

Priprave na MMO 2025 – 3. domača naloga

1. Poišči vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere velja

$$f(2f(x)) = f(x - f(y)) + f(x) + y$$

za vsa realna števila x in y .

2. Poišči vse funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katere je enakost

$$xf(x + xy) = xf(x) + f(x)^2f(y)$$

izpolnjena za vsa realna števila x in y .

3. Poišči vse funkcije $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, za katere velja

$$f(x) + f(yf(x)^2) = f(x(xy + 1))$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}^+$.

4. Poišči vse bijekcije $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, za katere enakost

$$f^{f(m+n)}(mn) = f(m)f(n)$$

velja za vsa cela števila m in n . Pri tem je $f^0(n) = n$, za naravna števila k pa

$$f^k(n) = \underbrace{f(f(\dots f(n)\dots))}_k \quad \text{in} \quad f^{-k}(n) = \underbrace{f^{-1}(f^{-1}(\dots f^{-1}(n)\dots))}_k,$$

kjer f^{-1} označuje inverzno funkcijo f .

Naloga rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **15. 12. 2024** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius*, *Citius*, *Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) (ime in priimek) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

..... (kraj in datum)

Podpis: