prav ta, ki ga je opisal Scott Russell.

Zgornja enačba sodi v razred *integrabilnih nelinearnih diferencialnih enačb*. Najbolj naivna definicija tega razreda je: enačba je *integrabilna*, če lahko (vsaj načeloma) najdemo njeno splošno rešitev v zaključeni obliki. Izkaže se, da ima vsaka taka enačba veliko prvih integralov oziroma ohranitvenih količin. Teh količin mora biti vsaj za polovico števila prostostnih stopenj sistema, ki ga enačba opisuje. Ko gre za parcialne diferencialne enačbe, imajo pripadajoči sistemi neskončno mnogo prostostnih stopenj, vendar je tudi v tem primeru možno smiselno izraziti zgornjo zahtevo.

Nekatere integrabilne nelinearne parcialne diferencialne enačbe imajo, tako kot KdV enačba, solitonske rešitve, torej rešitve, ki imajo lastnosti rešitev (5) KdV enačbe. Njihova najzanimivejša lastnost je, da jih lahko nelinearno superponiramo in dobimo tako imenovane večsolitonske rešitve. Dvosolitonska rešitev ima lahko v začetnem času (približno) obliko vsote dveh zelo oddaljenih solitonov. Naj bo levi višji in desni nižji. Potem levi potuje hitreje kot desni. Ko levi desnega dohiti, se na nelinearen način spojita, nato pa se spet razideta in čez dolgo časa bosta spet imela približno obliko vsote posameznih solitonov, le da bo sedaj višji na levi strani.

## 2. Maxwell-Blochove enačbe

Solitoni se ne pojavljajo le v hidrodinamiki, ampak v številnih fizikalnih in celo v bioloških sistemih (glej npr. [1]). Zelo pomembni so optični solitoni, ki nastajajo v laserjih in v optičnih vlaknih. Nastajajo pri interakciji med svetlobo in snovjo. Denimo, da imajo atomi, ki sestavljajo snov, dva energijska nivoja. Foton s frekvenco, ki je enaka razliki teh energijskih nivojev, ob trku dvigne atom z nižjega na višji nivo. Nato čez nekaj časa atom spet pade na nižji nivo in pri tem odda foton z omenjeno frekvenco. Pod določenimi pogoji se te interakcije sinhronizirajo v solitonske ali pa v večsolitonske valove v podolgovatem optičnem mediju s krožno simetričnimi preseki. Tovrstno dogajanje opisuje Maxwell-Blochov sistem nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb.

Na kratko bomo orisali konstrukcijo solitonskih rešitev Maxwell-Blochovega sistema. V fiziki in morda še posebej v matematični fiziki velikokrat poskušamo razložiti določen kompleksen sistem tako, da ga opišemo kot množico enostavnih sistemov, ki med seboj interagirajo na določen način. Ti enostavni sistemi so velikokrat taka ali drugačna nihala. Največkrat v takem opisu nastopa ena vrsta nihala. Enostavnost sestavnih delov mnogokrat omogoča boljše razumevanje celotnega kompleksnega sistema. Ena od najbolj znanih nelinearnih verig nihala je sistem Fermi-Pasta-Ulam (glej [1]). Sestavni deli so delci, ki med seboj interagirajo po Hookovem zakonu, dodana pa je še sila, ki v sistem vnese nelinearnost. Sistem torej najprej opazujemo kot diskretno verigo nelinearnih interagirajočih neharmoničnih nihala, v kontinuumski limiti pa dobimo KdV enačbo.

V tem delu bomo določene rešitve Maxwell-Blochovih enačb opisali kot limite verig magnetnih sferičnih gravitacijskih nihala. Tako nihalo je električno nabit masni delec, ki se giblje po enotski sferi pod vplivom gravitacijske sile in magnetnega polja, porojenega z Diracovim magnetnim monopolom, ležečim v središču sfere. To polje doda Lorentzovo silo. Sosednja nihala med seboj interagirajo prek sile magnetnega tipa. Ta sila ni odvisna le od medsebojne lege sosedov, ampak tudi od razlike njunih hitrosti. Izračune, potrebne za izpeljave v tem članku ter nekaj povezanih vsebin, lahko bralec najde v [3] in [4].

Rešitve, ki jih bomo konstruirali, niso povsem običajni solitoni. Pri generični izbiri določenega parametra imajo rešitve do nekega časa obliko osamljenega vala, po tem času pa začnejo neperioidično nihati; amplituda in frekvenca se manjšata. Te rešitve so torej nekakšni križanci med osamljenimi valovi in nihajočimi rešitvami. Če je vrednost našega parametra enaka nič, dobimo čisti osamljen val.

Obravnavali bomo verzijo Maxwell-Blochovega sistema

$$E_t + cE_x = P, \quad P_t = ED - bP, \quad D_t = -\frac{1}{2}(\overline{E}P + E\overline{P}). \quad (6)$$

kjer je  $E(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ovojnica električnega polja,  $P(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  polarizacija medija in  $D(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  relativna količina atomov v spodnjem energijskem nivoju. Konstanti  $c$  in  $b$  sta

podatka:  $c$  je hitrost svetlobe v mediju,  $b$  pa je longitudinalni relaksacijski čas medija. Sistem bomo najprej prepisali v bolj prikladno obliko. Definirajmo matrični funkciji  $\rho(t, x), F(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ , kjer je  $\mathfrak{su}(2)$  Liejeva algebra Liejeve grupe  $SU(2)$ . Naj bo

$$\rho = \begin{pmatrix} iD & iP \\ -iP & -iD \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ib & E \\ -E & -ib \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Označimo z  $[\rho, \sigma]$  komutator  $\rho \cdot \sigma - \sigma \cdot \rho$  matrik  $\rho$  in  $\sigma$ . Maxwell-Blochove enačbe postanejo

$$\rho_t = [\rho, F], \quad F_t + cF_x = [\rho, \sigma], \quad \sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Prva enačba zgoraj je Laxova enačba. Njena splošna rešitev je oblike

$$\rho(t, x) = \text{Ad}_{g(t,x)}(\tau(x)), \quad F(t, x) = -g_t(t, x) \cdot g^{-1}(t, x), \quad (9)$$

kjer sta  $g(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow SU(2)$  in  $\tau(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{su}(2)$  poljubni funkciji. V nadaljevanju bomo vzeli  $\tau(x) \equiv \tau$ . Vstavimo to rešitev v drugo enačbo sistema (8), označimo  $g \cdot \tau \cdot g^{-1} = \text{Ad}_g(\tau)$  in dobimo:

$$(g_t g^{-1})_t + c(g_t g^{-1})_x = [\sigma, \text{Ad}_g(\tau)]. \quad (10)$$

Naj bo  $g(t, x) = g(t)$  rešitev enačbe (10). Ta funkcija reši enačbo

$$(g_t g^{-1})_t = [\sigma, \text{Ad}_g(\tau)], \quad (11)$$

enačba (11) pa je enačba gibanja hamiltonskega sistema  $(T^*SU(2), \omega_c, H_n)$ . Hamiltonova funkcija je podana s

$$H_n(g, p_g) = \frac{1}{2} \|p_g\|^2 + \langle \sigma, \text{Ad}_g(\tau) \rangle, \quad (12)$$

kjer je  $\langle \alpha, \beta \rangle = -\frac{1}{2} \text{sl}(\alpha\beta)$  Killingova forma na  $\mathfrak{su}(2)$ . Forma  $\omega_c$  je kanonična simplektična forma na kotangentnem svežnju  $T^*SU(2)$ . V primernih koordinatah na sferi  $S^3 = SU(2) \subset \mathbb{R}^4$  se potencial v hamiltonijanu glasi  $\langle \sigma, \text{Ad}_g(\tau) \rangle = \lambda(q_1^2 + q_2^2) - \lambda(q_3^2 + q_4^2)$ . Hamiltonski sistem  $(T^*SU(2), \omega_c, H_n)$  je poseben primer znanega Neumannovega sistema, ki v našem primeru opisuje gibanje harmoničnega nihala, omejenega na sfero  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ . Enačbi (10) in (11) se razlikujeta za člen

$$(g_t g^{-1})_x = \frac{1}{\epsilon} \left( g_t g^{-1}(x + \epsilon) - g_t g^{-1}(x - \epsilon) \right) \Big|_{\epsilon \rightarrow 0}.$$

Ta člen podaja interakcijo med sosednjima Neumannovima nihalom. Interakcija je magnetnega tipa; odvisna je samo od razlike hitrosti sosednjih nihala. Konfiguracijski prostor Maxwell-Blochove enačbe je grupa  $LSU(2) = \{g: \mathbb{R} \rightarrow SU(2)\}$ , torej grupa poti v  $SU(2)$ . V tretjem razdelku [3] je dokazan naslednji izrek.

**Izrek.** *Hamiltonski sistem, katerega enačba gibanja je Maxwell-Blochova enačba (10), je določen s trojico  $(T^*LSU(2), \omega_c + \omega_i, H)$ , kjer je hamiltonijan podan s*

$$H(g, p_g) = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} \|p_g(x)\|^2 + \langle \sigma, \text{Ad}_{g(x)}(\tau) \rangle \right) dx,$$

$\omega_c$  je kanonična forma na  $T^*LSU(2)$ , forma  $\omega_i$  pa je povlek na  $T^*LSU(2)$  desno invariantne forme  $\tilde{\omega}_i$  na  $LSU(2)$ , ki je v identiteti te grupe podana s predpisom

$$(\tilde{\omega}_i)_e(\xi, \eta) = - \int_{\mathbb{R}} \langle \xi^t(x), \eta(x) \rangle dx, \quad \xi, \eta \in Lsu(2).$$

Forma  $\omega_i$  poskrbi za interakcije med sosednjimi nihali.

### 3. Redukciji Neumannovega in Maxwell-Blochovega sistema

Spomnimo se konstrukcije simplektičnega kvocienta v najpreprostejšem primeru. Naj grupa krožnice  $U(1)$  deluje s simplektomorfizmi na simplektično mnogoterost  $(M, \omega)$  in naj bo vektorsko polje  $V(m) = (d/dt)|_{t=0} \text{Exp}(tv) \cdot m$  infinitezimalno delovanje  $U(1)$  na  $M$ . Pri tem je  $v$  bazni vektor v Liejevi algebri  $\mathfrak{u}(1)$  grupe  $U(1)$ . Naj bo delovanje tudi hamiltonsko. To pomeni, da obstaja funkcija, imenovana momentna preslikava,  $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero velja  $(d\mu)_m = \omega_m(V(m), -)$

za vsak  $m \in M$ . Potem je za vsak  $\alpha \in \text{Im}(\mu) \subset \mathbb{R}$  kvocientni prostor  $\mu^{-1}(\alpha)/U(1)$  simplektična mnogoterost dimenzije  $\dim M - 2$  opremljena z inducirano simplektično formo  $\omega_r$ .

Grupa  $U_\tau(1) = \{\text{Exp}(s \cdot \tau); s \in [0, 2\pi)\} \subset SU(2)$  deluje na  $T^*SU(2)$  z delovanjem  $\rho_u(g, p_g) = (g \cdot u, p_g)$ . Kotangentni sveženj  $T^*SU(2)$  smo trivializirali z desnimi translacijami. To delovanje ohranja hamiltonijan (12). Momentna preslikava našega delovanja je

$$\mu(g, p_g) = p_g(\text{Ad}_g(\tau)) = \langle g_t g^{-1}, \text{Ad}_g(\tau) \rangle. \quad (13)$$

Torej imamo simplektični kvocient  $(\mu^{-1}(\alpha)/U_\tau(1), \omega_Q, H_{sp})$  Neumannovega hamiltonskega sistema. Pri tem je  $\mu^{-1}(\alpha)/U_\tau(1) \cong T^*S^2$ , inducirani hamiltonijan je

$$H_{sp}(q, p_q) = \frac{1}{2} \|p_q\|^2 + \langle \sigma, q \rangle, \quad q = \text{Ad}_g(\tau) \in \mathfrak{su}(2), \quad (14)$$

inducirana simplektična forma na  $T^*S^2$ , kjer je  $S^2 \subset \mathfrak{su}(2)$ , pa je

$$(\omega_Q)_{(q, p_q)}(X_{p_q}, Y_{p_q}) = (\omega_c)_{(q, p_q)}(X_{p_q}, Y_{p_q}) + \alpha \langle q, [\widehat{X}_{p_q}, \widehat{Y}_{p_q}] \rangle.$$

Z  $\widehat{X}_{p_q}, \widehat{Y}_{p_q}$  smo označili naravni projekciji tangentnih vektorjev  $X_{p_q}, Y_{p_q} \in T_{p_q}(T^*S^2)$  na  $\widehat{X}_{p_q}, \widehat{Y}_{p_q} \in T_q S^2$ . Hamiltonski sistem  $(T^*S^2, \omega_c + \alpha \omega_m, H_{sp})$ , kjer je  $\omega_m(\widehat{X}_{p_q}, \widehat{Y}_{p_q}) = \langle q, [\widehat{X}_{p_q}, \widehat{Y}_{p_q}] \rangle$ , opisuje gibanje sferičnega nihala z električnim nabojem  $\alpha$  v polju Diracovega magnetnega monopola s polom v središču sfere. Ta monopol določa forma  $\omega_m$ . Z nekaj truda lahko izpeljemo enačbo gibanja tega sistema. Dobimo

$$-[q_{tt}, q] + \alpha q_t = [\sigma, q]. \quad (15)$$

Simplektični kvocient Maxwell-Blochovega sistema  $(T^*LSU(2), \omega_c + \omega_i, H)$  konstruiramo na analogen način. V tem primeru imamo delovanje grupe preslikav  $LU_\tau(1) = \{u(x): \mathbb{R} \rightarrow U_\tau(1)\}$ . Simplektični kvocient glede na to delovanje je hamiltonski sistem  $(T^*LS^2, \omega_c + \alpha \omega_{cm} + \omega_{ip}, H_{csp})$ , kjer je

$$H_{csp}(q, p_q) = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} \|p_q\|^2 + \langle \sigma, q \rangle \right) dx, \quad q: \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathfrak{su}(2), \quad p_q: \mathbb{R} \rightarrow T^*S^2,$$

$$(\omega_{ip})_{(q, p_q)}(X_{p_q}, Y_{p_q}) = \int_{\mathbb{R}} \langle (\widehat{X}_q)_x, \widehat{Y}_q \rangle dx, \quad \text{in} \quad (\omega_{cm})_{(q, p_q)}(X_{p_q}, Y_{p_q}) = \int_{\mathbb{R}} \langle q, [\widehat{X}_q, \widehat{Y}_q] \rangle dx.$$

Z nekaj dela lahko izpeljemo enačbo gibanja tega sistema. Ugotovitve strnemo v izrek:

**Izrek.** Simplektični kvocient Maxwell-Blochovega hamiltonskega sistem z grupo  $LU_\tau(1)$  je hamiltonski sistem  $(T^*LS^2, \omega_c + \alpha \omega_{cm} + \omega_{ip}, H_{csp})$ . Ta sistem opisuje verigo sferičnih nihala z električnim nabojem  $\alpha$ , na katere deluje Lorentzova sila Diracovih magnetnih monopolov s poli v središčih sfer. Te pole podaja forma  $\omega_{cm}$ . Sosednja nihala med seboj interagirajo prek sile magnetnega tipa, ki jo določa forma  $\omega_{ip}$ . Enačba gibanja tega sistema je

$$-[q_{tt}, q] + \alpha q_t = [\sigma, q] + c(q_t - \alpha q)_x.$$

Sredstva in izračune, potrebne za dokaz zgornjega izreka, lahko bralec najde v [3], [4] ter v drugem in tretjem poglavju knjige [2]. S pomočjo zgornje enačbe lahko izračunamo solitonske rešitve zgornjega sistema. Naj bo

$$q(x, t) = f(kx - vt) = f(s): \mathbb{R} \rightarrow S^2 = \{q; q = \text{Ad}_g(\tau), g \in SU(2)\} \subset \mathfrak{su}(2)$$

potujoča rešitev te enačbe. Tedaj bo  $q(x, t)$  rešitev natanko tedaj, ko bo  $f(s)$  rešitev enačbe

$$-[f_{ss}, f] + \left(-\frac{\alpha}{v}\right) f_s = \left[\frac{1}{v^2 - vkc} \sigma, f\right].$$

To pa je enačba (15) za magnetno sferično nihalo z nekoliko spremenjenimi parametri. Oscilatorne rešitve te enačbe nam dajo nelinearne nihajoče potujoče rešitve. Vemo pa, da ima sferično nihalo tudi homoklinično rešitev, vzdolž katere je energija enaka energiji v labilnem ravnovesju. Geometrijsko mesto homoklinične orbite je glavni krog skozi labilno ravnovesje. Magnetna sila monopola ta krog nagne stran od glavnega kroga, še vedno pa gre skozi isto labilno ravnovesje. Večji ko je naboj nihajočega delca, bolj je krog odklonjen. Homoklinične rešitve nam dajo solitonske rešitve reduciranega Maxwell-Blochovega sistema.

Poiskati moramo torej homoklinične rešitve magnetnih sferičnih nihali z različnimi naboji. Enačbo (15) lahko prepisemo v Laxovo obliko.

$$L_t = [L, A]$$

$$L = -\frac{1}{z} q - [q_t, q] + \alpha q - z\sigma, \quad A = [q_t, q] - \alpha q + z\sigma.$$

Funkcija  $\frac{1}{2}\text{Sl}(L \cdot L)(z)$  je zato neodvisna od  $t$  in nam da dve netrivialni ohranitveni količini:

$$H(q, p_q) = \frac{1}{2} \|[q_t, q]\|^2 + \langle \sigma, q \rangle, \quad G(q, p_q) = \langle [q_t, q], \sigma \rangle + 2\alpha \langle \sigma, q \rangle.$$

V nestabilnem ravnovesju imamo  $q = \sigma$  in  $p_q = 0$ . Zato je  $H(q, p_q) = 1$  in  $G(q, p_q) = \alpha$ . Opreмимо našo sfero  $S^2$  s sferičnimi koordinatami

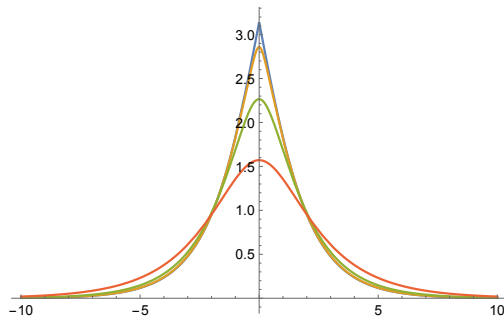
$$q(\varphi(s), \vartheta(s)) = \begin{pmatrix} i \cos(\vartheta(s)) & e^{i\varphi(s)} \sin \vartheta(s) \\ -e^{-i\varphi(s)} \sin \vartheta(s) & i \cos(\vartheta(s)) \end{pmatrix}.$$

Zgornji dve enačbi se tedaj glasita

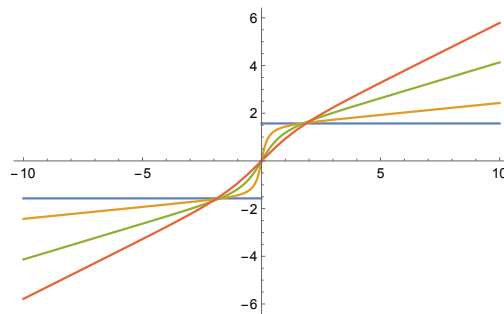
$$(\vartheta')^2 + \sin^2(\vartheta)(\varphi')^2 + \cos(\vartheta) = 1 \quad \text{in} \quad 2\sin^2(\vartheta)(\varphi') + \alpha \cos(\vartheta) = \alpha.$$

Vzemimo  $v = 1$  in  $v^2 - vkc = 1$ . Označimo  $\gamma = \sqrt{2 - \alpha^2}$ . Z nekaj računanja dobimo rešitev

$$\begin{aligned} \vartheta(s, \alpha) &= \text{Arccos}\left(-1 + \alpha^2 + \gamma^2 \tanh^2\left(\frac{1}{2}\gamma s\right)\right) \quad \text{in} \\ \varphi(s, \alpha) &= \frac{\alpha t}{2} + \frac{\gamma \text{Arccoth}\left(\frac{\alpha \coth\left(\frac{1}{2}\gamma s\right)}{\sqrt{\alpha^2 - 2}}\right)}{\sqrt{\alpha^2 - 2}}. \end{aligned} \quad (16)$$



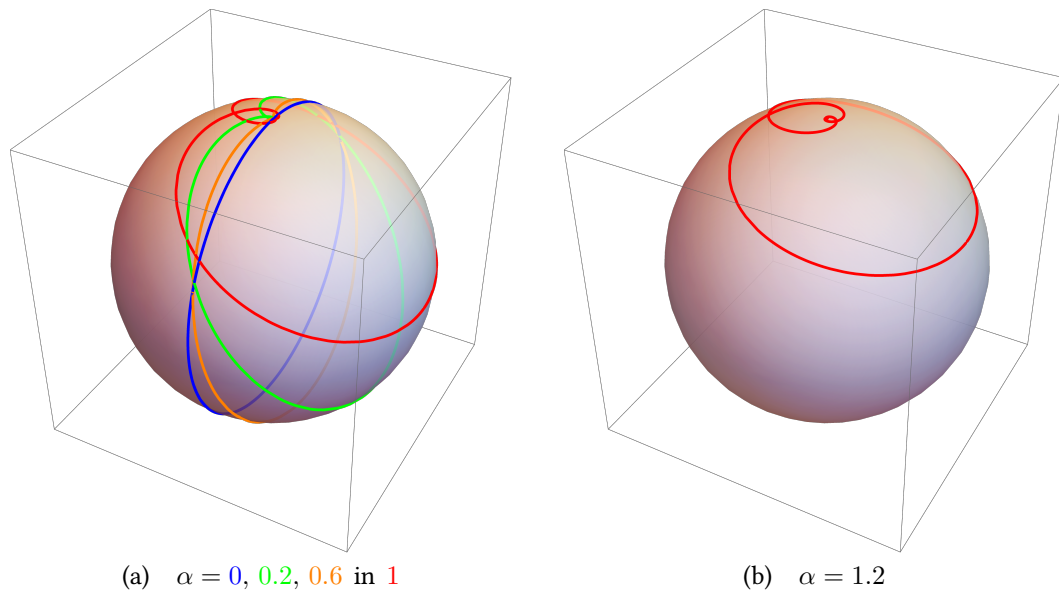
(a)  $\vartheta(s, \alpha)$  za  $\alpha = 0, 0.2, 0.6$  in  $1$



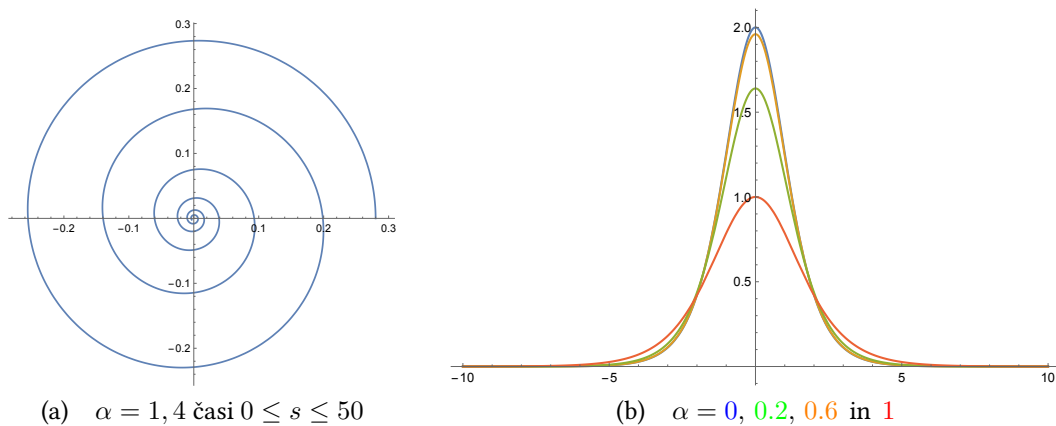
(b)  $\varphi(s, \alpha)$  za  $\alpha = 0, 0.2, 0.6$  in  $1$

Slika 1: Grafi funkcij sferičnih koordinat  $\vartheta(s, \alpha)$  in  $\varphi(s, \alpha)$  pri različnih vrednostih električnega naboja  $\alpha$

Rešitev (16) in slika 1 nam povesta, da je vedenje sferične koordinate  $\vartheta(s, \alpha)$  in zato tudi kartezične koordinate  $z(s, \alpha) = \cos(\vartheta(s, \alpha))$  tipično solitonsko pri vseh dopustnih vrednostih električnega naboja  $\alpha$ , koordinata  $\varphi(s, \alpha)$  pa pri neničelnih  $\alpha$  in pri velikih  $|s|$  narašča približno linearno. Pri dovolj velikih  $|s|$  zato kartezični koordinati  $x(s, \alpha)$  in  $y(s, \alpha)$  nihata. To nihanje ni periodično, saj se amplituda s časom manjša. Ko se delec približuje vrhu sfere, se dinamična komponenta gravitacijske sile manjša, zato se tam večja vpliv Lorentzove sile, ki delec rotira okoli vrha sfere. To nam pokažeta slika 2 (b) in slika 3 (a). Pri majhnih  $\alpha$  se kroženje začne zelo pozno in se dogaja samo v zelo majhni okolici vrha sfere. Pri  $\alpha = 0$  pa dobimo klasičen soliton. Na sliki 1 (a) in (b) ter na sliki 2 (b) je narisana z modro barvo. Ta soliton je dobro znana rešitev sinus-Gordonove enačbe, imenovana  $2\pi$ -solitonski pulz. Intenzivnost dobljenih solitonov Maxwell-Blochovega sistema najboljše ilustrira količina  $1 - D(s, \alpha) = 1 - \cos \vartheta(s, \alpha)$ , prikazana na sliki 3(b).



Slika 2: Tiri magnetnega sferičnega nihala pri različnih vrednostih električnega naboja  $\alpha$ ;  $-10 \leq s \leq 10$



Slika 3: Projekcija sferičnega tira na ravnino  $xy$  in intenzivnosti solitonov v odvisnosti od  $\alpha$

Eksplicitne izraze za spremenljivke Maxwell-Blochove enačbe  $E(s)$ ,  $P(s)$  in  $D(s)$ , združene v matriki, podani s formulama (7), dobimo s pomočjo simplektične rekonstrukcije. Lahko pa tudi uporabimo enačbi

$$\rho(s) = q(s), \quad \text{in} \quad \langle F(s), q(s) \rangle = \alpha$$

ki izhajata iz (9) in (13), iz druge enakosti v (14) in iz  $\mu(q, p_q) = \alpha$ . Nato uporabimo še prvo enačbo v (6) in dobimo iskane kolčine  $E(t, x)$ ,  $P(t, x)$  in  $D(t, x)$ .

#### 4. Zaključek

V prvem razdelku smo povedali, da v fiziki velikokrat poskušamo kompleksen sistem analizirati tako, da ga predstavimo v obliki množice enostavnih sistemov, ki med seboj interagirajo na določen način. Klasičen primer takega pristopa je diskretizacija KdV enačbe, ki pripelje do sistema Fermi-Pasta-Ulam. Ta diskretni sistem je veriga neharmoničnih nihala, ki interagirajo med seboj. Enačbo KdV dobimo kot kontinuumsko limito tega sistema.

V nadaljevanju smo na ta način opisali Maxwell-Blochov sistem, ki opisuje nelinearno interakcijo med svetlobo in optičnim medijem, katerega atomi imajo dva energijska nivoja. Maxwell-Blochov sistem smo najprej predstavili kot verigo Neumannovih nihala, ki med seboj interagirajo s silo magnetnega tipa. Neumannovo nihalo v tem primeru opisuje harmonično nihalo, katerega gibanje je omejeno na tridimenzionalno sfero  $S^3 = SU(2)$ . To nam omogoči Maxwell-Blochov sistem zapisati kot hamiltonski sistem na faznem prostoru  $LSU(2) = \{g(x): \mathbb{R} \rightarrow SU(2)\}$ . Neumannovo nihalo, ki nastopa v tem opisu, ni splošno, ampak je invariantno na delovanje grupe krožnice, pravilno

vložene v konfiguracijski prostor  $SU(2)$ . Zato lahko reduciramo fazni prostor  $T^*SU(2)$  Neumanovega nihala na  $T^*S^2$ , kjer je  $S^2$  dvodimenzionalna sfera, vložena v Liejevo algebro  $\mathfrak{su}(2)$ . Reducirani sistem je električno nabito gravitacijsko nihalo na sferi  $S^2$ , na katero deluje še Lorentzova sila magnetnega monopola s polom v središču sfere. Tako lahko predstavimo Maxwell-Blochov sistem kot verigo interagirajočih magnetnih sferičnih nihali, ki med seboj interagirajo prek sile magnetnega tipa.

S pomočjo opisane predstavitve dobimo družino potujočih rešitev Maxwell-Blochovega sistema. Generične orbite sferičnega magnetnega nihala dajo nihajoče potujoče rešitve. Za vsako izbiro električnega naboja  $\alpha$  pa dobimo tudi homoklinično orbito našega magnetnega nihala. Homoklinične orbite nam dajo solitonske rešitve. Ti solitoni niso običajni. V sredini imajo obliko osamljenega vala, dlje od središča pa nihajo z vedno manjšo amplitudo.

V uvodu smo omenili superpozicijo solitonov v večsolitonske rešitve. V teoriji integrabilnih parcialnih diferencialnih enačb imamo več načinov za izračunavanje nelinearnih superpozicij rešitev. Najbolj znani sta Bäcklundova in Darbouxova transformacija, pa tudi tako imenovana metoda oblačenja (dressing method). Upamo lahko, da bo predstavitev Maxwell-Blochovega sistema v obliki verige interagirajočih nihali skupaj z že znanimi metodami osvetlila fenomen nelinearne superpozicije.

## Viri

- [1] T. Douxois, M. Peyrard, *Physics of Solitons*, Cambridge University Press, New York, 2006
- [2] J. E. Marsden, *Lectures on Mechanics*, London Mathematica Society Lecture Notes 174, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [3] P. Saksida, *Maxwell-Bloch equations, C Neumann system and Kaluza-Klein theory*, J. Phys. A: Math. Theor. 38 (2005), 10321–10344
- [4] P. Saksida, *Lattices of Neumann oscillators and Maxwell-Bloch equation*, Nonlinearity 19 (2006), 747–768

20

## Natančne predstavitve delov sfere nad platonskimi telesi s pomočjo racionalnih S-ploskev

**Avtorica:** Ada Šadl Praprotnik<sup>1</sup>

**Soavtor:** Jan Grošelj<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

<sup>2</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

### 1. Uvod

Pri modeliranju in grafičnem oblikovanju s pomočjo računalnika pogosto potrebujemo enostavno predstavitev osnovnih geometrijskih objektov, katerih klasični predstavnik je prav sfera. Znano je, da lahko sfero s polinomsko parametrizacijo le aproksimiramo, če potrebujemo njeno natančno predstavitev, pa moramo uporabiti racionalno reprezentacijo. V okviru tega prispevka bomo s pomočjo večstranih Bézierjevih ploskev predstavili metodo za natančne predstavitve delov sfere, ki se razpenjajo nad ploskvami sferi vrtanih platonskih teles.

V nadaljevanju bomo najprej definirali racionalne večstrane Bézierjeve ploskve, t. i. S-ploskve, nato pa bomo predstavili splošno metodo, ki temelji na lastnostih platonskih teles in omogoča natančno predstavitev dela sfere v obliki S-ploskve. Predstavljeno metodo bomo nato uporabili na ploskvah vseh petih platonskih teles. Dobljene S-ploskve bodo definirane nad 3-, 4- ali 5-stranimi domenami, odvisno od izbire platonskega telesa. Opisani pristop združuje dve že znani konstrukciji, ki temeljita na trikotnih in tenzorskih Bézierjevih ploskvah [1, 2], hkrati pa predstavi tri nove ploskve, kar omogoča predstavitev sfere nad vsemi petimi platonskimi telesi.

### 2. S-ploskve

S-ploskve so večstrane Bézierjeve ploskve, ki združujejo trikotne in tenzorske Bézierjeve ploskve, hkrati pa predstavljajo njihovo posplošitev; S-ploskev lahko namreč definiramo na poljubni  $n$ -strani konveksni domeni,  $n \geq 3$ .

**Definicija 1.** Racionalna  $n$ -strana S-ploskev globine  $d$  je preslikava  $S : P \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , oblike  $S = B \circ E$ , kjer je

- $E : P \rightarrow \Delta$  vložitev  $n$ -kotnika  $P \subset \mathbb{R}^2$  v simpleks  $\Delta$  dimenzije  $n - 1$  in
- $B : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$  racionalna Bézierjeva preslikava, ki simpleks  $\Delta$  preslika v ploskev v  $\mathbb{R}^m$ .

Natančneje,

$$S(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_n^d} w_{\mathbf{i}} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^d(E(\mathbf{p}))}{\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_n^d} w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^d(E(\mathbf{p}))}, \quad \mathbf{p} \in P,$$

kjer je  $\mathcal{I}_n^d = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid \sum_{k=1}^n i_k = d\}$  množica multiindeksov  $\mathbf{i}$ . Točke  $\mathbf{b}_{\mathbf{i}} \in \mathbb{R}^m$  imenujemo kontrolne točke, skalarje  $w_{\mathbf{i}} \in \mathbb{R}_0^+$  pa uteži. Funkcije  $B_{\mathbf{i}}^d$  predstavljajo Bernsteinove bazne polinome več spremenljivk stopnje  $d$ .

Robne krivulje S-ploskve globine  $d$  so Bézierjeve krivulje stopnje  $d$ . V potenčni bazi lahko S-ploskev predstavimo kot kvocient dveh polinomov, katerih stopnja v splošnem ni enaka  $d$  in je odvisna od izbire vložitve  $E$ . V izogib dvojni uporabi besede *stopnja*, število  $d$  v definiciji S-ploskve imenujemo *globina*. Vložitev  $E$  mora biti izbrana tako, da preslika točke na robu  $n$ -kotnika na rob simpleksa, točke v notranjosti  $n$ -kotnika pa v notranjost simpleksa. Izbira preslikave  $E$  ne vpliva na geometrijo S-ploskve, le na njeno parametrizacijo. Več o S-ploskvah lahko bralec prebere v [4].

### 3. Metoda za predstavitev dela sfere v obliki S-ploskve

V tem poglavju bomo predstavili t. i. metodo kompozituma, ki omogoča predstavitev dela sfere v obliki S-ploskve. Metoda kompozituma temelji na uporabi stereografske projekcije.

**3.1. Stereografska projekcija.** Stereografska projekcija  $\sigma$  je preslikava, ki točke na neki ravnini preslika na dano sfero. V nadaljevanju navajamo predpis za slikanje točk iz ravnine  $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -1\}$  na enotsko sfero  $\Sigma$ ,

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Naj bo  $\tilde{\mathbf{x}} = (x, y, -1)$  točka v ravnini  $\Pi$ . Njeno sliko  $\mathbf{x}$  na sferi  $\Sigma$  dobimo tako, da skozi točko  $\tilde{\mathbf{x}}$  in sferični severni pol, tj. točko  $(0, 0, 1)$ , potegnemo premico. Točka  $\mathbf{x}$  je definirana kot presečišče dobljene premice in sfere  $\Sigma$ . Predpis za stereografsko projekcijo je

$$\sigma(x, y, -1) = \left( \frac{4x}{x^2+y^2+4}, \frac{4y}{x^2+y^2+4}, \frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4} \right), \quad (17)$$

predpis za njen inverz pa je

$$\sigma^{-1}(x, y, z) = \left( \frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, -1 \right). \quad (18)$$

Točka  $(0, 0, 1)$  se po zgornjem predpisu preslika v točko v neskončnosti.

V nadaljevanju bomo potrebovali dve pomembni lastnosti stereografske projekcije in njenega inverza. Prvič, obe preslikavi sta konformni preslikavi, in drugič, stereografska projekcija slika krožnice v ravnini v krožnice na sferi. Slednja lastnost velja tudi za inverzno stereografsko projekcijo, z izjemo krožnic, ki potekajo skozi točko  $(0, 0, 1)$ , saj se te preslikajo v premice.

**3.2. Metoda kompozituma.** Parametrizacije delov sfere nad platonskimi telesi bomo določili s pomočjo metode kompozituma. Platonska telesa v sfero včrtamo tako, da so njihove najnižje ploskve vzporedne ravnini  $\Pi$ . V nadaljevanju bomo predstavili postopek za opis tistega dela sfere, ki se razpenja nad najnižjo ploskvijo posameznega sferi včrtanega platonskega telesa. V vseh petih primerih je del sfere, ki ga želimo predstaviti, del neke južne sferične kapice, zato bomo s pomočjo le-te predstavili splošno metodo, ki jo lahko nato uporabimo za vsako platonsko telo posebej.



Metoda kompozituma sestoji iz dveh korakov. Najprej del sfere, ki ga želimo predstaviti, s pomočjo inverzne stereografske projekcije preslikamo na ravnino  $\Pi$  in poiščemo parametrizacijo dobljenega ravninskega območja v obliki racionalne S-ploskve  $\tilde{S}$  globine 2. Nato ploskev  $\tilde{S}$  s stereografsko projekcijo preslikamo nazaj na sfero in določimo parametrizacijo dobljenega dela sfere v obliki S-ploskve  $S$  globine 4. Dobljena ploskev  $S$  je tako rezultat kompozicije dveh preslikav; parametrizacije  $\tilde{S}$  in stereografske projekcije.

Najprej si oglejmo, kako v prvem koraku metode kompozituma določimo ravninsko S-ploskev  $\tilde{S}$ . Naj  $C$  označuje krožnico, ki omejuje sferično kapico. Za vsako platonsko telo velja, da je njegova najnižja ploskev včrtana krožnici  $C$ , ki pripada neki sferični kapici. Enačbo krožnice  $C$  lahko zapišemo v obliki

$$C = \left\{ (\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi), \zeta) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, \rho = \sqrt{1 - \zeta^2} \right\},$$

kjer  $\zeta$  predstavlja višino najnižje ploskve telesa. Ogljišča te ploskve ležijo na krožnici  $C$  in jih lahko zapišemo v obliki

$$\mathbf{p}_k = (\rho \cos(\varphi_k), \rho \sin(\varphi_k), \zeta), \quad \varphi_k = \varphi_0 + 2\pi \frac{k}{n}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

za izbran  $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ . Krožnico  $C$  in točke  $\mathbf{p}_k$  z inverzno stereografsko projekcijo preslikamo na ravnino  $\Pi$ . Inverzna stereografska projekcija bo krožnico  $C$  preslikala v krožnico  $\tilde{C}$ . Enačbo krožnice  $\tilde{C}$  izračunamo s pomočjo predpisa (18) in dobimo

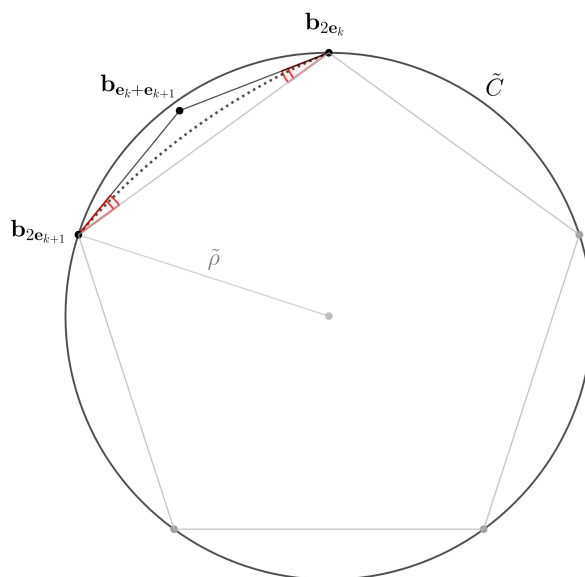
$$\tilde{C} = \left\{ (\tilde{\rho} \cos(\varphi), \tilde{\rho} \sin(\varphi)) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, \tilde{\rho} = 2\sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}} \right\},$$

kjer zadnjo komponento izpustimo, saj je enaka  $-1$ . Na enak način izračunamo slike točk  $\mathbf{p}_k$  in dobimo točke

$$\mathbf{b}_{2e_k} = (\tilde{\rho} \cos(\varphi_k), \tilde{\rho} \sin(\varphi_k)), \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (19)$$

kjer  $e_k$  označuje  $n$ -terico, ki ima na  $k$ -tem mestu število 1, drugje pa ničle. Točke  $\mathbf{b}_{2e_k}$  ležijo na krožnici  $\tilde{C}$  in predstavljajo tiste robne kontrolne točke ravninske S-ploskve  $\tilde{S}$ , ki so povezane z oglišči domenskega  $n$ -kotnika. Uteži teh kontrolnih točk so enake 1.

Ravninska ploskev  $\tilde{S}$  leži znotraj krožnice  $\tilde{C}$  in je omejena s krožnimi loki, ki jih omejujejo točke (19). Določiti moramo še sredinske kontrolne točke teh krožnih lokov, tj. robne kontrolne točke oblike  $\mathbf{b}_{e_k+e_{k+1}}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , kjer indeks  $k$  razumemo ciklično. Postopek za določitev racionalne Bézierjeve krivulje stopnje 2, ki predstavlja krožni lok, je standarden.



Slika 1: Kontrolne točke  $\mathbf{b}_{2e_k}$ ,  $\mathbf{b}_{e_k+e_{k+1}}$ ,  $\mathbf{b}_{2e_{k+1}}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , ravninske S-ploskve  $\tilde{S}$  tvorijo enakokrak trikotnik z notranjim kotom  $\alpha$  (rdeča). Krožni lok, ki ga te točke in njihove uteži določajo, je označen črtkano.

Kontrolne točke take krivulje morajo določati enakokrak trikotnik, utež srednje kontrolne točke pa mora biti enaka  $\cos \alpha$ . Kot  $\alpha$  v tem primeru označuje notranji kot enakokrakega trikotnika, ki je ponazorjen na sliki 1. Tako določimo vse robne kontrolne točke in uteži ploskve  $\tilde{S}$ . V primeru, da ima  $\tilde{S}$  tudi notranje kontrolne točke, lahko te izberemo poljubno, dokler ležijo v notranjosti ploskve.

Za določitev ravninske ploskve  $\tilde{S}$  torej potrebujemo parametre  $\zeta$ ,  $\varphi_0$  in  $\alpha$ , ki so vsi odvisni od izbire platonskega telesa. Kot  $\varphi_0$  je odvisen od tega, kako platonsko telo včrtamo v sfero in od števila stranic njegovih ploskev, kot  $\alpha$  pa izračunamo kot

$$\alpha = \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (20)$$

kjer  $n$  predstavlja število stranic posamezne ploskve telesa,  $q$  pa število stranic, ki se stikajo v vsakem oglišču. Formulo (20) dobimo po sledečem postopku. Recimo, da želimo s S-ploskvami pokriti celotno sfero, in sicer tako, da se ploskve ne prekrivajo, razen po robnih krivuljah. Te robne krivulje se stikajo v ogliščih platonskih teles in kot  $\gamma$  med dvema robnima krivuljama iste S-ploskve je enak  $\frac{2\pi}{q}$ . Omenili smo, da je inverzna stereografska projekcija konformna preslikava, kar pomeni, da mora biti tudi kot med dvema robnima krivuljama ravninske S-ploskve  $\tilde{S}$  enak  $\gamma$ . V ravnini opazimo, da velja  $\gamma = 2\alpha + \beta$ , kjer je  $\beta$  notranji kot pravilnega  $n$ -kotnika, ki ga določajo točke (19). Velja  $\beta = \frac{n-2}{n}\pi$  in  $\alpha = \frac{\gamma-\beta}{2}$ , kar se poenostavi v formulo (20).

V drugem koraku metode kompozituma najprej uporabimo formulo (17) za stereografsko projekcijo in dobljeno ploskev  $\tilde{S}$  preslikamo nazaj na sfero. Nato poiščemo predstavitev dobljenega območja na sferi v obliki S-ploskve  $S$  globine 4 glede na definicijo 1. Za določitev kontrolnih točk in uteži ploskve  $S$  si pomagamo s programskim paketom *Mathematica*.

#### 4. Predstavitve delov sfere nad platonskimi telesi

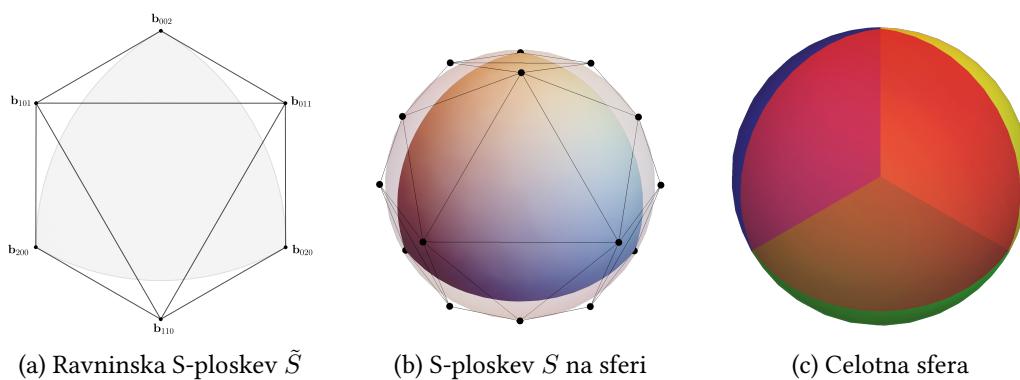
Konstrukcijo, opisano v 3. poglavju, sedaj uporabimo na vseh petih platonskih telesih, to so tetraeder, oktaeder in ikozaeder s tristranimi ploskvami, kocka s štiristranimi ploskvami in dodekaeder s petstranimi ploskvami. Telesa v sfero včrtamo tako, da so njihove najnižje ploskve vzporedne ravnini  $\Pi$  in simetrične glede na ravnino  $x = 0$ . V primeru, da ima ploskev tri oz. pet stranic, jo postavimo tako, da je  $y$ -koordinata oglišča, ki leži v ravnini  $x = 0$ , pozitivna. Kocko postavimo tako, da nobeno oglišče njene najnižje ploskve ne leži v ravnini  $x = 0$ .

V tabeli 1 so zbrani parametri, ki jih potrebujemo za določitev robnih kontrolnih točk ploskve  $\tilde{S}$  v prvem koraku metode kompozituma. Za notranje kontrolne točke ploskve  $\tilde{S}$  v primeru kocke izberemo točko  $(0, 0)$  in utež  $\cos \alpha$ , v primeru dodekaedra pa s faktorjem  $\frac{1}{3}$  pomnožimo robne kontrolne točke, podane s (19), njihove uteži pa prav tako nastavimo na  $\cos \alpha$ .

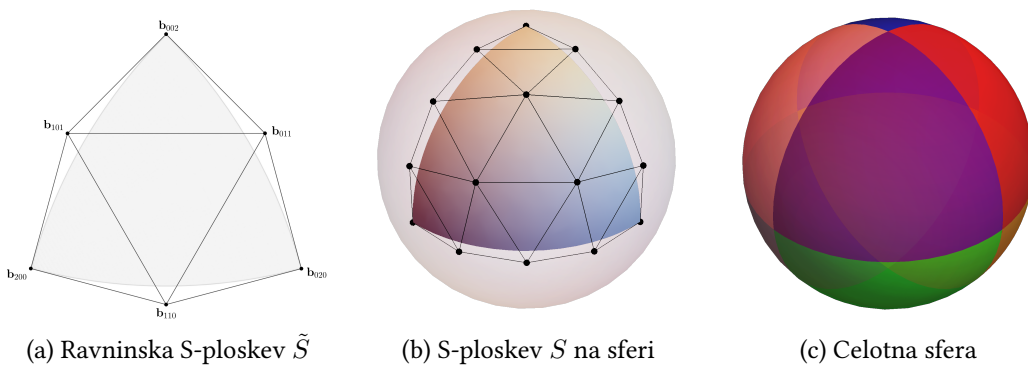
Slike 2(a)–6(a) prikazujejo dobljene ravninske ploskve  $\tilde{S}$ , slike 2(b)–6(b) pa dobljene ploskve  $S$  na sferi, ki so rezultat drugega koraka metode kompozituma. Kontrolnih točk in uteži ploskev  $S$  tukaj ne navajamo, temveč bralca napotimo na članek [3] ali demonstracijo [5]. Z ustreznimi rotacijami dobljenih ploskev  $S$  lahko pokrijemo celotno sfero, kar prikazujejo slike 2(c)–6(c).

Platonsko telo	$n$	$q$	$\zeta$	$\varphi_0$	$\alpha$
Tetraeder	3	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
Oktaeder	3	4	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$
Ikozaeder	3	5	$-\sqrt{\frac{1}{15}(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{30}$
Kocka	4	3	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}$
Dodekaeder	5	3	$-\sqrt{\frac{1}{15}(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{\pi}{30}$

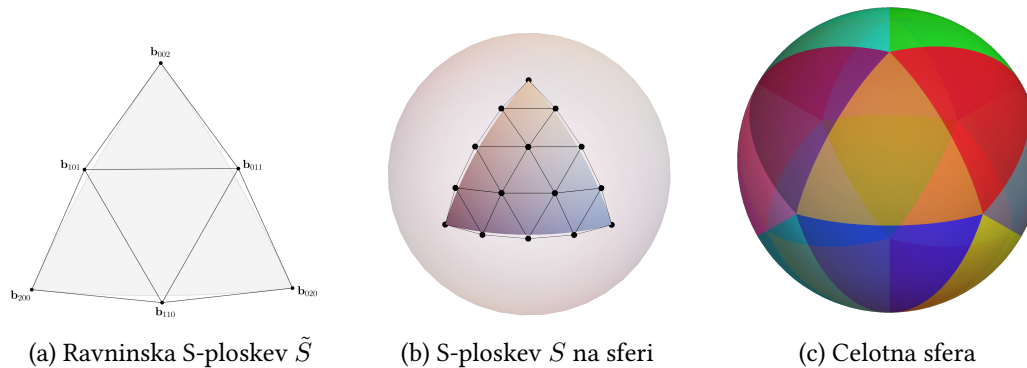
Tabela 1: Parametri  $n$ ,  $q$ ,  $\zeta$ ,  $\varphi_0$  in  $\alpha$ .



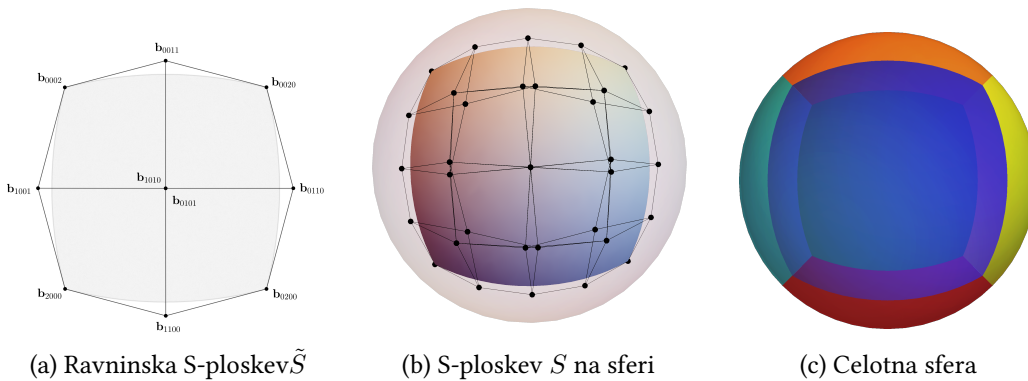
Slika 2: S-ploskvi  $\tilde{S}$  in  $S$  v primeru tetraedra in celotna sfera, pokrita s štirimi S-ploskvami.



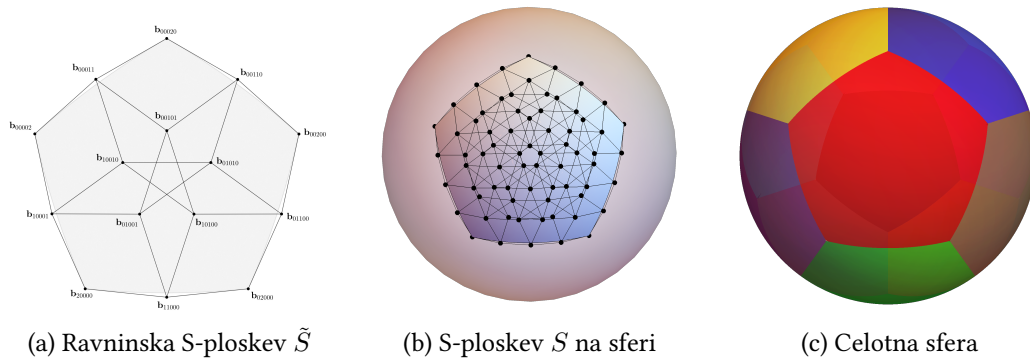
Slika 3: S-ploskvi  $\tilde{S}$  in  $S$  v primeru oktaedra in celotna sfera, pokrita z osmimi S-ploskvami.



Slika 4: S-ploskvi  $\tilde{S}$  in  $S$  v primeru ikozaedra in celotna sfera, pokrita z dvajsetimi S-ploskvami.



Slika 5: S-ploskvi  $\tilde{S}$  in  $S$  v primeru kocke in celotna sfera, pokrita s šestimi S-ploskvami.



Slika 6: S-ploskvi  $\tilde{S}$  in  $S$  v primeru dodekaedra in celotna sfera, pokrita z dvanajstimi S-ploskvami.

## Viri

- [1] J. E. Cobb, *Tiling the sphere with rational Bézier patches*, University of Utah Computer Science Technical Report (1988), 1–14.
- [2] G. Farin, B. Piper in A. J. Worsey, *The octant of a sphere as a non-degenerate triangular Bézier patch*, Computer Aided Geometric Design 4 (1987), 329–332.
- [3] J. Grošelj in A. Šadl Praprotnik, *Exact Sphere Representations over Platonic Solids Based on Rational Multisided Bézier Patches*, Computer Aided Geometric Design 98 (2022), 102–148.
- [4] C. T. Loop in T. D. DeRose, *A multisided generalization of Bézier surfaces*, ACM Trans. Graph. 8 (1989), 204–234.
- [5] A. Šadl Praprotnik, *Exact Sphere Representations over Platonic Solids Based on Rational Multisided Bézier Patches*, Wolfram Demonstrations Project (2022).

41

## MLFMF: Podatkovne množice za strojno učenje za formalizacijo matematike

**Avtor:** Ljupčo Todorovski<sup>1</sup>

**Soavtorja:** Andrej Bauer<sup>1</sup>; Matej Petković<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Predstavljamo *MLFMF*, zbirko podatkovnih množic za primerjalno analizo sistemov za priporočanje, ki se uporabljajo pri podpori formalizacije matematike s pomočniki za dokazovanje (angl. *proof assistants*). Ti sistemi pomagajo ljudem ugotoviti, kateri prejšnji vnosi (izreki, leme, aksiomi in podatkovni tipi) so uporabni pri dokazovanju novega izreka ali implementaciji novega vnosa.

Vsaka podatkovna množica v zbirki je zgrajena iz pripadajoče knjižnice formalizirane matematike, zapisane v pomočnikih za dokazovanje Agda ali Lean. Zbirka podatkovnih množic vključuje Mathlib (največjo knjižnico za Lean 4) in nekaj največjih Agdinih knjižnic: standardno knjižnico, knjižnico univalentne matematike Agda-unimath in knjižnico TypeTopology. Vsaka podatkovna množica predstavlja ustrezno knjižnico na dva načina: kot heterogeno omrežje in kot seznam s-izrazov, ki predstavljajo sintaksna drevesa posameznih vnosov v knjižnici. Omrežje vsebuje (modularno) strukturo knjižnice in reference med vnosi, medtem ko s-izrazi dajejo popolne in računalniku dostopne informacije o vsakem vnosu.

Poročamo o osnovnih rezultatih z uporabo standardnih vpetij grafov in besed, drevesnih ansamblov in algoritmov strojnega učenja, ki temeljijo na najbližjih sosedih. Podatkovne množice *MLFMF* zagotavljajo dobro podlago za nadaljnje raziskovanje in primerjalno analizo poljubnih pristopov strojnega učenja k formalizirani matematiki. Metodologija, uporabljena za pretvorbo knjižnic v omrežja in s-izraze, se zlahka uporablja tudi za druge knjižnice in druge pomočnike za dokazovanje. S

skupno več kot 250 000 vnosi je to trenutno največja zbirka formaliziranega matematičnega znanja v obliki, primerni za uporabo algoritmov strojnega učenja.

## Predstavitev plakatov (raziskovalno–aplikativna sekcija) / 40

### Kvazikonformna kirurgija in Hermanovi kolobarji

Avtor: Beno Učakar<sup>1</sup>

<sup>1</sup> študent UL FMF

Predstavljen je način, kako s pomočjo kvazikonformne kirurgije konstruirati racionalno preslikavo, ki premore Hermanov kolobar, torej 2-povezano Fatoujevo komponento z dinamiko iracionalne rotacije. Delo je avtorjeva diplomska naloga, ki je nastala pod mentorstvom doc. dr. Uroša Kuzmana in je v letu 2022 prejela fakultetno Prešernovo nagrado Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani [2].

Naj bo  $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  racionalna preslikava. Z  $R^n$  označimo  $n$ -ti iterat funkcije. V kompleksni dinamiki nas zanima obnašanje orbite točke  $z_0 \in \mathbb{C}$  pod iteracijo s preslikavo  $R$ , torej obnašanje množice  $\{R^n(z_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Izkaže se, da lahko to dinamiko proučujemo globalno. Definiramo *Fatoujevo množico* kot največjo odprto podmnožico kompleksne ravnine, na kateri je družina iteratov  $\{R^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  enakozvezna, in *Juliajevo množico* kot njen komplement. To poenostavljeno pomeni, da je točka v Fatoujevi množici, če imajo bližnje točke podobno dinamiko kot prvotna točka, in v Juliajevi množici, če je poljubno blizu prvotne točke kakšna točka, katere dinamika je bistveno drugačna. Običajno Juliajeva množica razdeli Fatoujevo množico na več komponent za povezanost.

Znameniti klasifikacijski izrek nam pove, da glede na njihovo dinamiko obstaja le pet različnih tipov periodičnih Fatoujevih komponent racionalne preslikave. Za nas sta pomembna dva izmed teh tipov: *Sieglov disk*, enostavno povezana komponenta, na kateri je dinamika biholomorfnostno ekvivalentna rotaciji za iracionalen kot, in *Hermanov kolobar*, 2-povezana komponenta, kjer je dinamika prav tako biholomorfnostno ekvivalentna iracionalni rotaciji. Preslikave, ki premorejo Sieglov disk, so odkrili že v tridesetih letih 20. stoletja, primer preslikave, ki premore Hermanov kolobar, pa šele v devetdesetih letih. Razlog za to se skriva v dejstvu, da se Hermanovi kolobarji ne pojavijo pri polinomskih preslikavah, saj je za njihov obstoj potreben pol. Prvo takšno preslikavo je M. Herman konstruiral leta 1984, leta 1987 pa je M. Shishikura objavil članek [3], v katerem je s pomočjo kvazikonformne kirurgije konstruiral preslikavo s Hermanovim kolobarjem.

Osrednje orodje pri konstrukciji so kvazikonformne preslikave. Gre za nekoliko bolj fleksibilno posplošitev biholomorfnih oziroma konformnih preslikav. Naj bo  $f$   $C^1$ -difeomorfizem na območju  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , ki ohranja orientacijo. Definiramo *Beltramijev koeficient* preslikave  $f$  s predpisom

$$\mu_f(z) = \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}.$$

Beltramijev koeficient ima naslednjo geometrijsko interpretacijo. Naj bo  $p \in \Omega$ ,  $D_p f$  diferencial preslikave  $f$  v točki  $p$  in  $\mathbb{S}$  enotska krožnica. Tedaj je  $(D_p f)^{-1}(\mathbb{S})$  elipsa, katere razmerje med veliko in malo polosjo ter argument glede na veliko polos znašata

$$\frac{1 + |\mu_f(p)|}{1 - |\mu_f(p)|} \quad \text{in} \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\arg(\mu_f(p))}{2}.$$

Na ta način vsaki točki  $p \in \Omega$  priredimo družino koncentričnih elips

$$E_f(p) = \{(D_p f)^{-1}(\mathbb{S}_r) \mid r > 0\}.$$

Predpis  $E_f$  imenujemo *eliptično polje*.

Opazimo, da absolutna vrednost Beltramijevega koeficienta določa stopnjo izrojenosti eliptičnega polja. Preslikava bo *kvazikonformna*, če bo stopnja izrojenosti enakomerno omejena, če torej obstaja  $k < 1$ , da velja

$$\sup_{z \in \Omega} |\mu(z)| \leq k.$$

$C^1$ -difeomorfizem  $f$  deluje na eliptično polje  $E$  s povlekom, torej

$$(f^*E)(p) = (D_p f)^{-1}(E(f(p))).$$

Če je  $E_0$  *kanonično eliptično polje*, torej polje samih krožnic, lahko pišemo  $f^*E_0 = E_f$ . Če velja  $f^*E = E$ , pravimo, da je eliptično polje  $E$  *f*-invariantno.

Izkaže se, da lahko storimo tudi obratno. Če imamo skoraj povsod podan merljiv Beltramijev koeficient  $\mu$  in velja  $\|\mu\| < 1$ , potem obstaja kvazikonformna preslikava  $f$ , da velja  $\mu = \mu_f$ . Pravimo, da smo rešili *Beltramijevo enačbo*  $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ . To je tako imenovani integracijski izrek za kvazikonformne preslikave.

Konstrukcija iskane racionalne preslikave temelji na tehniki *kvazikonformne kirurgije*. Začnemo s polinomom  $p$ , ki premore Siegllov disk. Konstruiramo kvazikonformno preslikavo  $\Psi$ , ki deluje kot inverzija. Nato definiramo novo preslikavo

$$\tilde{p} = \Psi^{-1} \circ \left( z \rightarrow \overline{p(\bar{z})} \right) \circ \Psi,$$

ki ima neomejen Siegllov disk, na katerem je dinamika biholomorfno ekvivalentna rotaciji za isti iracionalen kot kot pri polinomu  $p$ . Znotraj Siegllovega diska polinoma  $p$  izberemo invariantno krivuljo  $\gamma$  in definiramo preslikavo  $g$ , tako da se predpis preslikave  $g$  na neomejeni komponenti, ki jo določa krivulja  $\gamma$ , ujema s predpisom polinoma  $p$  in na omejeni komponenti s predpisom preslikave  $\tilde{p}$ . Če povzamemo, smo izrezali del predpisa polinoma  $p$  in ga nadomestili s predpisom preslikave  $\tilde{p}$ . Pri tem je nastal tudi neke vrste šiv, vzdolž katerega se predpis preslikave  $g$  spremeni. Od tod tudi izvira ime metode.

Preslikava  $g$  je zvezna in ima zelene dinamične lastnosti, ni pa holomorfnna vzdolž šiva. Da jo popravimo, konstruiramo  $g$ -invariantno eliptično polje  $E$ . Izkaže se, da pripadajoč Beltramijev koeficient zadošča pogojem integracijskega izreka, tako da lahko najdemo kvazikonformno preslikavo  $\phi$ , ki nam porodi eliptično polje  $E$ . Sedaj definiramo preslikavo  $R = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$ . Veljalo bo

$$E_0 \xrightarrow{\phi^{-1}} E \xrightarrow{g} E \xrightarrow{\phi} E_0,$$

torej preslikava  $R$  slika kanonično eliptično polje nazaj v kanonično eliptično polje. Iz tega sledi, da je preslikava  $R$  holomorfnna, in če nanjo gledamo kot na endomorfizem Riemannove sfere, vidimo, da je tudi racionalna. Ker se dinamične lastnosti pri konjugaciji ohranjajo, ima tudi preslikava  $R$  zelene dinamične lastnosti in je tako naša iskana preslikava. Poljudno povedano to pomeni, da smo z uporabo kvazikonformnih preslikav poskrbeli za holomorfno celjenje rane, ki je nastala vzdolž šiva. Natančnejši opis konstrukcije lahko bralec najde v [1].

### Viri

- [1] B. Branner in N. Fagella, *Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, New York, 2014.
- [2] B. Učakar, *Kvazikonformna kirurgija in Hermanovi kolobarji*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2022.
- [3] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Supérieure, 20 (1987) 1–29.

## Sponzorji in soorganizatorji



Zavarovalnica Triglav



IMFM

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta *za matematiko in fiziko*



UL FMF



UP FAMNIT



SLOVENSKA AKADEMIJA  
ZNANOSTI IN UMETNOSTI

SAZU



Abelium