# Priprave na MMO 2024 – 4. domača naloga

1. Naj bo $n$ naravno število. Dokaži, da ima število $2^{3^n} + 1$ vsaj $n + 1$ (ne nujno različnih) praštevilskih deliteljev oblike $8k + 3$ za $k \in \mathbb{N}_0$.

2. V vrsti stoji $n$ koz, pri čemer je vsaka obrnjena v levo ali desno. Izvedemo $n$ potez na naslednji način: v $k$-ti potezi izberemo $k$ različnih koz in jih obrnemo v nasprotno smer. Za katere vrednosti $n$ lahko ne glede na začetno postavitev izberemo poteze tako, da so po $n$ potezah vse koze obrnjene v isto smer?

3. Podano je zaporedje naravnih števil, za katerega velja $a_1 = 2$ in $a_{n+1} = 2^{a_n} + 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da $a_n$ deli $a_{n+1}$ za vsako naravno število $n$.

4. *Beseda* je poljubno zaporedje črk iz množice $\{a, b, c, d\}$. *Konvolucija* dolžine $2k$ je strnjeno podzaporedje črk znotraj besede, za katerega velja, da je podzaporedje njegovih prvih $k$ črk enako podzaporedju njegovih zadnjih $k$ črk. Beseda je *angleška*, če ne vsebuje konvolucije. Dokaži, da je za vsako naravno število $n$ angleških besed dolžine $n$ vsaj $2^{n+1}$.

---

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **28. 12. 2023** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference. Standardne literature (knjige *Altius*, *Citius*, *Fortius* in e-revije *Brihtnež*) ni potrebno navajati.

---

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani(-a) .................................. (*ime in priimek*) izjavljam, da sem vse naloge reševal(-a) samostojno in brez pomoči drugih oseb.

.................. (*kraj in datum*) Podpis:

# Rešitve

1. Za bazo izberemo $n = 1$ in dobimo $2^{3^1} + 1 = 9$, kar je dvakrat deljivo s 3 in izpolnjuje pogoj. Predpostavimo torej, da trditev drži za nek $k \in \mathbb{N}$ in pokažimo, da velja tudi za $k + 1$. Opazimo, da je

$$2^{3^{k+1}} + 1 = 2^{3 \cdot 3^k} + 1 = \left(2^{3^k}\right)^3 + 1^3 = \left(2^{3^k} + 1\right)\left(\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k} + 1\right).$$

Ker ima po indukcijski predpostavki $2^{3^k} + 1$ vsaj $k+1$ praštevilskih deliteljev želene oblike, je dovolj dokazati, da ima $\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k} + 1$ vsaj enega. Opazimo da za poljuben $k$ velja:

$$2^{3^k} \equiv (-1)^{3^k} \equiv -1 \pmod 3,$$

saj je $3^k$ liho število. Če preverimo deljivost tega faktorja s 3 tako dobimo

$$\left(2^{3^k}\right)^2 - 2^{3^k} + 1 \equiv (-1)^2 - (-1) + 1 = 3 \equiv 0 \pmod 3.$$

Skupaj smo tako našli $k + 2$ deliteljev želene oblike, kar zaključi našo indukcijo.

2. Pokazali bomo, da je to možno natanko takrat, ko je $n$ lih.

Denimo, da je $n$ sod. Preštejemo, koliko koz gleda v levo smer, in opazimo, da se parnost tega števila spremeni natanko tedaj, ko naredimo liho število obratov. Izberimo začetno konfiguracijo glede na parnost števila vseh obratov – če je to sodo, na začetku izberemo eno kozo, ki je obrnjena v levo, vse ostale pa naj bodo obrnjene v desno. Če je število vseh obratov liho, pa naj bodo kar vse obrnjene v levo. Skupaj bo tako na koncu v levo smer v obeh primerih gledalo liho število koz. Ker je število $n$ sodo, jih je tudi v desno smer obrnjenih liho mnogo, kar pomeni, da ni nobeno od teh števil enako 0.

Z indukcijo pokažimo, da liha števila ustrezajo pogoju. V primeru $n = 1$ je očitno, da bodo na koncu vse koze obrnjene v isto smer. Predpostavimo zdaj, da lahko to dosežemo za nek lih $m$, in dokažimo, da to velja tudi za $m + 2$. Ločimo dva primera:

i) Dve izmed $m + 2$ koz gledata v različne smeri. Ker vrstni red koz ni pomemben, ju lahko postavimo na zadnji dve mesti. Po indukcijski predpostavki lahko v prvih $m$ potezah prvih $m$ koz obrnemo v isto smer. Tako torej dobimo $m + 1$ koz, ki gledajo v isto smer. V naslednji potezi izberemo te koze ter jih obrnemo, s čimer dosežemo, da so vse obrnjene v isto smer. Tega zadnja poteza ne spremeni.

ii) Vseh $m + 2$ koz gleda v isto smer. V tem primeru v $k$-ti potezi obrnemo prvih $k$ koz, če je $k < \frac{m+2}{2}$, in zadnjih $k$ koz, če je $k > \frac{m+2}{2}$. Tako s $k$-to in $m + 2 - k$-to potezo skupaj obrnemo natanko vse koze. Poleg tega z zadnjo potezo še enkrat obrnemo vsako kozo. Enostavno je tako preveriti, da vsako kozo obrnemo natanko $\frac{m-1}{2} + 1$-krat, zato bodo na koncu znova vse obrnjene v isto smer.

Indukcija je tako zaključena.

3. Pri reševanju si bomo pomagali z naslednjo lemo: Če za naravni števili $a$ in $b$ velja, da je $\frac{b}{a}$ liho naravno število, velja tudi $2^a + 1 \mid 2^b + 1$. Res, če zapišemo $b = \ell \cdot a$, lahko faktoriziramo

$$2^b + 1 = 2^{\ell a} + 1 = (2^a)^\ell + 1^\ell = (2^a + 1) \cdot \left((2^a)^{\ell-1} - (2^a)^{\ell-2} + \ldots - 2^a + 1\right).$$

Sedaj z indukcijo dokažimo, da velja $a_n \mid a_{n+1}$ in $a_n - 1 \mid a_{n+1} - 1$. Za $n = 1$ dobimo $2 \mid 4$ in $1 \mid 3$, kar seveda drži.

Naša indukcijska predpostavka bo, da za neko naravno število $k$ velja tako $a_k \mid a_{k+1}$ kot $a_k - 1 \mid a_{k+1} - 1$. Opazimo, da sta $a_k$ in $a_{k-1}$ sodi števili, ki pa nista deljivi s 4. Ker velja $a_{k-1} \mid a_k$, je njun količnik torej liho naravno število. Tako z uporabo zgornje leme dobimo

$$2^{a_{k-1}} + 1 \mid 2^{a_k} + 1,$$

kar je po definiciji zaporedja ekvivalentno

$$a_k - 1 \mid a_{k+1} - 1.$$

Podobno, ker sta $a_{k-1} - 1$ in $a_k - 1$ lihi števili, je njun količnik liho naravno število, od koder sklepamo

$$2^{a_{k-1}-1} + 1 \mid 2^{a_k - 1} + 1 \implies 2^{a_{k-1}} + 2 \mid 2^{a_k} + 2 \implies a_k \mid a_{k+1}.$$

To zaključi naš indukcijski korak.

4. Naj $C_n$ označuje množico vseh angleških besed dolžine $n$. Vse besede dolžine 1 so angleške, zato velja $|C_1| = 4 = 2^{1+1}$. Če nam torej uspe dokazati $|C_n| \geq 2\,|C_{n-1}|$ za vsak $n$, s tem induktivno dobimo $|C_n| \geq 2^{n+1}$.

   Naj $D_n$ označuje množico vseh besed dolžine $n$, ki nimajo konvolucije v svojih prvih $n-1$ črkah, vendar vseeno niso angleške. Opazimo, da je vsaka neprekinjena podmnožica angleške besede tudi angleška. Če besedi v $C_{n-1}$ na konec dodamo eno od štirih črk, dobimo besedo, ki je ali v $C_n$ ali v $D_n$. Tako velja

$$4\,|C_{n-1}| = |C_n| + |D_n|$$

   Naj $D_{n,k}$ označuje podmnožico besed v $D_n$, katerih konvolucije so dolžine $2k$. Taka beseda je torej oblike

$$(x_1, x_2, \ldots x_{n-2k})(x_{n-2k+1}, x_{n-2k+2}, \ldots, x_{2n-k})(x_{n-2k+1}, x_{n-2k+2}, \ldots, x_{2n-k}).$$

   Če angleški besedi odstranimo zadnjih nekaj črk, je še vedno angleška. Sledi, da je beseda

$$(x_1, x_2, \ldots x_{n-2k})(x_{n-2k+1}, x_{n-2k+2}, \ldots, x_{2n-k})$$

   angleška in torej element $C_{n-k}$. Ta element je seveda enolično določen, zato velja neenakost $|D_{n,k}| \leq |C_{n-k}|$. Tako dobimo

$$|D_n| = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} |D_{n,k}| \leq \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} |C_{n-k}|.$$

Sledi

$$|C_n| = 4\,|C_{n-1}| - |D_n| \geq 4\,|C_{n-1}| - \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} |C_{n-k}|\,.$$

Sedaj lahko neenakost $|C_{n+1}| \geq 2\,|C_n|$ dokažemo z močno indukcijo. Za bazo izberemo $n = 1$. Ker je $|C_2| = 12$, je pogoj ekvivalenten $12 \geq 2 \cdot 4$, kar seveda drži.

Predpostavimo torej, da velja

$$|C_k| \geq 2\,|C_{k-1}| \geq 2^2\,|C_{k-2}| \geq \cdots \geq 2^{k-1}\,|C_1|$$

in izvedimo indukcijski korak. Dobimo

$$\begin{aligned}
|C_{k+1}| &\geq 4\,|C_k| - \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} |C_{k+1-i}| \\
&\geq 4\,|C_k| - \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} \frac{1}{2^{i-1}}\,|C_k| \\
&\geq 4\,|C_k| - 2\,|C_k| \\
&= 2\,|C_k|\,,
\end{aligned}$$

kar zaključi dokaz.