Priprave na MMO 2025 – 7. domača naloga

1. Za polinome A, B, C in D z realnimi koeficienti velja
$$A(x^5) + xB(x^5) + x^2C(x^5) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)D(x).$$
Dokaži, da je $A(1) = 0$.

2. Naj bo $P \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, za katerega je $P(n) > n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Naj bo $x_1, x_2, \ldots$ zaporedje, podano z $x_1 = 1$ in $x_{k+1} = P(x_k)$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Denimo, da za vsako naravno število m obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da $m \mid x_k$. Dokaži, da je $P(x) = x + 1$.

3. Naj bo $P \in \mathbb{R}[x]$ polinom, za katerega je $P(n)$ celo število za vsako naravno število n. Dokaži, da lahko P zapišemo v obliki
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \binom{x}{k},$$
kjer so c_k cela števila.

4. Naj bo $n > 10$ naravno število in $P_1, \ldots, P_n$ polinomi s koeficienti v množici $\{-1, 0, 1\}$. Denimo, da za vsak $k \leq n$ velja $|P_k(5)| \leq \frac{n^2}{2}$. Dokaži, da lahko izberemo take indekse $1 \leq i, j, k, l \leq n$, da velja $\{i, j\} \neq \{k, l\}$ in $P_i + P_j = P_k + P_l$.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **25. 5. 2025** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius, Citius, Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) .... (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

.... (*kraj in datum*) Podpis: