

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE
TER STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2018/19

1. skupina: Poslovna matematika

Četrtek, 7. marec 2019

Čas pisanja: 12³⁰ do 14³⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalno.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. naloga

V podjetju Motorček so proizvajali motorna kolesa. V 20 dneh so proizvedli 350 motornih koles. Zaposlenih je bilo 15 delavcev, ki so delali po 8 ur na dan. Ker bodo morali zaradi dodatnega naročila proizvodnjo povečati za 14 %, razmišljajo o možnih scenarijih.

- a) Ali bi dosegli cilj in v kakšnem času, če bi zaposlili 5 novih delavcev, celoten kolektiv pa bi delal po 7,5 ure na dan?

3 točke

- b) Koliko ur (in minut) na dan bi morali delati delavci, če podjetje ne bi zaposlilo nove delovne sile, s kupcem pa bi se dogovorili za dva dodatna dneva za izvedbo naročila?

4 točke

2. naloga

Na razpisu pridobljena denarna sredstva v višini 150.000,00 EUR so razdelili med štiri turistične kraje, in sicer:

- a) $\frac{1}{5}$ sredstev premo sorazmerno številu prebivalcev;
(Podatki: Kraj A ima 10.000 prebivalcev, kraj B 30.300 prebivalcev, kraj C 16.500 prebivalcev in kraj D 18.200 prebivalcev.)
- b) preostanek pa tako, da dobi kraj A štirikrat več sredstev kot kraj C; kraj B $\frac{1}{3}$ več sredstev kot kraj A; kraj D pa trikrat toliko kot skupaj kraja A in B.

Koliko sredstev je pridobil vsak turistični kraj?

3. naloga

V nasadu raste 3000 jablan, od tega jih je 20 % sorte gala, 25 % sorte jonagold, ostalo pa je sorta idared.

- a) Izračunaj količino pridelanih sort jabolk, če je v povprečju pridelana količina jabolk na drevo – sorta gala 12 kg na jablano, sorta jonagold 9 kg na jablano in sorta idared 14 kg na jablano?

2 točki

- b) Naslednje leto je bila zgodaj spomladi pozeba, ki je zmanjšala količino pridelanih jabolk, in sicer na 75 % jablan sorte gala za 4 kg, na 40 % jablan sorte jonagold za 3 kg in na 30 % jablan sorte idared za 2 kg. Izračunaj pridelano količino jabolk po pozebi in razliko med obema pridelkoma (v kg in v odstotkih).

5 točk

4. naloga

Janez in Meta sta se odločila za nakup gorskih koles, moškega in ženskega.

- a) Pri nakupu moškega gorskega kolesa sta se dogovorila, da bosta 30 % njegove vrednosti plačala takoj, ostanek, ki bo obrestovan po 4,5-% letni obrestni meri, pa v 3 mesecih. Kolikšno je bilo dokončno poplačilo gorskega kolesa, če je bila njegova osnovna cena 1.457,25 EUR?

4 točke

- b) Pri nakupu ženskega gorskega kolesa sta se v trgovini dogovorila, da ga bosta plačala v dveh obrokih, in sicer prvega takoj – v višini 50 % od celotne cene ženskega gorskega kolesa, drugi obrok pa bosta poravnala čez 6 mesecev v znesku 452,55 EUR. Kolikšna je bila cena Metinega kolesa v trgovini, če so v drugem obroku vračunane tudi obresti po 7,2-% letni stopnji za čas odloga drugega obroka?

3 točke



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2018/19

2. skupina: Statistika

Četrtek, 7. marec 2019

Čas pisanja: 12³⁰ do 14³⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. NALOGA

Število državljanov Slovenije, ki so se odselili v tujino, se je po letu 2011 podvojilo. Najpogosteje gre za mlade ljudi, stare od 25 do 34 let, od katerih jih ima kar 40 odstotkov višjo ali visokošolsko izobrazbo. Boljše življenjske možnosti iščejo zlasti v Nemčiji in Avstriji. (*Dnevnik, avgust 2018*)

V tabeli 1 so predstavljeni podatki o Slovencih do starosti 39 let, ki so se leta 2017 izselili v tujino. V tabeli dopolnite manjkajoče podatke.

Tabela 1: **Odseljeni iz Slovenije v letu 2017 po spolu in starostnih skupinah**

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški		1420		1297	5124
Ženske		1246		712	3745
Skupaj	1668	2666	2526	2009	

Vir: <https://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/SaveShow.asp>

- a) Dopolnite tabelo tako, da izračunate manjkajoče podatke. Pri izračunu si lahko pomagata s podatki v tabeli 2. (*Rezultate zaokrožite na celo število.*)

1 točka

- b) Izračunajte strukturo odseljenih iz Slovenije po starostnih skupinah. (*Rezultate izrazite v strukturnih odstotkih in jih zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno.*)

2 točki

Tabela 2: **Struktura odseljenih iz Slovenije po starostnih skupinah v letu 2017**
(v odstotkih)

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški			30,02		
Ženske			26,38		
Skupaj		*			

- c) Izračunajte strukturo odseljenih iz Slovenije po spolu. (Rezultate izrazite v strukturnih odstotkih in jih zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno.)

2 točki

Tabela 3: **Struktura odseljenih iz Slovenije po spolu v letu 2017** (v odstotkih)

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški	52,10		*		
Ženske	47,90				
Skupaj					

- d) Razložite podatka v tabeli 2 in tabeli 3, ki sta označena z zvezdico.

1. Komentar: _____

1 točka

2. Komentar: _____

1 točka

2. NALOGA

Tabela 4: Število prebivalstva po spolu, število zasebnih gospodinjstev in gostota prebivalstva ob popisih v letih od 1981 do 2018

Leto	Prebivalci - SKUPAJ	Moški	Ženske	Gostota prebivalstva na km ²	Zasebna gospodinjstva
1981	1891864	918766	973098	93,3	594571
1991	1913355	923643	989712	94,4	632278
2002	1964036	958576	1005460	96,9	684847
2011	2050189	1014563	1035626	101,1	813531
2015	2062874	1022229	1040645	101,8	820541
2018	2066880	1027041	1039839	102,0	824618

Vir: SURS

Tabela 5: Izbrani kazalci ob popisih v letih od 1981 do 2018

Leto	a)	b)	c)
1981			
1991			
2002			
2011			
2015			
2018			

a) Izračunajte število žensk na 1000 moških za posamezna leta. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.)

2 točki

b) Zapišite obrazec za izračun površine in izračunajte površino za posamezna leta. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.)

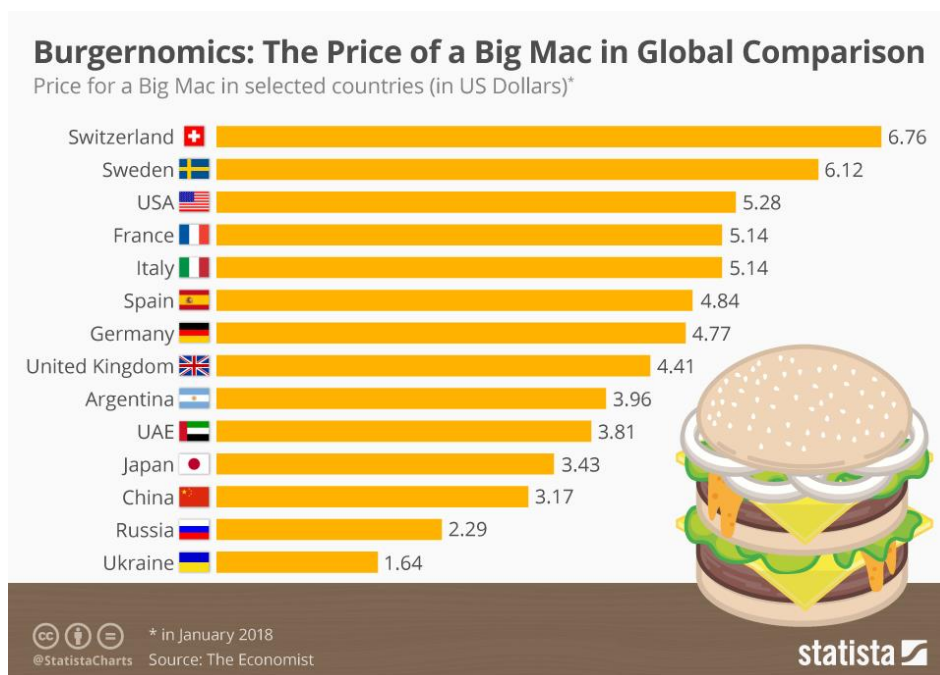
3 točke

c) Izračunajte število članov na gospodinjstvo po letih. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.)

2 točki

3. NALOGA

Slika prikazuje cene hamburgerja Big Mac v nekaterih državah v mesecu januarju 2018.



Vir: <https://www.statista.com/chart/13672/burgernomics-the-price-of-a-big-mac-in-global-comparison/>

- a) S pomočjo ustreznih indeksov analizirajte cene hamburgerja po državah tako, da boste primerjali ceno hamburgerja v posamezni državi s ceno hamburgerja v Veliki Britaniji. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 6.)

2 točki

Tabela 6: Indeksi za cene hamburgerja po državah v mesecu januarju 2018

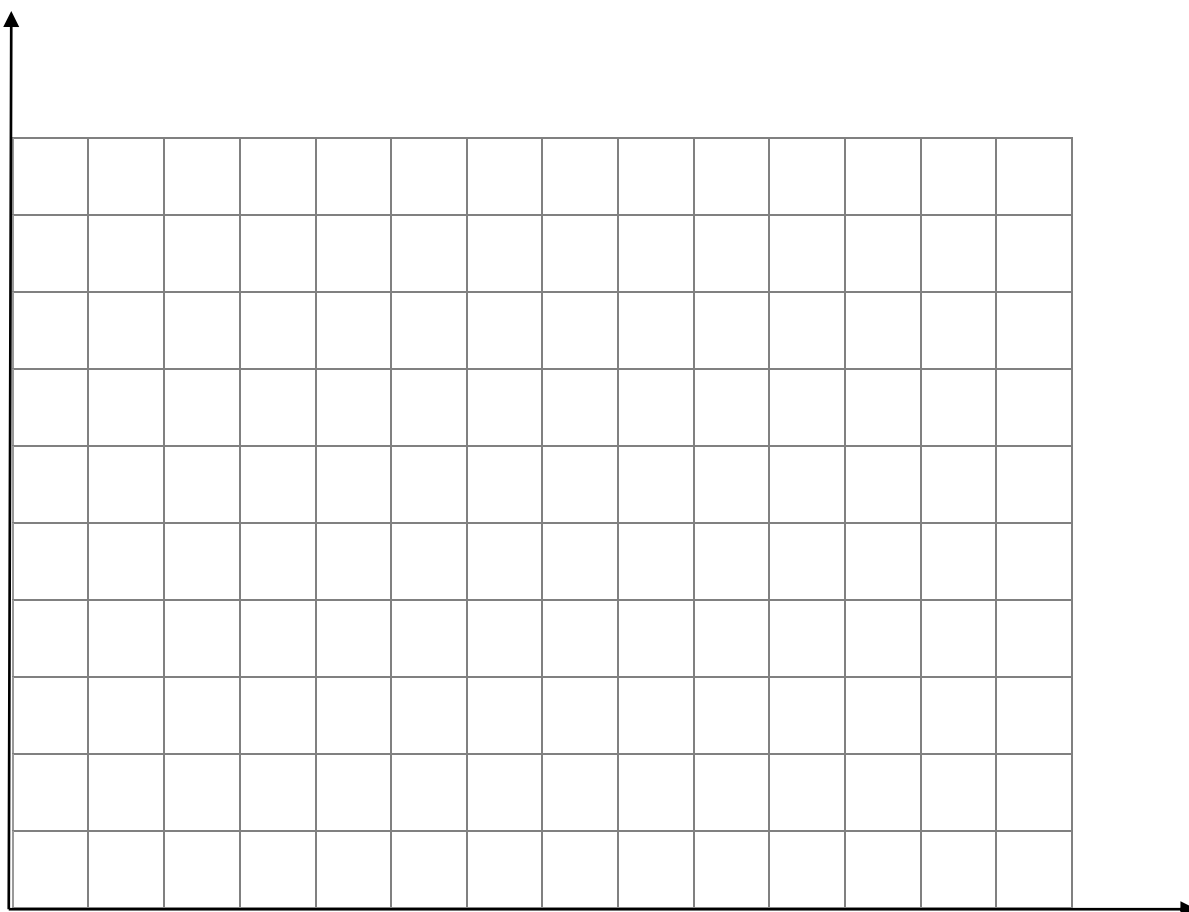
Država		
Švica		
Švedska		
ZDA		
Francija		
Španija		
Nemčija		
Velika Britanija		
Japonska		
Kitajska		
Rusija		

- b) Za koliko odstotkov je bila cena hamburgerja v Švici in Rusiji višja oz. nižja v primerjavi s ceno hamburgerja v Veliki Britaniji?

1 točka

- c) Grafično prikažite kazalce, ki ste jih izračunali pri točki a.

2 točki



- d) V mesecu januarju 2018 je povprečna neto plača v Sloveniji znašala 1.077,73 EUR. Izračunajte, koliko hamburgerjev bi lahko s povprečno slovensko plačo kupili v Švici in Veliki Britaniji. (Rezultate zaokrožite na celo število.)

2 točki

4. NALOGATabela 7: **Delavci po produktivnosti** (izraženi v številu izdelkov) v podjetju **Lampionček, d. o. o.**

Število izdelkov	Zaposleni f_j	b)	c)	d)
20 - 24	2			
25 - 29	10			
30 - 34	22			
35 - 39	42			
40 - 44	24			
45 - 49	10			
Skupaj	110			

- a) Katero populacijo smo opazovali, kaj je bila statistična enota in kaj statistična spremenljivka?

1 točka

Stat. populacija:

Stat. enota:

Stat. spremenljivka:

- b) Izračunajte relativne frekvence in razložite izračunani kazalec v 3. razredu. (*Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v tabelo 7.*)

2 točki

- c) Izračunajte kumulativo absolutnih frekvenc in razložite izračunani kazalec v 5. razredu.
(Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo 7.)

2 točki

- d) Izračunajte kumulativo relativnih frekvenc in razložite izračunani kazalec v 4. razredu.
(Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v tabelo 7.)

2 točki

3. SKUPINA

Ime in priimek: _____

N1	N2	N3	N4

Razred: _____ Mentor/-ica: _____

Naloge rešuj samostojno. Uporaba zapiskov in literature ni dovoljena.

Dovoljena je uporaba žepnega računalca. Naloge so štiri, vsaka je vredna 20 točk.

Za reševanje imaš na voljo 120 minut. Veliko uspeha!

1. V tabeli so zbrani podatki o številu prodanih stanovanj in povprečni ceni kvadratnega metra stanovanja v izbranih tržnih območjih Slovenije za leta 2015, 2016 in 2017. V nalogi privzemi, da imajo stanovanja v vseh območjih v povprečju enako površino.

Tržno območje	2015		2016		2017	
	Število stanovanj	Povprečna cena v €	Število stanovanj	Povprečna cena v €	Število stanovanj	Povprečna cena v €
Celje	243	1050	293	1130	325	1140
Koper	173	1800	230	1960	184	2110
Kranj	178	1560	225	1610	200	1700
Ljubljana	1522	2040	1863	2180	1829	2410
Maribor	788	1050	870	1080	937	1150
Murska Sobota	66	880	59	900	72	940
Nova Gorica	97	1480	96	1410	125	1560
Novo mesto	99	1220			145	1360

Vir: Geodetska uprava Republike Slovenije¹ (GURS)

- a) Izračunaj povprečno ceno kvadratnega metra stanovanja v Novem mestu v letu 2016, če veš, da so se v primerjavi s prejšnjim letom tam stanovanja podražila za 2,46 %. Rezultat v evrih zaokroži na desetice. [2 točki]
- b) Izračunaj število prodanih stanovanj v Novem mestu v letu 2016, če veš, da se je tam v letu 2017 v primerjavi s prejšnjim letom število prodaj povečalo za 29,46 %. [2 točki]

¹Podatki v tabeli vključujejo le tiste kupoprodaje novih in rabljenih stanovanj, pri katerih GURS razpolaga z dovolj natančnimi podatki za statistično analizo.

- c) Kako in za koliko odstotkov se je spremenila povprečna cena kvadratnega metra stanovanja v Novem mestu v obdobju 2015-2017? Rezultat v odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti. [2 točki]
- d) Kolikšen donos ali izgubo je ustvarila Damjana, ki je leta 2015 kupila, leta 2017 pa prodala 50 m² veliko stanovanje v Novem mestu, če je bila obakrat cena kvadratnega metra stanovanja 10 % nad novomeškim povprečjem? Stroške nakupa in prodaje zanemari. [3 točke]
- e) Izračunaj povprečne cene kvadratnega metra stanovanja v mestih vzhodne Slovenije (vključuje Celje, Maribor, Mursko Soboto in Novo mesto), v mestih zahodne Slovenije (vključuje Koper, Kranj, Ljubljano in Novo Gorico) in v mestih celotne Slovenije za leto 2017. Rezultate v evrih zaokroži na desetice. [9 točk]
- f) Kako in za koliko odstotkov odstopata ceni v vzhodni in zahodni Sloveniji od državnega povprečja? Rezultata v odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti. [2 točki]

2. Dijakinja Lara bo jeseni 2019 začela dodiplomski študij finančne matematike. Zaradi uspehov na tekmovanjih bo dobila Zoisovo štipendijo. Študij bo zaključila konec septembra 2022. Ob zaključku študija želi kupiti rabljen avto, zato bo vsak mesec del štipendije prihranila. Od oktobra 2019 do septembra 2022 bo ob koncu vsakega meseca položila 60 € na varčevalni račun. Banka zanj uporablja relativno mesečno obrestovanje in 1,2 % letno obrestno mero.

Rezultata v evrih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Kolikšno bo stanje na Larinem varčevalnem računu konec septembra 2022, takoj po zadnjem pologu? [10 točk]

- b) Poleti 2020 Lara ugotovi, da zaradi naporenega in uspešnega študija nujno potrebuje daljše počitnice na morju. Zaradi povečanih stroškov v juliju, avgustu in septembru ne bo mogla položiti denarja na varčevalni račun. Tako bo tudi v naslednjih letih. Kolikšno bo v tem primeru stanje na njenem varčevalnem računu konec septembra 2022? [10 točk]

3. Na finančnem trgu so na voljo tri obveznice uspešnega tehnološkega podjetja.

Dve obveznici sta brezkuponski. Prva ima nominalno vrednost 100 €, dospetje čez pol leta ter ceno 98,50 €. Druga obveznica ima nominalno vrednost 1000 €, dospetje čez eno leto ter ceno 967 €. Tretja obveznica je kuponska z letnimi kuponi. Njena nominalna vrednost je 1000 €, dospetje čez 2 leti, kuponska obrestna mera 3,6 % in cena 1002 €.

V nalogi diskontne faktorje zaokroži na štiri decimalna mesta, rezultate v evrih ali odstotkih pa na dve decimalni mesti.

- a) Določi diskontne faktorje $D(0, \frac{1}{2})$, $D(0, 1)$ in $D(0, 2)$.

[7 točk]

b) Določite efektivne obrestne mere $R(0, \frac{1}{2})$, $R(0, 1)$ in $R(0, 2)$.

[6 točk]

c) Določite interval možnih cen dveletne kuponske obveznice istega podjetja z nominalno vrednostjo 1000 €, polletnimi kuponi in kuponsko obrestno mero 3,5%, če veš, da je efektivna obrestna mera $R(0, T)$ strogo naraščajoča funkcija časa T .

[7 točk]

4. Banka uporablja naslednjo časovno strukturo obrestnih mer in **navadno** obrestovanje:

t	0,5	1,0	1,5
$R(0, t)$	0,60 %	0,90 %	1,10 %

Gradbeno podjetje načrtuje gradnjo stanovanjskega objekta, v katerem bo 35 stanovanj. Zaradi izjemne lokacije so kupci pripravljene vsa stanovanja kupiti že pol leta pred začetkom gradnje. Posamezno stanovanje stane 180 000 €, kupec pa mora tretjino cene plačati ob sklenitvi pogodbe, tretjino pol leta po sklenitvi (to je ob začetku gradnje), tretjino pa ob prevzemu stanovanja leto in pol po sklenitvi pogodbe.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) V skladu s finančnim načrtom bo podjetje polovico prvega obroka vseh kupnin namenilo plačilu zemljišča, polovico pa namerava investirati na banki do začetka gradnje. Določi prejeti znesek ob izteku bančnega depozita. [4 točke]

b) Podjetje načrtuje, da bo ob začetku gradnje potrebovalo 5 milijonov evrov. Del zneska bodo pokrili z že prejetimi kupninami, manjkajoči del pa si bodo sposodili pri banki v obliki enoletnega kredita z enkratnim poplačilom. Določi dobiček podjetja ob predaji stanovanj, če bo ob najemu kredita obrestna mera kredita znašala $R(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 0,90\%$. Privzemi, da bodo vse kupnine plačane pravočasno in da bo gradnja potekala v skladu s finančnim načrtom. [6 točk]

c) Obrestna mera $R(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ je negotova, točna vrednost bo znana šele ob najemu kredita. Pri kolikšni obrestni meri $R(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ bi bil končni dobiček podjetja za polovico nižji? [5 točk]

d) Podjetje se negotovosti v obrestni meri kredita izogne s sklenitvijo dogovora o terminski obrestni meri. Za kolikšno obrestno mero se dogovori z banko? Kolikšen je tedaj netvegan dobiček podjetja? [5 točk]

Stran s formulami

Terminski posli

- na delnico, ki ne izplačuje dividend

$$F_t = S_t(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- na delnico, ki izplačuje dividende

$$F_t = (S_t - I(t, T))(1 + R)^{T-t}, \quad K = F_0$$

$$V_t = (F_t - K)(1 + R)^{-(T-t)}$$

- valutni terminski posel

$$F_t = S_t \frac{(1 + R_d)^{T-t}}{(1 + R_f)^{T-t}}, \quad K = F_0$$

$$V_t = N(S_t(1 + R_f)^{-(T-t)} - K(1 + R_d)^{-(T-t)})$$

- dogovor o terminski obrestni meri

$$R(t, S, T) = \frac{1}{T - S} \left(\frac{1 + R(0, T) \cdot (T - t)}{1 + R(0, S) \cdot (S - t)} - 1 \right), \quad K = R(0, S, T)$$

$$V_t = \frac{N \cdot (R(t, S, T) - K) \cdot (T - S)}{1 + R(t, T) \cdot (T - t)}$$

Opcije

- izplačilo ob zapadlosti

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\}$$

$$P_T = \max\{K - S_T, 0\}$$

- premija v času t , če delnica ne izplačuje dividend

$$\max\{S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}, 0\} \leq c_t \leq S_t$$

$$\max\{K(1 + R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \leq p_t \leq K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- pariteta evropskih opcij, če delnica ne izplačuje dividend

$$p_t + S_t = c_t + K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- premija v času t , če delnica izplačuje dividende

$$\max\{S_t - K(1 + R)^{-(T-t)} - I(t, T), 0\} \leq c_t \leq S_t - I(t, T)$$

$$\max\{K(1 + R)^{-(T-t)} - S_t + I(t, T), 0\} \leq p_t \leq K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- pariteta evropskih opcij, če delnica izplačuje dividende

$$p_t + S_t - I(t, T) = c_t + K(1 + R)^{-(T-t)}$$

- evropske in ameriške opcije

$$c_t^E \leq c_t^A, \quad p_t^E \leq p_t^A$$



--

Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE IN FINANČNE MATEMATIKE
TER STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2018/19

1. skupina: Poslovna matematika - REŠITVE

Četrtek, 7. marec 2019

Čas pisanja: 12³⁰ do 14³⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalno.
- Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

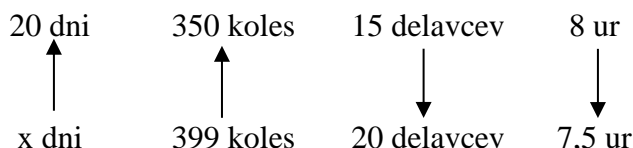
Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. naloga

V podjetju Motorček so proizvajali motorna kolesa. V 20 dneh so proizvedli 350 motornih koles. Zaposlenih je bilo 15 delavcev, ki so delali po 8 ur na dan. Ker bodo morali zaradi dodatnega naročila proizvodnjo povečati za 14 %, razmišljajo o možnih scenarijih.

- a) Ali bi dosegli cilj in v kakšnem času, če bi zaposlili 5 novih delavcev, celoten kolektiv pa bi delal po 7,5 ure na dan?

3 točke



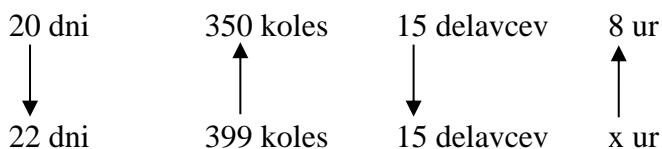
$$x = \frac{20 \cdot 399 \cdot 15 \cdot 8}{350 \cdot 20 \cdot 7,5} = \underline{\underline{18,24 \text{ dneva}}}$$

Odgovor: Cilj bi dosegli v 18,24 dneva.

- 1 točka – zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje)
- 1 točka – določitev vrste sorazmerij in izračun neznanke
- 1 točka – zapis odgovora

- b) Koliko ur (in minut) na dan bi morali delati delavci, če podjetje ne bi zaposlilo nove delovne sile, s kupcem pa bi se dogovorili za dva dodatna dneva za izvedbo naročila?

4 točke



$$x = \frac{8 \cdot 20 \cdot 399}{22 \cdot 350} = \underline{\underline{8,29090909 \text{ ure}}}$$

Izračun: $8,2909090909 = \underline{\underline{8 \text{ ur } 17 \text{ minut}}}$

Odgovor: Delavci bi morali delati **8 ur 17 minut**.

- 1 točka – zapis podatkov (sklepna shema, sorazmerje)
- 1 točka – določitev vrste sorazmerij
- 1 točka – zapis ulomka in izračun vrednosti neznanke
- 1 točka – odgovor (v urah in minutah)

2. naloga

Na razpisu pridobljena denarna sredstva v višini 150.000,00 EUR so razdelili med štiri turistične kraje, in sicer:

- a) $\frac{1}{5}$ sredstev premo sorazmerno številu prebivalcev;
 (Podatki: Kraj A ima 10.000 prebivalcev, kraj B 30.300 prebivalcev, kraj C 16.500 prebivalcev in kraj D 18.200 prebivalcev.)
- b) preostanek pa tako, da dobi kraj A štirikrat več sredstev kot kraj C; kraj B $\frac{1}{3}$ več sredstev kot kraj A; kraj D pa trikrat toliko kot skupaj kraja A in B.
 Koliko sredstev je pridobil vsak turistični kraj?

Izračun $\frac{1}{5}$ in preostanka 1 T

$$m_1 = \frac{1}{5} \text{ od } 150.000,00 = \underline{30.000,00 \text{ EUR}}$$

$$m_2 \text{ (preostanek)} = 150.000,00 - 30.000,00 = \underline{120.000,00 \text{ EUR}}$$

Rešitev k tč. a) $m_1 = 30.000,00 \text{ EUR}$

$$A : B : C : D = 10.000 x + 30.300 x + 16.500 x + 18.200 x$$

$$75.000 x = 30.000,00$$

$$\underline{x = 0,4} \quad \quad \quad 1 \text{ T}$$

$$A = 10.000 * 0,4 = \underline{4.000,00 \text{ EUR}}$$

$$B = 30.300 * 0,4 = \underline{12.120,00 \text{ EUR}}$$

$$C = 16.500 * 0,4 = \underline{6.600,00 \text{ EUR}}$$

$$D = 18.200 * 0,4 = \underline{7.280,00 \text{ EUR}}$$

1 T

Rešitev k tč. b) $m_2 = 120.000,00 \text{ EUR}$

$$A = 4 x = \underline{12.521,74}$$

$$B = 4 x + \left(\frac{1}{3} * 4 x\right) = \frac{12 x + 4 x}{3} = \frac{16 x}{3} = \underline{16.695,65}$$

$$C = x = \underline{3.130,43}$$

$$D = 3 * \left(4 x + \frac{16}{3} x\right) = 3 * \frac{28}{3} x = 28 x = \underline{87.652,17}$$

1 T

1 T

$$A + B + C + D = 120.000,00$$

$$33 x + \frac{16}{3} x = 120.000,00 \text{ } /(*3)$$

$$99 x + 16 x = 360.000,00$$

$$\underline{x = 3.130,434783}$$

Odgovor: Koliko sredstev je pridobil vsak turistični kraj?

$$A = 4.000,00 + 12.521,74 = \underline{16.521,74 \text{ EUR}}$$

$$B = 12.120,00 + 16.695,65 = \underline{28.815,65 \text{ EUR}}$$

$$C = 6.600,00 + 3.130,43 = \underline{9.730,43 \text{ EUR}}$$

$$D = 7.280,00 + 87.652,17 = \underline{94.932,17 \text{ EUR}}$$

1 T

1 T

3. naloga

V nasadu raste 3000 jablan, od tega jih je 20 % sorte gala, 25 % sorte jonagold, ostalo pa je sorta idared.

- a) Izračunaj količino pridelanih sort jabolk, če je v povprečju pridelana količina jabolk na drevo – sorta gala 12 kg na jablano, sorta jonagold 9 kg na jablano in sorta idared 14 kg na jablano?

2 točki

Sorta gala = 20 % od 3000 = 600 jablan; pridelek = $600 * 12 = \underline{7.200 \text{ kg jabolk gala}}$
 Sorta jonagold = 25 % od 3000 = 750 jablan; pridelek = $750 * 9 = \underline{6.750 \text{ kg jabolk jonagold}}$
 Sorta idared = 55 % od 3000 = 1650 jablan; pridelek = $1650 * 14 = \underline{23.100 \text{ kg idared}}$

1 točka - izračun posameznih sort jablan

1 točka - izračun količine jabolk za posamezno sorto

- b) Naslednje leto je bila zgodaj spomladi pozeba, ki je zmanjšala količino pridelanih jabolk, in sicer na 75 % jablan sorte gala za 4 kg, na 40 % jablan sorte jonagold za 3 kg in na 30 % jablan sorte idared za 2 kg. Izračunaj pridelano količino jabolk po pozebi in razliko med obema pridelkoma (v kg in v odstotkih).

5 točk

Sorta gala = $600 * 0,75 = 450$ jablan
 Sorta jonagold = $750 * 0,40 = 300$ jablan
 Sorta idared = $1650 * 0,30 = 495$ jablan } **1 T**

Pridelek:

Gala: $150 * 12 = \underline{1800 \text{ kg}}$
 $450 * 8 = \underline{3600 \text{ kg}}$
 jonagold: $450 * 9 = \underline{4050 \text{ kg}}$
 $300 * 6 = \underline{1800 \text{ kg}}$
 idared: $495 * 12 = \underline{5940 \text{ kg}}$
 $1155 * 14 = \underline{16170 \text{ kg}}$ } **1 T + 1 T**

Količina pridelanih jabolk po pozebi = $5400 \text{ kg} + 5850 \text{ kg} + 22110 \text{ kg} = \underline{33360 \text{ kg}}$ **1 T**

Razlika med obema pridelkoma = $37050 \text{ kg} - 33360 \text{ kg} = \underline{3690 \text{ kg}}$ (absolutno) }
 v odstotkih = $3690/37050 * 100 = \underline{9,96 \%}$ (relativno) **1 T**

1 točka – izračun posameznih sort jablan po pozebi

1 točka – izračun pridelka za posamezno sorto po pozebi poškodovanih jablan

1 točka – izračun pridelka za posamezno sorto po pozebi ostalih jablan

1 točka – odgovor (q pridelanih jabolk po pozebi)

1 točka – izračun rezultata (v kg in %)

4. naloga

Janez in Meta sta se odločila za nakup gorskih koles, moškega in ženskega.

- a) Pri nakupu moškega gorskega kolesa sta se dogovorila, da bosta 30 % njegove vrednosti plačala takoj, ostanek, ki bo obrestovan po 4,5-% letni obrestni meri, pa v 3 mesecih. Kolikšno je bilo dokončno poplačilo gorskega kolesa, če je bila njegova osnovna cena 1.457,25 EUR?

4 točke

Takojšnje plačilo: 30 % od 1.457,25 EUR = 437,18 EUR

Ostanek dolga = 1.457,25 – 437,18 = **1.020,07 EUR**

$G = 1.020,07 \text{ EUR}$

$p = 4,5 \%$

$m = 3 \text{ meseci}$

$G^+ = x \text{ EUR}$

$$o = \frac{G \times p \times m}{1200} = \frac{1.020,07 \times 3 \times 4,5}{1200} = \mathbf{11,48 \text{ EUR}}$$

$$G^+ = G + o = 1.020,07 + 11,48 = \mathbf{1.031,55 \text{ EUR}}$$

1 točka – izračun 30 % plačila

1 točka – izračun ostanka dolga

1 točka – zapis obrazca, nastavitvev ter izračun obresti

1 točka – izračun G^+

- b) Pri nakupu ženskega gorskega kolesa sta se v trgovini dogovorila, da ga bosta plačala v dveh obrokih, in sicer prvega takoj – v višini 50 % od celotne cene ženskega gorskega kolesa, drugi obrok pa bosta poravnala čez 6 mesecev v znesku 452,55 EUR. Kolikšna je bila cena Metinega kolesa v trgovini, če so v drugem obroku vračunane tudi obresti po 7,2-% letni stopnji za čas odloga drugega obroka?

3 točke

$G^+ = 452,55 \text{ EUR}$

$p = 7,2 \%$

$m = 6 \text{ mesecev}$

$G = x \text{ EUR}$

$$G^+ = G + \frac{G \times p \times m}{1200}$$

$$G = \frac{G+o}{1+\left(\frac{p \cdot m}{1200}\right)} = \frac{452,55}{1+\left(\frac{7,2 \cdot 6}{1200}\right)} = \mathbf{436,82 \text{ EUR}} \quad \text{ali} \quad G = \frac{(G+o) \cdot 1200}{1200+(p \cdot m)}$$

Odg.: Metino kolo v trgovini stane **873,64 EUR**. Izračun: $(436,82 \cdot 2)$.

1 točka – zapis obrazca in vstavitvev podatkov

1 točka – izračun G iz G^+

1 točka – izračun cene Metinega kolesa



Ime in priimek kandidata:

**ŠOLSKO TEKMOVANJE V ZNANJU
POSLOVNE MATEMATIKE IN STATISTIKE
za srednje šole**

Šolsko leto 2018/19

2. skupina: Statistika – REŠITVE

Četrtek, 7. marec 2019

Čas pisanja: 12³⁰ do 14³⁰

Navodila kandidatom:

- Pri reševanju nalog lahko uporabljate: kemični svinčnik ali nalivno pero, ravnilo, žepno računalo.
Uporaba vnaprej pripravljenih formul ni dovoljena.
- Uporaba korekturnih sredstev ni dovoljena.
- Pri vmesnih rezultatih upoštevajte vsa decimalna mesta.
- Končne rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti, če ni navedeno drugače.
- Vse matematične in logične rešitve so enakovredne.

1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	SKUPAJ	Možne točke
					28

Zaupajte vase in v svoje sposobnosti. Želimo vam veliko uspeha pri reševanju nalog!

1. NALOGA

Število državljanov Slovenije, ki so se odselili v tujino, se je po letu 2011 podvojilo. Najpogosteje gre za mlade ljudi, stare od 25 do 34 let, od katerih jih ima kar 40 odstotkov višjo ali visokošolsko izobrazbo. Boljše življenjske možnosti iščejo zlasti v Nemčiji in Avstriji. (*Dnevnik, avgust 2018*)

V tabeli 1 so predstavljeni podatki o Slovencih do starosti 39 let, ki so se leta 2017 izselili v tujino. V tabeli dopolnite manjkajoče podatke.

Tabela 1: **Odseljeni iz Slovenije v letu 2017 po spolu in starostnih skupinah**

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški	869	1420	1538	1297	5124
Ženske	799	1246	988	712	3745
Skupaj	1668	2666	2526	2009	8869

Vir: <https://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/SaveShow.asp>

- a) Dopolnite tabelo tako, da izračunate manjkajoče podatke. Pri izračunu si lahko pomagata s podatki v tabeli 2. (*Rezultate zaokrožite na celo število.*)

1 točka

1 točka – vsi pravilno izračunani manjkajoči podatki

- b) Izračunajte strukturo odseljenih iz Slovenije po starostnih skupinah. (*Rezultate izrazite v strukturnih odstotkih in jih zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno.*)

2 točki

Tabela 2: **Struktura odseljenih iz Slovenije po starostnih skupinah v letu 2017**
(v odstotkih)

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški	16,69	27,71	30,02	25,31	100,00
Ženske	21,34	33,27	26,38	19,01	100,00
Skupaj	18,81	30,06*	28,48	22,65	100,00

2 točki – vsi pravilno izračunani strukturni odstotki

1 točka – 1 napaka pri izračunanih strukturnih odstotkih

0 točk – več napak pri izračunanih strukturnih odstotkih

- c) Izračunajte strukturo odseljenih iz Slovenije po spolu. (Rezultate izrazite v strukturnih odstotkih in jih zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno.)

2 točki

Tabela 3: **Struktura odseljenih iz Slovenije po spolu v letu 2017** (v odstotkih)

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški	52,10	53,26	60,89*	64,56	57,77
Ženske	47,90	46,74	39,11	35,44	42,23
Skupaj	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

2 točki – vsi pravilno izračunani strukturni odstotki
 1 točka – 1 napaka pri izračunanih strukturnih odstotkih
 0 točk – več napak pri izračunanih strukturnih odstotkih

- d) Razložite podatka v tabeli 2 in tabeli 3, ki sta označena z zvezdico.

1. Komentar: **30,06 odstotka odseljenih iz Slovenije v letu 2017 je bilo starih od 25 do 29 let.**

1 točka

1 točka – pravilno razložen odstotek

2. Komentar: **Med odseljenimi iz Slovenije v letu 2017 v starostni skupini od 30 do 34 let je bilo 60,89 odstotka moških.**

1 točka

1 točka – pravilno razložen odstotek

2. NALOGA

Tabela 4: Število prebivalstva po spolu, število zasebnih gospodinjstev in gostota prebivalstva ob popisih v letih od 1981 do 2018

Leto	Prebivalci - SKUPAJ	Moški	Ženske	Gostota prebivalstva na km ²	Zasebna gospodinjstva
1981	1891864	918766	973098	93,3	594571
1991	1913355	923643	989712	94,4	632278
2002	1964036	958576	1005460	96,9	684847
2011	2050189	1014563	1035626	101,1	813531
2015	2062874	1022229	1040645	101,8	820541
2018	2066880	1027041	1039839	102,0	824618

Vir: SURS

Tabela 5: Izbrani kazalci ob popisih v letih od 1981 do 2018

Leto	Število žensk na 1000 moških	Površina v km ²	Št. članov na gospod.
1981	1059,14	20227,21	3,18
1991	1071,53	20268,59	3,03
2002	1048,91	20268,69	2,87
2011	1020,76	20278,82	2,52
2015	1018,02	20263,99	2,51
2018	1012,46	20263,53	2,51

- a) Izračunajte število žensk na 1000 moških za posamezna leta. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.)

2 točki

2 točki – vsi pravilno izračunani statistični koeficienti

1 točka – 1 napaka pri izračunanih statističnih koeficientih

- b) Zapišite obrazec za izračun površine in izračunajte površino za posamezna leta. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.)

3 točke

$$\text{Površina} = \frac{\text{Število prebivalcev}}{\text{Gostota prebivalstva}}$$

1 točka – pravilna izpeljava obrazca za izračun površine

2 točki – vse pravilno izračunane površine za posamezna leta

1 točka – 1 napaka pri izračunanih površinah

- c) Izračunajte število članov na gospodinjstvo po letih. (*Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.*)

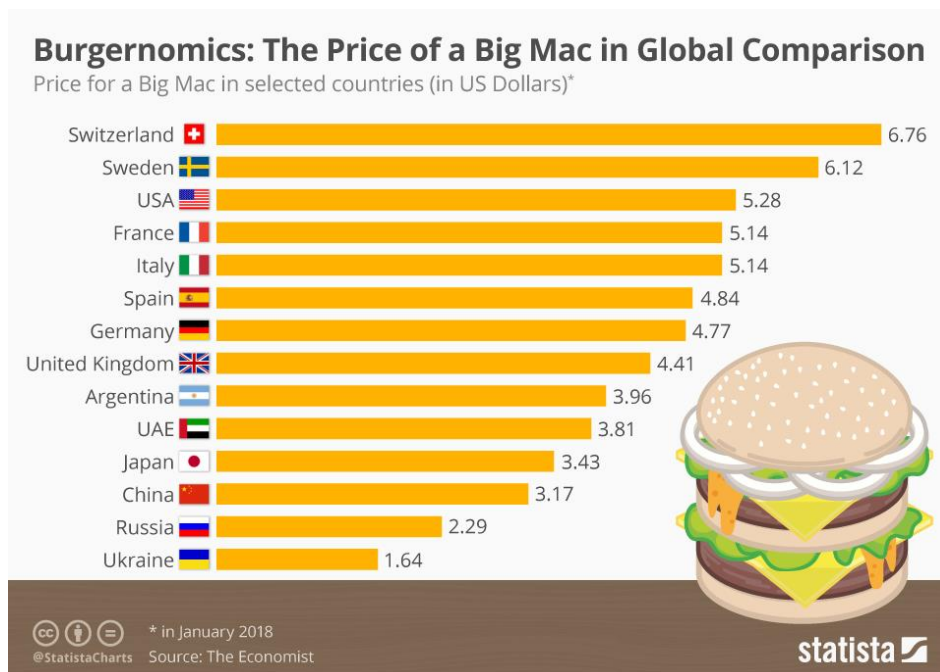
2 točki

2 točki – vsi pravilno izračunani statistični koeficienti

1 točka – 1 napaka pri izračunanih statističnih koeficientih

3. NALOGA

Slika prikazuje cene hamburgerja Big Mac v nekaterih državah v mesecu januarju 2018.



Vir: <https://www.statista.com/chart/13672/burgernomics-the-price-of-a-big-mac-in-global-comparison/>

- a) S pomočjo ustreznih indeksov analizirajte cene hamburgerja po državah tako, da boste primerjali ceno hamburgerja v posamezni državi s ceno hamburgerja v Veliki Britaniji. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 6.)

2 točki

Tabela 6: Indeksi za cene hamburgerja po državah v mesecu januarju 2018

Država	I _{j/vb}	D _j %
Švica	153,29	+53,29
Švedska	138,78	
ZDA	119,05	
Francija	116,55	
Španija	109,75	
Nemčija	108,16	
Velika Britanija	100,00	
Japonska	77,78	
Kitajska	71,88	
Rusija	51,93	-48,07

2 točki – vsi pravilno izračunani indeksi

1 točka – 1 napaka pri izračunanih indeksih

- b) Za koliko odstotkov je bila cena hamburgerja v Švici in Rusiji višja oz. nižja v primerjavi s ceno hamburgerja v Veliki Britaniji?

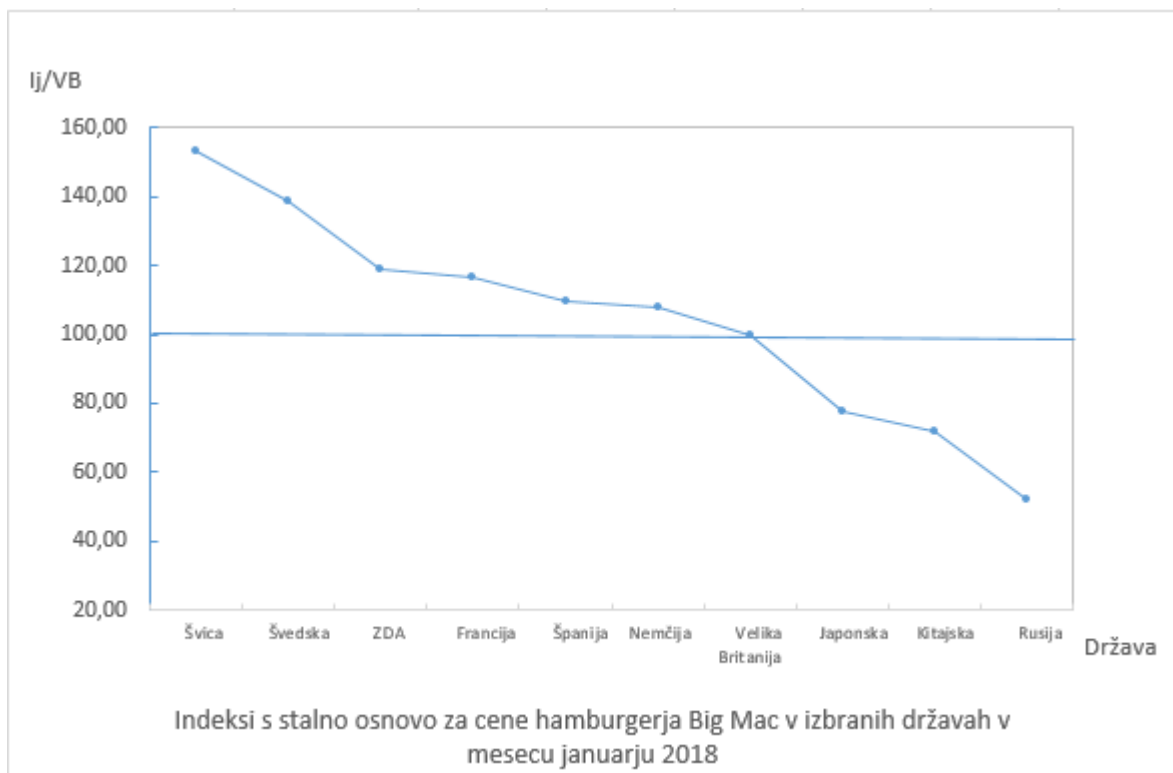
1 točka

V Švici je bila cena hamburgerja višja za 53,29 odstotka, v Rusiji pa za 48,07 odstotka nižja v primerjavi s ceno hamburgerja v Veliki Britaniji.

1 točka – oba pravilno izračunana in razložena odstotka

- c) Grafično prikažite kazalce, ki ste jih izračunali pri točki a.

2 točki



1 točka – pravilno opremljen grafik (oznake osi, naslov grafikona, izbrano merilo na osi y)

1 točka – vse pravilno vrisane točke za indekse s stalno osnovo

- d) V mesecu januarju 2018 je povprečna neto plača v Sloveniji znašala 1.077,73 EUR. Izračunajte, koliko hamburgerjev bi lahko s povprečno slovensko plačo kupili v Švici in Veliki Britaniji. (*Rezultate zaokrožite na celo število.*)

2 točki

$$\text{Št. hamburgerjev}_{\text{švica}} = 1077,73/6,76 = 159 \text{ hamburgerjev}$$

$$\text{Št. hamburgerjev}_{\text{VB}} = 1077,73/4,41 = 244 \text{ hamburgerjev}$$

1 točka – pravilno izračunano število hamburgerjev za Švico

1 točka – pravilno izračunano število hamburgerjev za Veliko Britanijo

4. NALOGATabela 7: **Delavci po produktivnosti** (izraženi v številu izdelkov) v podjetju **Lampionček, d. o. o.**

Število izdelkov	Zaposleni f_j	b)	c)	d)
20 - 24	2	0,018	2	0,018
25 - 29	10	0,091	12	0,109
30 - 34	22	0,200	34	0,309
35 - 39	42	0,382	76	0,691
40 - 44	24	0,218	100	0,909
45 - 49	10	0,091	110	1,000
Skupaj	110	1,000		

- a) Katero populacijo smo opazovali, kaj je bila statistična enota in kaj statistična spremenljivka?

1 točka**Stat. populacija: delavci v podjetju Lampionček, d.o.o.****Stat. enota: delavec****Stat. sprem.: produktivnost dela**

1 točka – vsi pravilno opredeljeni temeljni pojmi

- b) Izračunajte relativne frekvence in razložite izračunani kazalec v 3. razredu. (*Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v tabelo 7.*)

2 točki**Razlaga kazalca: 20 odstotkov zaposlenih je izdelalo od 30 do 34 izdelkov.**

1 točka – vse pravilno izračunane relativne frekvence

1 točka – pravilno razložen kazalec v 3. razredu

- c) Izračunajte kumulativo absolutnih frekvenc in razložite izračunani kazalec v 5. razredu. (*Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo 7.*)

2 točki**Razlaga kazalca: 100 zaposlenih je izdelalo do 44 izdelkov.**

1 točka – vse pravilno izračunane kumulativne absolutnih frekvenc

1 točka – pravilno razložen kazalec v 5. razredu

- d) Izračunajte kumulativo relativnih frekvenc in razložite izračunani kazalec v 4. razredu.
(Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v tabelo 7.)

2 točki

Razlaga kazalca: **69,1 odstotka zaposlenih je izdelalo do 39 izdelkov.**

1 točka – vse pravilno izračunane kumulativne relativnih frekvenc

1 točka – pravilno razložen kazalec v 4. razredu

Rešitve in točkovnik

Točke z zvezdico so postopkovne točke in jih damo tudi ob prenosu napake.

Točke brez zvezdice damo le ob popolnem ujemanju rezultatov z objavljenimi rešitvami.

1. V tabeli so zbrani podatki o številu prodanih stanovanj in povprečni ceni kvadratnega metra stanovanja v izbranih tržnih območjih Slovenije za leta 2015, 2016 in 2017. V nalogi privzemi, da imajo stanovanja v vseh območjih v povprečju enako površino.

Tržno območje	2015		2016		2017	
	Število stanovanj	Povprečna cena v €	Število stanovanj	Povprečna cena v €	Število stanovanj	Povprečna cena v €
Celje	243	1050	293	1130	325	1140
Koper	173	1800	230	1960	184	2110
Kranj	178	1560	225	1610	200	1700
Ljubljana	1522	2040	1863	2180	1829	2410
Maribor	788	1050	870	1080	937	1150
Murska Sobota	66	880	59	900	72	940
Nova Gorica	97	1480	96	1410	125	1560
Novo mesto	99	1220	112	1250	145	1360

Vir: Geodetska uprava Republike Slovenije¹ (GURS)

- a) Izračunaj povprečno ceno kvadratnega metra stanovanja v Novem mestu v letu 2016, če veš, da so se v primerjavi s prejšnjim letom tam stanovanja podražila za 2,46 %. Rezultat v evrih zaokroži na desetice. [2 točki]

Rešitev

Ker je bila v Novem mestu cena leta 2015 enaka 1220 €, je leta 2016 znašala

$$1220 \cdot 1,0246 = 1250 \text{ €}.$$

Točkovanje

Pravilen račun 1 točka, rezultat 1 točka.

- b) Izračunaj število prodanih stanovanj v Novem mestu v letu 2016, če veš, da se je tam v letu 2017 v primerjavi s prejšnjim letom število prodaj povečalo za 29,46 %. [2 točki]

Rešitev

Ker je bilo v Novem mestu leta 2017 prodanih 145 stanovanj, je bilo leta 2016 prodanih

$$\frac{145}{1,2946} = 112$$

¹Podatki v tabeli vključujejo le tiste kupoprodaje novih in rabljenih stanovanj, pri katerih GURS razpolaga z dovolj natančnimi podatki za statistično analizo.

stanovanj.

Točkovanje

Pravilen račun 1 točka, rezultat 1 točka.

- c) Kako in za koliko odstotkov se je spremenila povprečna cena kvadratnega metra stanovanja v Novem mestu v obdobju 2015-2017? Rezultat v odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti. [2 točki]

Rešitev

Leta 2015 je v Novem mestu cena znašala 1220 €, leta 2017 pa 1360 €.

Cena se je povišala za

$$\frac{1360 - 1220}{1220} = \frac{140}{1220} = 0,1148 = 11,48 \%$$

Točkovanje

Smer spremembe (se poviša) 1 točka.

Vrednost spremembe v odstotkih 1 točka.

- d) Kolikšen donos ali izgubo je ustvarila Damjana, ki je leta 2015 kupila, leta 2017 pa prodala 50 m² veliko stanovanje v Novem mestu, če je bila obakrat cena kvadratnega metra stanovanja 10 % nad novomeškim povprečjem? Stroške nakupa in prodaje zanemari. [3 točke]

Rešitev

Damjana je ob nakupu plačala $50 \cdot 1220 \cdot 1,1 = 67\,100$ €.

Ob prodaji je prejela $50 \cdot 1360 \cdot 1,1 = 74\,800$ €.

Ustvarila je donos v višini $74\,800 - 67\,100 = 7\,700$ €.

Točkovanje

Pravilno določena cena nakupa v evrih (zadošča zapisan faktor 1,1) 1 točka.

Odgovor ('donos' in znesek v evrih) 1+1 točka.

- e) Izračunaj povprečne cene kvadratnega metra stanovanja v mestih vzhodne Slovenije (vključuje Celje, Maribor, Mursko Soboto in Novo mesto), v mestih zahodne Slovenije (vključuje Koper, Kranj, Ljubljano in Novo Gorico) in v mestih celotne Slovenije za leto 2017. Rezultate v evrih zaokroži na desetice. [9 točk]

Rešitev

Ker je bilo v mestih prodanih različno število stanovanj, uporabimo tehtano povprečje. Ker imajo stanovanja v vseh območjih v povprečju enako površino, površina ne vpliva na izračun povprečij.

Povprečna cena v mestih vzhodne Slovenije je leta 2017 znašala

$$\frac{325 \cdot 1140 + 937 \cdot 1150 + 72 \cdot 940 + 145 \cdot 1360}{325 + 937 + 72 + 145} = \frac{1\,712\,930}{1479} \doteq 1160 \text{ €}$$

Povprečna cena v mestih zahodne Slovenije je leta 2017 znašala

$$\frac{184 \cdot 2110 + 200 \cdot 1700 + 1829 \cdot 2410 + 125 \cdot 1560}{184 + 200 + 1829 + 125} = \frac{5\,331\,130}{2338} \doteq 2280 \text{ €}$$

Povprečna cena v mestih celotne Slovenije je leta 2017 znašala

$$\frac{1\,712\,930 + 5\,331\,130}{1479 + 2338} \doteq 1850 \text{ €}.$$

Povprečje za celotno Slovenijo lahko določimo tudi iz povprečij vzhodne in zahodne polovice države

$$\frac{1479 \cdot 1160 + 2338 \cdot 2280}{1479 + 2338} \doteq 1850 \text{ €}.$$

Točkovanje

Povprečji vzhodne in zahodne Slovenije skupaj 6 točk, in sicer za vsako od povprečij:

- formula za izračun povprečja 1* točka,
- pravilno izračunano in zaokroženo povprečje 2 točki;
- postopkovno točko damo pri uporabi napačnih podatkov iz tabele.

Povprečje celotne Slovenije 1+2 točki, enako kot za regionalni povprečji.*

Postopkovno točko damo v primeru napake pri izračunu regionalnih povprečij.

- f) Kako in za koliko odstotkov odstopata ceni v vzhodni in zahodni Sloveniji od državnega povprečja? Rezultata v odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti. [2 točki]

Rešitev

V vzhodni Sloveniji je povprečna cena za $1850 - 1160 = 690 \text{ €}$ oziroma

$$\frac{690}{1850} = 0,3730 = 37,30 \%$$

pod slovenskim povprečjem.

V zahodni Sloveniji je povprečna cena za $2280 - 1850 = 430 \text{ €}$, oziroma

$$\frac{430}{1850} = 0,2324 = 23,24 \%$$

nad slovenskim povprečjem.

Točkovanje

Pravilna odgovora (smer in vrednost v odstotkih) skupaj 1+1 točka.*

Postopkovno točko damo v primeru prenosa napake pri izračunu regionalnih povprečij.

Če tekmovalec uporabi izračune iz prejšnje naloge zaokrožene na več decimalnih mest in rezultate v tej nalogi pravilno zaokroži, potem dobljene rezultate priznamo za pravilne.

2. Dijakinja Lara bo jeseni 2019 začela dodiplomski študij finančne matematike. Zaradi uspehov na tekmovanjih bo dobila Zoisovo štipendijo. Študij bo zaključila konec septembra 2022. Ob zaključku študija želi kupiti rabljen avto, zato bo vsak mesec del štipendije prihranila. Od oktobra 2019 do septembra 2022 bo ob koncu vsakega meseca položila 60 € na varčevalni račun. Banka zanj uporablja relativno mesečno obrestovanje in $1,2 \%$ letno obrestno mero.

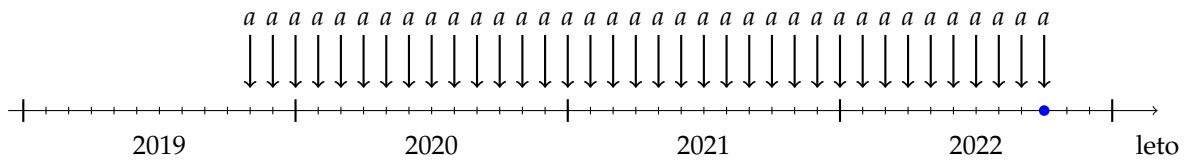
Rezultata v evrih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Kolikšno bo stanje na Larinem varčevalnem računu konec septembra 2022, takoj po zadnjem pologu? [10 točk]

Rešitev

Lara vsak mesec položi na račun znesek $a = 60 \text{ €}$.

Denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Mesečni obrestni faktor je $r = 1 + \frac{p}{12 \cdot 100} = 1,001$.

Redukcijski termin postavimo na konec septembra 2022.

Vsa vplačila naobrestimo do redukcijskega termina.

$$\begin{aligned}
 G &= ar^{35} + ar^{34} + \dots + ar + a \\
 &= a(r^{35} + r^{34} + \dots + r + 1) \\
 &= a \cdot \frac{r^{36} - 1}{r - 1} = 60 \cdot \frac{1,001^{36} - 1}{1,001 - 1} = 2198,23 \text{ €}.
 \end{aligned}$$

Lara bo imela na računu 2198,23 €.

Točkovanje

Shema denarnih tokov oziroma razumevanje naloge 2 točki.

Mesečni obrestni faktor 1 točka.

Enačba na osnovi načela ekvivalence glavnice 2*+1 točka.

Vsota geometrijske vrste 2* točki.

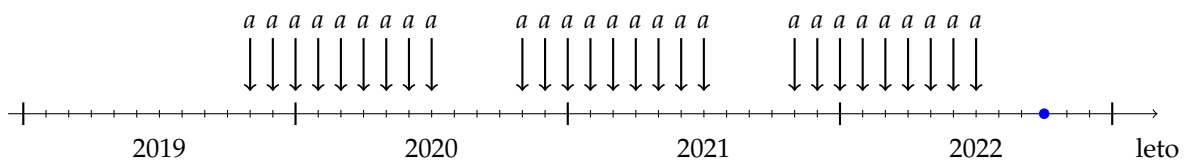
Rezultat 2 točki.

Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

- b) Poleti 2020 Lara ugotovi, da zaradi napornega in uspešnega študija nujno potrebuje daljše počitnice na morju. Zaradi povečanih stroškov v juliju, avgustu in septembru ne bo mogla položiti denarja na varčevalni račun. Tako bo tudi v naslednjih letih. Kolikšno bo v tem primeru stanje na njenem varčevalnem računu konec septembra 2022? [10 točk]

Rešitev

Nove denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Nova glavnica je

$$\begin{aligned}
 G_1 &= ar^{35} + ar^{34} + \dots + ar^{27} + ar^{23} + ar^{22} + \dots + ar^{15} + ar^{11} + ar^{10} + \dots + ar^3 \\
 &= ar^{27}(r^8 + r^7 + \dots + r + 1) + ar^{15}(r^8 + r^7 + \dots + r + 1) + ar^3(r^8 + r^7 + \dots + r + 1) \\
 &= ar^3(r^8 + r^7 + \dots + r + 1)(r^{24} + r^{12} + 1) \\
 &= ar^3 \cdot \frac{r^9 - 1}{r - 1} \cdot (r^{24} + r^{12} + 1) \\
 &= 60 \cdot 1,001^3 \cdot \frac{1,001^9 - 1}{1,001 - 1} \cdot (1,001^{24} + 1,001^{12} + 1) = 1651,14 \text{ €}.
 \end{aligned}$$

Lara bo imela na računu 1651,14 €.

Točkovanje

Nova shema denarnih tokov oziroma razumevanje naloge 2 točki.

Enačba na osnovi načela ekvivalence glavnice 3*+1 točka.

Vsota geometrijske vrste 2* točki.

Rezultat 2 točki.

Upoštevamo tudi drugačne pristope, ki vodijo k pravilni rešitvi.

3. Na finančnem trgu so na voljo tri obveznice uspešnega tehnološkega podjetja.

Dve obveznici sta brezkuponski. Prva ima nominalno vrednost 100 €, dospetje čez pol leta ter ceno 98,50 €. Druga obveznica ima nominalno vrednost 1000 €, dospetje čez eno leto ter ceno 967 €. Tretja obveznica je kuponska z letnimi kuponi. Njena nominalna vrednost je 1000 €, dospetje čez 2 leti, kuponska obrestna mera 3,6 % in cena 1002 €.

V nalogi diskontne faktorje zaokroži na štiri decimalna mesta, rezultate v evrih ali odstotkih pa na dve decimalni mesti.

a) Določi diskontne faktorje $D(0, \frac{1}{2})$, $D(0, 1)$ in $D(0, 2)$. [7 točk]

Rešitev

S pomočjo polletne obveznice s ceno $P_1 = 98,50$ € in nominalno vrednostjo $N_1 = 100$ € določimo polletni diskontni faktor $D(0, \frac{1}{2})$.

S formulo za vrednotenje obveznice dobimo $P_1 = N_1 \cdot D(0, \frac{1}{2})$ in zato

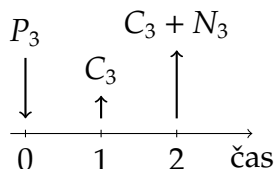
$$D(0, \frac{1}{2}) = \frac{P_1}{N_1} = \frac{98,50}{100} = 0,9850.$$

S pomočjo enoletne obveznice s ceno $P_2 = 967$ € in nominalno vrednostjo $N_2 = 1000$ € določimo letni diskontni faktor $D(0, 1)$.

S formulo za vrednotenje obveznice dobimo $P_2 = N_2 \cdot D(0, 1)$ in zato

$$D(0, 1) = \frac{P_2}{N_2} = \frac{967}{1000} = 0,9670.$$

Dveletna obveznica s ceno $P_3 = 1002$ € in nominalno vrednostjo $N_3 = 1000$ € izplačuje letne kupone v višini $C_3 = 0,036 \cdot 1000 = 36$ €, prvega čez eno leto, drugega pa ob dospetju skupaj z nominalno vrednostjo.



S formulo za vrednotenje obveznice dobimo

$$P_3 = C_3 \cdot D(0, 1) + (C_3 + N_3)D(0, 2)$$

in zato

$$D(0, 2) = \frac{P_3 - C_3 \cdot D(0, 1)}{C_3 + N_3} = \frac{1002 - 36 \cdot 0,9670}{36 + 1000} = 0,9336.$$

Točkovanje

Faktorja $D(0, \frac{1}{2})$ in $D(0, 1)$ vsak 2 točki.

Shema denarnih tokov oz. razumevanje kuponske obveznice 1 točka.

Faktor $D(0, 2)$ 2 točki.

- b) Določi efektivne obrestne mere $R(0, \frac{1}{2})$, $R(0, 1)$ in $R(0, 2)$.

[6 točk]

Rešitev

Za diskontne faktorje in obrestne mere velja

$$D(0, T) = \frac{1}{(1 + R(0, T))^T},$$

torej

$$R(0, T) = \frac{1}{D(0, T)^{\frac{1}{T}}} - 1.$$

Dobimo

$$R(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{D(0, \frac{1}{2})^2} - 1 = \frac{1}{0,9850^2} - 1 = 3,07\%$$

$$R(0, 1) = \frac{1}{D(0, 1)} - 1 = \frac{1}{0,9670} - 1 = 3,41\%$$

$$R(0, 2) = \frac{1}{\sqrt{D(0, 2)}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{0,9336}} - 1 = 3,50\%$$

Točkovanje

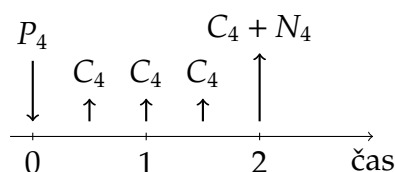
Vsaka obrestna mera 1*+1 točka.

Postopkovno točko damo pri prenosu napake iz prejšnjega vprašanja.

- c) Določi interval možnih cen dveletne kuponske obveznice istega podjetja z nominalno vrednostjo 1000 €, polletnimi kuponi in kuponsko obrestno mero 3,5%, če veš, da je efektivna obrestna mera $R(0, T)$ strogo naraščajoča funkcija časa T . [7 točk]

Rešitev

Dveletna obveznica z nominalno vrednostjo $N_4 = 1000$ € izplačuje polletne kupone v višini $C_4 = \frac{1}{2} \cdot 0,035 \cdot 1000 = 17,50$ €, prvega čez pol leta, zadnjega ob dospelju skupaj z nominalno vrednostjo.



S formulo za vrednotenje obveznice dobimo

$$P_4 = C_4 \cdot D(0, \frac{1}{2}) + C_4 \cdot D(0, 1) + C_4 \cdot D(0, \frac{3}{2}) + (C_4 + N_4)D(0, 2).$$

V formuli je neznan diskontni faktor $D(0, \frac{3}{2})$.

Ker je $R(0, T)$ strogo naraščajoča funkcija T , mora za obrestne mere veljati

$$3,41 \% = R(0, 1) < R(0, \frac{3}{2}) < R(0, 2) = 3,50 \%$$

Višjim obrestnim meram pripadajo nižji diskontni faktorji.

Za diskontni faktor $D(0, \frac{3}{2})$ tako dobimo neenakosti

$$\frac{1}{(1 + 0,0350)^{3/2}} < D(0, \frac{3}{2}) = \frac{1}{(1 + R(0, \frac{3}{2}))^{3/2}} < \frac{1}{(1 + 0,0341)^{3/2}},$$

kar je

$$0,9497 < D(0, \frac{3}{2}) < 0,9509.$$

Označimo spodnjo mejo z $D_s(0, \frac{3}{2})$, zgornjo pa z $D_z(0, \frac{3}{2})$.

Spodnja meja intervala možnih cen je

$$\begin{aligned} P_{4s} &= C_4 \cdot D(0, \frac{1}{2}) + C_4 \cdot D(0, 1) + C_4 \cdot D_s(0, \frac{3}{2}) + (C_4 + N_4)D(0, 2) \\ &= 17,5 \cdot 0,9850 + 17,5 \cdot 0,9670 + 17,5 \cdot 0,9497 + 1017,5 \cdot 0,9336 \\ &= 1000,72 \text{ €}. \end{aligned}$$

Zgornja meja intervala možnih cen je

$$\begin{aligned} P_{4s} &= C_4 \cdot D(0, \frac{1}{2}) + C_4 \cdot D(0, 1) + C_4 \cdot D_z(0, \frac{3}{2}) + (C_4 + N_4)D(0, 2) \\ &= 17,5 \cdot 0,9850 + 17,5 \cdot 0,9670 + 17,5 \cdot 0,9509 + 1017,5 \cdot 0,9336 \\ &= 1000,74 \text{ €}. \end{aligned}$$

Cena obveznice leži na intervalu (1000,72; 1000,74).

Točkovanje

Višina kupona 1 točka.

Shema denarnih tokov oz. razumevanje kuponske obveznice 1 točka.*

Postopkovno točko damo pri napačni višini kupona.

Formula za vrednotenje obveznice 1 točka.

Ocena za diskontni faktor $D(0, \frac{3}{2})$; vsaka meja 1 točka.*

Postopkovni točki damo pri prenosu napake iz prejšnjih vprašanj.

Interval cen; vsako krajišče 1 točka.

Kot pravilna upoštevamo tudi odstopanja, ki so posledica drugačnega zaokroževanja pri predhodnih in vmesnih izračunih.

4. Banka uporablja naslednjo časovno strukturo obrestnih mer in **navadno** obrestovanje:

t	0,5	1,0	1,5
$R(0, t)$	0,60 %	0,90 %	1,10 %

Gradbeno podjetje načrtuje gradnjo stanovanjskega objekta, v katerem bo 35 stanovanj. Zaradi izjemne lokacije so kupci pripravljene vsa stanovanja kupiti že pol leta pred začetkom gradnje. Posamezno stanovanje stane 180 000 €, kupec pa mora tretjino cene plačati ob sklenitvi pogodbe, tretjino pol leta po sklenitvi (to je ob začetku gradnje), tretjino pa ob prevzemu stanovanja leto in pol po sklenitvi pogodbe.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) V skladu s finančnim načrtom bo podjetje polovico prvega obroka vseh kupnin namenilo plačilu zemljišča, polovico pa namerava investirati na banki do začetka gradnje. Določi prejeti znesek ob izteku bančnega depozita. [4 točke]

Rešitev

Prvi obrok kupnine znaša $\frac{1}{3} \cdot 180\,000 = 60\,000$ €.

Podjetje skupaj prejme $35 \cdot 60\,000 = 2\,100\,000$ €.

Plačilu zemljišča nameni $\frac{1}{2} \cdot 2\,100\,000 = 1\,050\,000$ €.

Na banko za pol leta ($t_1 = \frac{1}{2}$) položi $G_1 = 1\,050\,000$ € po obrestni meri $R(0, \frac{1}{2}) = 0,60\%$.

Ob koncu depozita prejme

$$G_2 = G_1 + o_1 = G_1 + G_1 \cdot R(0, \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = 1\,050\,000 + 1\,050\,000 \cdot 0,006 \cdot \frac{1}{2} = 1\,053\,150 \text{ €}.$$

Točkovanje

Začetna glavnica pologa 2 točki.

Končna glavnica pologa 1*+1 točka.

Postopkovno točko damo pri napačni začetni glavnici.

- b) Podjetje načrtuje, da bo ob začetku gradnje potrebovalo 5 milijonov evrov. Del zneska bodo pokrili z že prejetimi kupninami, manjkajoči del pa si bodo sposodili pri banki v obliki enoletnega kredita z enkratnim poplačilom. Določi dobiček podjetja ob predaji stanovanj, če bo ob najemu kredita obrestna mera kredita znašala $R(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 0,90\%$. Privzemi, da bodo vse kupnine plačane pravočasno in da bo gradnja potekala v skladu s finančnim načrtom. [6 točk]

Rešitev

Iz bančnega depozita podjetje prejme $G_2 = 1\,053\,150$ €.

Z drugim obrokom kupnine podjetje skupaj prejme $G_3 = 2\,100\,000$ €.

Za gradnjo potrebuje $G_4 = 5\,000\,000$ €.

Na banki si sposodi $G_5 = G_4 - G_2 - G_3 = 1\,846\,850$ € za eno leto ($t_2 = 1$).

Če je enoletna obrestna mera $R(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = 0,90\%$, podjetje leto po najemu vrne znesek

$$G_6 = G_5 + o_2 = G_5 + G_5 \cdot R(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cdot 1 = 1\,846\,850 + 1\,846\,850 \cdot 0,009 = 1\,863\,471,65 \text{ €}.$$

Ker tedaj prejme še zadnji obrok kupnine $G_7 = 2\,100\,000$ €, z gradnjo ustvari dobiček

$$G_8 = G_7 - G_6 = 236\,528,35 \text{ €}.$$

Točkovanje

Začetna glavnica kredita 1*+1 točka.

Končna glavnica kredita 1*+1 točka.

Postopkovni točki damo pri prenosu napak iz prejšnjega vprašanja.

Dobiček 2 točki.

- c) Obrestna mera $R(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ je negotova, točna vrednost bo znana šele ob najemu kredita. Pri kolikšni obrestni meri $R(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ bi bil končni dobiček podjetja za polovico nižji? [5 točk]

Rešitev

Označimo neznano obrestno mero $R(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = R$.

Dobiček mora znašati $G'_8 = \frac{G_8}{2} = 118\,264,18 \text{ €}$.

Takšen dobiček bo dosežen, če bo moralo podjetje ob koncu kredita vrniti

$$G'_6 = G_7 - G'_8 = 2\,100\,000 - 118\,264,18 = 1\,981\,735,82 \text{ €}.$$

Iz enačbe $G'_6 = G_5 + o' = G_5 + G_5 \cdot R \cdot 1 = G_5(1 + R)$ dobimo

$$R = \frac{G'_6}{G_5} - 1 = \frac{1\,981\,735,82}{1\,846\,850} - 1 = 7,30 \text{ %}.$$

Točkovanje

Nov dobiček in nov znesek vračila 1*+1* točka.

Postopkovne točke damo pri prenosu napake iz prejšnjih vprašanj.

Enačba, iz katere je mogoče izraziti R , 2 točki.

Rezultat 1 točka.

Ker je decimalni del dobička 0,175 €, upoštevamo tudi zaokrožitev na 0,17 €.

- d) Podjetje se negotovosti v obrestni meri kredita izogne s sklenitvijo dogovora o terminski obrestni meri. Za kolikšno obrestno mero se dogovori z banko? Kolikšen je tedaj netvegan dobiček podjetja? [5 točk]

Rešitev

Dogovorjena obrestna mera je terminska obrestna mera

$$R(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1 + R(0, \frac{3}{2}) \cdot \frac{3}{2}}{1 + R(0, \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1 + 0,011 \cdot \frac{3}{2}}{1 + 0,006 \cdot \frac{1}{2}} - 1 = 1,35 \text{ %}.$$

Podjetje pri tej obrestni meri ob vračilu kredita plača

$$G''_6 = G_5(1 + R(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cdot 1) = 1\,846\,850(1 + 0,0135) = 1\,871\,782,48 \text{ €}$$

in ustvari netvegan dobiček

$$G''_8 = G_7 - G''_6 = 228\,217,52 \text{ €}.$$

Točkovanje

Formula za terminsko obrestno mero 1 točka.

Izračunana terminska obrestna mera 2 točki.

Vrnjeni znesek kredita 1 točka.

Dobiček 1 točka.

Ker je decimalni del vrnjenega zneska 0,475 €, upoštevamo tudi zaokrožitev na 0,47 €.

Vse točke damo tudi v primeru, če tekmovalec/-ka zapiše in nato uporabi bolj natančno vrednost terminske obrestne mere.