

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3	A4	A5

B1	B2	B3	B4

Sklop A

A1 Zjutraj smo odplačali 62,5 % dolga, preostalih 15 evrov dolga pa bomo vrnili zvečer. Koliko je znašal skupni dolg?

- (A) 24 evrov (B) 30 evrov (C) 40 evrov (D) 15 evrov (E) 55 evrov

A2 Od katerega števila moramo odšteti kvadrat razlike najmanjšega sodega in najmanjšega lihega praštevila, da dobimo šestnajstino zmnožka števil $(-2)^4$ in -2^4 ?

- (A) -3 (B) 15 (C) -15 (D) 3 (E) $\sqrt{3}$

A3 V katerega izmed naslednjih izrazov lahko preoblikujemo izraz $(x + 1)^2 + x^2 - 1 + 2x + 2$?

- (A) $2(x + 1)$ (B) $2(x - 1)^2$ (C) $2(x - 1)$ (D) $2(x + 1)^2$ (E) $2(x^2 - 1)$

A4 Koliko je vrednost izraza $3x + 7(y + 4x^2 - 2)$ za $x = -5$ in $y = 3$?

- (A) 692 (B) 722 (C) 104 (D) -62 (E) 62

A5 Zmnožek četrtnine in petine nekega naravnega števila n je 500. Koliko je n ?

- (A) 500 (B) 10 000 (C) 20 (D) 200 (E) 100

Sklop B

B1 Reši enačbo

$$2x(x - 3) - 3(x - 1)(x + 1) = -3 - (-2 + x)^2.$$

(6 točk)

B2 Na ekološki kmetiji bodo v vrečke pakirali 570 kosov zelenjave: 216 rdečih pes, 144 čebul in 210 krompirjev. V vsako vrečko bodo dali enako število kosov zelenjave in vsaki vrečki bo le zelenjava iste vrste. Največ koliko kosov posamezne zelenjave naj dajo v posamezno vrečko, če želijo pri tem porabiti vso zelenjavo? Koliko vrečk potrebujejo v tem primeru?

(6 točk)

B3 Zapiši interval, ki je množica rešitev sistema neenačb

$$\begin{aligned}x - \frac{2x - 3}{2} - \frac{5 + 2x}{6} &> 0, \\(x - 3)^2 - (x - 1)(x + 2) &> 9 - 3x.\end{aligned}$$

(7 točk)

B4 Izračunaj vrednost izraza $\frac{\frac{a^2+3b^2}{b^2} - 3}{3 - \frac{3a+3b^2}{b^2}}$ za $a = -\frac{9}{5}$ in $b = 33$.

(7 točk)

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3	A4	A5

B1	B2	B3	B4

Sklop A

A1 Kot α je velik $26^\circ 31'$. Koliko je velik suplementarni kot dvakratnika kota α ?

- (A) $126^\circ 58'$ (B) $36^\circ 58'$ (C) $63^\circ 29'$
 (D) $153^\circ 29'$ (E) Dvakratnik kota α nima suplementarnega kota.

A2 Koliko je vrednost izraza $\frac{\sqrt[3]{x^{-2}x^{\frac{5}{2}}}}{\sqrt[4]{x^3x^{\frac{5}{12}}}}$ za $x = 8$? ¹

- (A) 2 (B) 8 (C) -1 (D) 4 (E) 6

A3 Graf funkcije f s predpisom $f(x) = (a - 2)x - 2a + 3$ seka ordinatno os v točki T . Daljica OT , kjer je O izhodišče koordinatnega sistema, je dolga 5 enot. Katero izmed naštetih števil je lahko vrednost parametra a ?

- (A) 1 (B) 4 (C) 2 (D) 0 (E) $\frac{7}{4}$

A4 Presečišče diagonal S v trapezu je od osnovnice a oddaljeno 8 cm, od osnovnice c pa 6 cm. Osnovnica a je dolga 20 cm. Koliko je dolga osnovnica c ?

- (A) 26,7 cm (B) 10 cm (C) 15 cm (D) $10\sqrt{2}$ cm (E) $15\sqrt{2}$ cm

A5 Dana je premica z enačbo $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$. Katera izmed navedenih enačb premic je enačba premice, ki je dani premici vzporedna?

- (A) $y = -\frac{4}{3}x + 5$ (B) $y = \frac{3}{4}x - 1$ (C) $3x - 4y = 7$
 (D) $6y - 8x = 1$ (E) $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$

¹Na tekmovanju nam je zagodel tiskarski škrat, saj naloga pri $x = 4$ glede na ponujene odgovore ni rešljiva. Nalogo smo iz točkovanja izvzeli.

Sklop B

B1 Za trikotnik ABC velja $\beta = 15^\circ$, $\gamma = 30^\circ$ in $|AB| = 5$ cm. Premica, ki je pravokotna na AB in poteka skozi oglišče A , seka stranico BC v točki D . Izračunaj velikost kota DAC in dolžino daljice BD . Dolžino daljice BD zaokroži na tri mesta natančno. Nariši skico.

(6 točk)

B2 Naj bo $x - y = 3$. Izračunaj vrednost izraza $\frac{x\sqrt{3}}{3} - \frac{y}{\sqrt{3}}$. Rezultat naj bo natančen.

(6 točk)

B3 Nogometni trener Joško prejema dnevno plačo, ki je linearno odvisna od števila ljudi, ki pridejo na trening. Če pride na trening 10 ljudi, znaša njegova dnevna plača 100 evrov, če pa pride na trening 14 ljudi, pa 120 evrov.

- Zapiši predpis, ki podaja Joškovo dnevno plačo v odvisnosti od števila ljudi, ki pridejo na trening.
- Koliko je Joškova dnevna plača, če nihče ne pride na trening?
- Koliko je Joškova dnevna plača, če pride na trening 20 ljudi?
- Koliko ljudi mora priti na trening, če želi Joško prejeti dnevno plačo 300 evrov?

(7 točk)

B4 Diagonala pravokotnika z obsegom 42 cm je za 3 cm daljša od ene izmed njegovih stranic. Izračunaj dolžini stranic tega pravokotnika.

(7 točk)

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3	A4	A5

B1	B2	B3	B4

Sklop A

A1 Za eksponentno funkcijo f s predpisom $f(x) = a^x$ velja $f(-\frac{3}{2}) = \frac{27}{8}$. Koliko je $f(-1)$?

- (A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{9}{4}$ (C) -1 (D) $\frac{8}{27}$ (E) $\frac{2}{3}$

A2 Naj velja $x > 0$ in $y > 0$ ter $\ln x + \ln y = 0$. Katera izmed naslednjih izjav je pravilna?

- (A) $x = y^{-1}$ (B) $x + y = 0$ (C) $x + y = 1$
 (D) $x = y = 7$ (E) Spremenljivki x in y sta med seboj neodvisni.

A3 Katera množica je množica rešitev neenačbe $x^2 < 4$?

- (A) $(-\infty, -2)$ (B) $(-\infty, 2)$ (C) $(-2, 2)$
 (D) $(2, \infty)$ (E) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

A4 Naj bo $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + k$. Koliko je vrednost parametra k za funkcijo f , ki ima najmanjšo vrednost -8 ?

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 2 (E) -2

A5 Kvadrat s stranico, dolgo 4 cm, razdelimo na 4 enake kvadrate. Nato narišemo krožnico, ki poteka skozi središča vseh štirih malih kvadratov. Koliko je ploščina kroga, ki je omejen s to krožnico?

- (A) $\frac{\pi}{4} \text{ cm}^2$ (B) $\frac{\pi}{2} \text{ cm}^2$ (C) $\pi \text{ cm}^2$ (D) $2\pi \text{ cm}^2$ (E) $4\pi \text{ cm}^2$

Sklop B

B1 Nejc se je odločil, da bo dal prepleskati svojo sobo. Njegova soba je oblike kvadra, ki je dolg 4,5 m, širok 5 m in visok 2,5 m. Od površine sten bodo izvzeli 1 m² zaradi okna in 2 m² zaradi vrat. Koliko bo Nejc plačal za pleskanje sten in stropa sobe, če cena za kvadratni meter pleskanja sten znaša 2 evra, stropa pa 4 evre?

(6 točk)

B2 Naj bo $x > 0$. Reši enačbo $\frac{-6 + \log_3 x^2}{\log_3 \sqrt{x}} = 2$.

(6 točk)

B3 V splošni obliki zapiši predpis za kvadratno funkcijo f , katere ničli sta rešitvi enačbe

$$\frac{x + 2,25}{x + 1} - \frac{2x - 1,75}{x - 1} = -\frac{5}{6},$$

njen graf pa seka ordinatno os v točki $N(0, -4)$.

(7 točk)

B4 Za deltoid $ABCD$ velja $|AB| = |BC|$. Označimo z α velikost kota BAD , z β velikost kota CBA in z δ velikost kota ADC . Velja $\alpha : \beta : \delta = 3 : 1 : 2$. Diagonale e je dolga 13 cm. Izračunaj ploščino deltoida. Rezultat izrazi v kvadratnih centimetrih in ga zaokroži na eno decimalno mesto natančno.

(7 točk)

Prostor za reševanje nalog sklopa B.

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 90 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3	A4	A5

B1	B2	B3	B4

Sklop A

A1 Naj bo $p(x) = x^3 - 5x^2 - ax - 6$ in $q(x) = x - 3$. Koliko je vrednost parametra a , če polinom q deli polinom p ?

- (A) -8 (B) -4 (C) 4 (D) 8 (E) 20

A2 Katera je največja podmnožica realnih števil, na kateri lahko definiramo funkcijo f s predpisom $f(x) = \frac{1}{2x^3+2}$?

- (A) \mathbb{R} (B) $\mathbb{R} - \{1\}$ (C) $\mathbb{R} - \{-1\}$ (D) $\mathbb{R} - \{-2\}$ (E) $\mathbb{R} - \{2\}$

A3 Koliko je velikost ostrega kota, ki ga oklepata mali in veliki urni kazalec, ko je ura petin-dvajset minut čez drugo uro popoldan?

- (A) 80° (B) $60^\circ 50'$ (C) $297^\circ 30'$ (D) 120° (E) $77^\circ 30'$

A4 Koliko je vrednost tretjega člena zaporedja s splošnim členom a_n , če je $a_1 = -2$, $a_2 = 3$ in $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ za vsako naravno število n ?

- (A) 5 (B) -6 (C) 11 (D) 1 (E) 0

A5 Katero izmed spodnjih zaporedij, podanih s splošnim členom a_n , ni geometrijsko?

- (A) $a_n = 4^n$ (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n+2}$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2$
(D) $a_n = 2^n \cos 30^\circ$ (E) $a_n = 25^{n-6}$

Sklop B

B1 Za ničli kvadratne funkcije f velja, da je njuna aritmetična sredina enaka 2 in njen produkt enak 1. Izračunaj $f(2)$, če je $f(1) = 4$.

(6 točk)

B2 Pokaži, da lahko izraz

$$\sin^3 x (1 + \cot x) + \cos^3 x (1 + \tan x)$$

preoblikujemo v izraz $\sin x + \cos x$, če je $x \neq \frac{k\pi}{2}$ in $k \in \mathbb{Z}$.

(6 točk)

B3 Reši neenačbo $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} \geq 1 - \frac{x}{x^2-4}$.

(7 točk)

B4 Sedem članov družine Novak, dva starša in pet otrok, se odpravi v kino, kjer imajo rezerviranih 7 sedežev v zadnji vrsti drug poleg drugega.

- Na koliko načinov se lahko posedejo na rezervirane sedeže?
- Na koliko načinov se lahko posedejo na rezervirane sedeže, če bodo otroci sedeli skupaj in starša skupaj?
- Na koliko načinov se lahko posedejo na rezervirane sedeže, če starša ne bosta sedela skupaj?

(7 točk)

Prostor za reševanje nalog sklopa B.