Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

5. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

30. marec 2005

NALOGE ZA PRVI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Enačba $0{,}\bar{3} - \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}} = 3$ ima rešitev:

(**A**) $x = -24$ (**B**) $x = 3$ (**C**) $x = -3$ (**D**) $x = 24$ (**E**) $x = 0$

A2. Pri pripravi žaganega lesa iz hlodovine je 8 % odpadka. Koliko kubičnih metrov žaganega lesa dobimo iz 150 m^3 hlodovine?

(**A**) 12 (**B**) 183 (**C**) 105 (**D**) 100 (**E**) 138

A3. Daljica ima eno krajišče v točki $(-2, 1)$. Razpolovišče daljice je v točki $(0, -1)$. V kateri točki je drugo krajišče?

(**A**) $(2, -3)$ (**B**) $(-1, 0)$ (**C**) $(1, -1)$ (**D**) $(2, 3)$
(**E**) V nobeni izmed navedenih.

A4. Vsota treh zaporednih sodih števil je vedno:

(**A**) deljiva s 4 (**B**) liho število (**C**) deljiva s 3
(**D**) večkratnik števila 8 (**E**) deljiva z 8

A5. Katera izmed navedenih neenačb nima rešitve?

(**A**) $3x - 1 < 5 - 3x$ (**B**) $\frac{2}{3}x - 1 \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{2}{3}x + 4 \leq \frac{3}{2}x + 2$
(**D**) $2x - \pi < \sqrt{5} + 2x$ (**E**) $x \leq x$

A6. Naj bo $\frac{a+b}{b} = 4$. Koliko je $\frac{b}{a+2b}$?

(**A**) 3 (**B**) 1 (**C**) 5
(**D**) $\frac{1}{3}$ (**E**) $\frac{1}{5}$

II. DEL

B1. Izračunajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik števil 72 in 168. Pomagajte si z razcepom na prafaktorje.

B2. Narišite množico točk (x, y) v ravnini, za katere je $x = -3$ in $-2 < y < 2$.

B3. Dane so točke $A(5,5)$, $B(-2,4)$ in $C(-1,-3)$. Izračunajte ploščino trikotnika ABC in dolžino njegove najkrajše višine.

B4. Skrčite izraz

$$\left(1+\frac{1+\frac{1+a}{1-3a}}{1-3\cdot\frac{1+a}{1-3a}}\right):\left(1-3\cdot\frac{1+\frac{1+a}{1-3a}}{1-3\cdot\frac{1+a}{1-3a}}\right)$$

NALOGE ZA DRUGI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Funkcija $f(x) = 3x + 6$ je pozitivna za:

(**A**) $x > 1$ (**B**) $x < -1$ (**C**) $x < -3$ (**D**) $x > -2$ (**E**) $x < 0$

A2. Premici, dani z enačbama $(m+2)x - 2y + 1 = 0$ in $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$, sta vzporedni. Koliko je m?

(**A**) -6 (**B**) $-\frac{1}{2}$ (**C**) -2 (**D**) 0
(**E**) Premici nista vzporedni za nobeno vrednost m.

A3. Kateri večkotnik ima 12 diagonal več kot stranic?

(**A**) osemkotnik (**B**) devetkotnik (**C**) desetkotnik
(**D**) enajstkotnik (**E**) dvanajstkotnik

A4. Koliko meri kot α v trikotniku, če je $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$?

(**A**) 60° (**B**) 30° (**C**) 120° (**D**) 150° (**E**) $30'$

A5. Vrednost izraza $9^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} - \sqrt{16^{\frac{5}{4}} - 7}$ je enaka:

(**A**) 0 (**B**) $-\frac{17}{2}$ (**C**) $\frac{27}{2} - 4\sqrt{2}$
(**D**) $\frac{17}{2}$ (**E**) 31

A6. Vrednost izraza $\dfrac{a^0 + b^0}{(a+b)^0} + (a^2 + b^2)^0$ je enaka:

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) $a + b$ (**D**) 2
(**E**) nič od navedenega

II. DEL

B1. Zapišite linearno funkcijo, ki ima ničlo 4, njen graf pa gre skozi presečišče premic z enačbama $x-2y-9=0$ in $2x+y-3=0$.

B2. Brez uporabe žepnega računala izračunajte vrednost izraza

$$8\cdot\sqrt[20]{32}-9\cdot\sqrt[5]{\sqrt[6]{9}}-4\cdot\sqrt[16]{16}+4\cdot\sqrt[5]{\sqrt[9]{27}}+5\cdot\sqrt[5]{\sqrt[12]{81}}\,.$$

B3. Rešite iracionalno enačbo $\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}=0$.

B4. Izračunajte višino in kot α enakokrakega trapeza s podatki $a=15$ cm, $c=7$ cm, $b=d=4\sqrt{2}$ cm.

5. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol — 30. marec 2005

NALOGE ZA TRETJI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

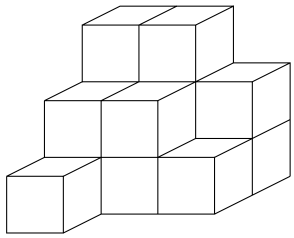
A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Za katero vrednost parametra m je enačba $(m^2-7m+6)x^2-mx+m-2=0$ linearna?

(**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 0 in 2
(**D**) 1 in 6 (**E**) -1 in -6

A2. Telo smo sestavili iz enakih kock (glej sliko). Koliko kubičnih decimetrov meri njegova prostornina?


2 cm

(**A**) 1,12 (**B**) 0,112 (**C**) 96 (**D**) 120
(**E**) Nič od navedenega.

A3. Trije kvadrati so postavljeni v vrsto tako, da ima vsak naslednji za 1 cm daljšo stranico. Vsi trije skupaj imajo ploščino 302 cm^2. Koliko centimetrov je dolga stranica največjega kvadrata?

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 11 (**D**) 12
(**E**) Nič od navedenega.

A4. Katera izmed naslednjih trditev je pravilna?

(**A**) $\log 0 = 0$ (**B**) $\log 5 = \log 10 - \log 5$ (**C**) $10^{\log \pi} = \pi$
(**D**) $\log 1 = 1$ (**E**) Če je $0 < x < y$, potem je $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} y$

A5. Rešitev enačbe $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$ je:

(**A**) $x=8$ (**B**) $x=-8$ (**C**) $x=0$ (**D**) $x=4$ (**E**) $x=10$

A6. Število bakterij se v 1 uri poveča za osmino. V laboratoriju so v posebno posodo postavili $3{,}6\cdot 10^7$ bakterij. Koliko bakterij je bilo v posodi po t urah?

(**A**) $3600000 \cdot 1,125^t$ (**B**) $3{,}6\cdot 10^7 \cdot 0{,}875^t$ (**C**) $b = 0{,}36\cdot 10^7 + 1{,}125^t$
(**D**) $b = 36\cdot 10^6 \cdot 1{,}125^t$ (**E**) $b = 0{,}36\cdot 8 \cdot 1,8^t$

II. DEL

B1. Zapišite definicijsko območje funkcije $f(x)=\sqrt{5-x^2}$.

B2. Razlika obsegov dveh kvadratov je 8 cm, razlika ploščin pa 16 cm^2. Izračunajte vsoto njunih ploščin.

B3. V gozdu vidim četrtino svoje črede kamel. Število tistih kamel, ki so se odpravile proti pobočju hriba, je dvakratnik korena števila moje celotne črede. Poleg tega še trikrat po pet kamel počiva ob reki. Koliko je, zapišite, kamel v moji čredi?

B4. Opišite množico vseh točk (x, y), ki ustrezajo pogoju

$$7^{x+y}=7^{x+2} \cdot 7^{2x+1}\,.$$

Množico upodobite v koordinatnem sistemu.

5. regijsko tekmovanje v znanju matematike
za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

30. marec 2005

NALOGE ZA ČETRTI LETNIK

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

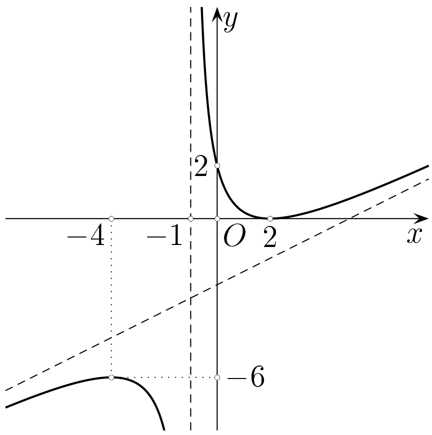
I. DEL

A1. Dana je funkcija $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Vrednost izraza $f(2) + 2f(0)$ je enaka:

(**A**) 0 (**B**) $f(-1)$ (**C**) 5
(**D**) $f(1)$ (**E**) Nič od navedenega.

A2. Na sliki je graf funkcije:

(**A**) $f(x) = \log_3(x+1) - 1$ (**B**) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{2x+2}$
(**C**) $f(x) = 2^{x+1} + 3$ (**D**) $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$
(**E**) Nič od navedenega.



A3. Izraz $3 - 3\cos^2 x$ je enak:

(**A**) 4 (**B**) 0 (**C**) $3\sin^2 x$
(**D**) $6\sin^4 x$ (**E**) $\sin^4 x$

A4. Splošni člen zaporedja $0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$ je:

(**A**) $a_n = (-1)^n$ (**B**) $a_n = 1 - (-1)^n$ (**C**) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$
(**D**) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ (**E**) Nič od navedenega.

A5. Prvi štirje členi neničelnega aritmetičnega zaporedja so $a,\ x,\ b,\ 2x$. Razmerje $a : b$ je enako:

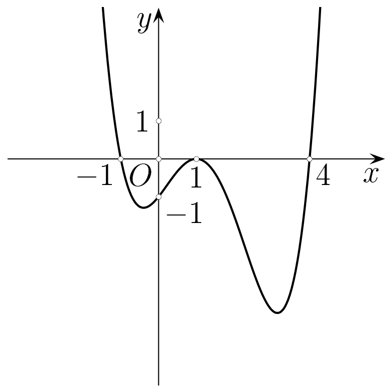
(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{2}{3}$ (**E**) 2

A6. Izraz $\sin 20^\circ + \sin\alpha$ lahko preoblikujemo v:

(**A**) $\cos 70^\circ + \sin(\pi - \alpha)$ (**B**) $\cos(\alpha - 20^\circ)$ (**C**) $\sin 20^\circ + \sin(\alpha - \pi)$
(**D**) $\sin(20^\circ + \alpha)$ (**E**) $\sin 160^\circ - \sin(\pi - \alpha)$

II. DEL

B1. Z grafa odčitajte ničle in začetno vrednost funkcije ter zapišite intervale, na katerih so funkcijske vrednosti negativne. Zapišite enačbo polinoma četrte stopnje, katerega graf je na sliki.



B2. Dana je funkcija $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$. Brez uporabe žepnega računala pokaži, da je $f(\frac{\pi}{3}) \cdot f(\frac{2\pi}{3}) = 1$.

B3. Dana je funkcija $f(x) = a \cdot \cos \frac{x}{2}$.

a) Določite a tako, da bo graf funkcije potekal skozi točko $A(\frac{\pi}{2}, \sqrt{2})$.

b) Za $a = 2$ izračunajte ničle funkcije in narišite njen graf na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

B4. Dijakom, ki iščejo začasne zaposlitve, želijo v mladinskem servisu ponuditi čim več različnih del. Zato so se odločili, da bodo v naslednjih petih letih podvojili število delodajalcev, ki ponujajo dela. Vsako leto bodo povečali število delodajalcev za enako odstotkov. Izračunajte, za koliko odstotkov bodo povečali število delodajalcev vsako leto. Rezultat zaokrožite na celo število odstotkov. Zapišite odgovor.

Rešitve nalog in točkovnik

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	A	E	A	C	B	E

A1. Število $0{,}\bar{3}$ zapišemo kot ulomek $\frac{1}{3}$. Nato enačbo preuredimo v $\frac{1}{3} - \frac{3x}{3-x} = 3$ in v $3 - x - 9x = 27 - 9x$, od koder izrazimo $x = -24$.

A2. Ker je pri pripravi žaganega lesa 8 % odpadka, dobimo iz 150 m^3 hlodovine $150 \cdot \frac{92}{100} = \frac{3\cdot 92}{2} = 138$ m^3 žaganega lesa.

A3. Iz zveze za razpolovišče daljice nastavimo enakosti: $0 = \frac{-2+x_2}{2}$ in $-1 = \frac{1+y_2}{2}$. Iz prve dobimo $x_2 = 2$, iz druge pa $y_2 = -3$. Drugo krajišče je v točki $(2, -3)$.

A4. Tri zaporedna soda števila lahko zapišemo $2n$, $2n+2$ in $2n+4$. Njihova vsota je $6n+6$ in je torej vedno deljiva s 3.

A5. Neenačba $3x - 1 < 5 - 3x$ ima rešitev $x < 1$. Neenačba $\frac{2}{3}x - 1 \geq \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$ nima rešitve. Neenačba $\frac{2}{3}x + 4 \leq \frac{3}{2}x + 2$ ima rešitev $x \geq \frac{12}{5}$. Neenačbi $2x - \pi < \sqrt{5} + 2x$ in $x \leq x$ reši vsak realen x.

A6. Iz $\frac{a+b}{b} = 4$ izrazimo $a = 3b$ in vstavimo v ulomek $\frac{b}{a+2b}$. Ulomek uredimo in krajšamo ter dobimo rezultat $\frac{1}{5}$.

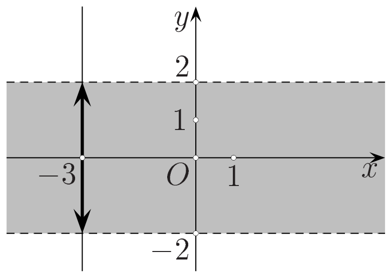
II. DEL

B1. Števili razcepimo na prafaktorje $72 = 2^3 \cdot 3^2$ in $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Iskani največji skupni delitelj je $2^3 \cdot 3 = 24$, najmanjši skupni večkratnik pa $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$.

Razcep števila 72 na prafaktorje .... 1 točka
Razcep števila 168 na prafaktorje .... 1 točka
Zapis vsakega števila z zmnožkom potenc praštevil .... $1 + 1$ točka

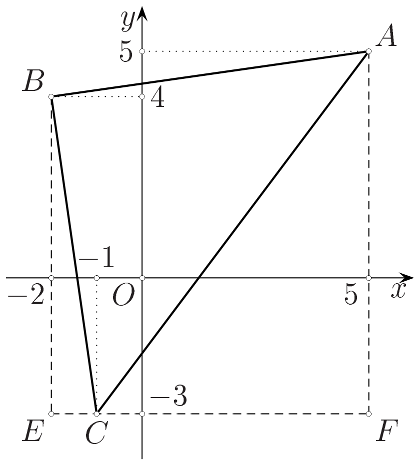
Določitev in zapis skupnega delitelja .... 1 točka
Določitev in zapis skupnega večkratnika .... 1 točka

B2. V pravokotnem koordinatnem sistemu narišemo množico točk po navodilu naloge.



Narisana premica: $x = -3$ .... 2 točki
Narisan ravninski pas: $-2 < y < 2$ .... 2 točki
Opomba: Če meji nista črtkani, samo 1 točka
Narisana množica: $\{-3\} \times (-2, 2)$ .... 2 točki
Opomba: Brez puščic samo 1 točka

B3. Ploščina trikotnika je enaka polovici absolutne vrednosti determinante. Vstavimo podatke v obrazec $S = \frac{|D|}{2}$. Determinanta je enaka 50, ploščina je torej enaka 25. Izračunamo dolžine stranic trikotnika, ki merijo $|AC| = 10$, $|BC| = 5\sqrt{2}$ in $|AB| = 5\sqrt{2}$ enot. Najkrajša je višina na najdaljšo stranico. Izračunamo jo iz plošine $v_{AC} = \frac{2S}{|AC|}$. Višina meri 5 enot.



Nalogo lahko rešimo drugače. Izračunamo ploščino trapeza $FABE$, ki ima osnovnici dolgi 8 oziroma 7 enot in višino 7 enot (glej sliko). Ta je enaka $\frac{8+7}{2} \cdot 7 = \frac{15 \cdot 7}{2}$. Ploščino trikotnika ABC dobimo, če od ploščine trapeza odštejemo ploščini pravokotnih trikotnikov z dolžinama katet $|BE| = 7$ in $|EC| = 1$ ter $|AF| = 8$ in $|CF| = 6$. Ploščina trikotnika je torej $\frac{15 \cdot 7}{2} - \frac{1 \cdot 7}{2} - \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{14 \cdot 7}{2} - 24 = 25$. Najdaljša stranica trikotnika ABC je AC, ki je dolga $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$. Najkrajša višina je zato $v_{AC} = \frac{2 \cdot 25}{10} = 5$.

Poznavanje obrazca za determinanto .... 1 točka
Pravilno vstavljeni podatki v obrazec: $S = \frac{|D|}{2}$ .... 1 točka
Izračunana ploščina: $S = 25$ .... 1 točka
Uporaba obrazca za dolžino daljice (razdaljo med točkama) .... 1 točka
Izračun dolžin stranic trikotnika .... 1 točka
Izračunana dolžina višine na stranico AC .... 1 točka

B4. Najprej uredimo dvojni ulomek, ki je enak $\frac{a-1}{3a+1}$. Nato uredimo izraz v prvem oklepaju, ki je enak $\frac{4a}{3a+1}$. Izraz v drugem oklepaju je enak $\frac{4}{3a+1}$. Izvedemo deljenje ulomkov, uredimo in dobimo rezultat a.

Ureditev dvojnega ulomka: $\frac{1+\frac{1+a}{1-3a}}{1-3 \cdot \frac{1+a}{1-3a}} = \frac{a-1}{3a+1}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je dvojni ulomek v drugem oklepaju enak: $\frac{a-1}{3a+1}$ .... 1 točka
Poenostavitev izraza v prvem oklepaju: $1 + \frac{a-1}{3a+1} = \frac{4a}{3a+1}$ .... 1 točka
Poenostavitev izraza v drugem oklepaju: $1 - 3 \cdot \frac{a-1}{3a+1} = \frac{4}{3a+1}$ .... 1 točka
Izvedba deljenja ulomkov: $\frac{4a}{3a+1} \cdot \frac{3a+1}{4}$ .... 1 točka
Rezultat: a .... 1 točka

Drugi letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	D	A	A	C	D	B

A1. Da je funkcija pozitivna, mora veljati $3x+6>0$. Rešitev neenačbe je $x>-2$.

A2. Premici sta vzporedni, če imata enaka smerna koeficienta. Prva ima koeficient $\frac{m+2}{2}$. Drugo enačbo preoblikujemo v eksplicitno obliko $y=-2x+4$, od koder preberemo smerni koeficient -2. Enačimo oba smerna koeficienta: $\frac{m+2}{2}=-2$. Rešitev enačbe je $m=-6$.

A3. Število diagonal n-kotnika je $\frac{n(n-3)}{2}$. Zapišemo zvezo $n+12=\frac{n(n-3)}{2}$, ki jo preuredimo v kvadratno enačbo $n^2-5n-24=0$ in razcepimo $(n-8)(n+5)=0$. Smiselna rešitev je $n=8$, osemkotnik ima 12 diagonal več kot stranic.

A4. Ker je vrednost kosinusa negativna, je rešitev topi kot. Vemo, da je $\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$.

A5. Izraz poenostavimo $9^{\frac{3}{2}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}-\sqrt{16^{\frac{5}{4}}-7}=3^3\cdot 2^{-1}-\sqrt{2^5-7}=\frac{27}{2}-\sqrt{32-7}=\frac{17}{2}$.

A6. Izraz poenostavimo $\frac{1+1}{1}+1=3$.

II. DEL

B1. Presečišče danih premic izračunamo z reševanjem sistema dveh enačb z dvema neznankama: $x-2y-9=0$ in $2x+y-3=0$. Rešitev sistema je par $x=3$, $y=-3$, presečišče pa $P(3,-3)$. Graf iskane linearne funkcije gre skozi to presečišče in skozi točko $A(4,0)$. Izračunamo njen smerni koeficient $k=\frac{0-(-3)}{4-3}=3$ in njeno začetno vrednost $n=0-3\cdot 4=-12$, pa imamo enačbo linearne funkcije: $f(x)=3x-12$.

Pravilno reševanje sistema .... 1 točka
Rešitev sistema $x=3,\ y=-3$ .... 1 točka
Zapis presečišča $P(3,-3)$ .... 1 točka
Izračun smernega koeficienta $k=3$ .... 1 točka
Izračun začetne vrednosti ali uporaba $y-y_1=k(x-x_1)$ .... 1 točka
Rezultat $f(x)=3x-12$ .... 1 točka

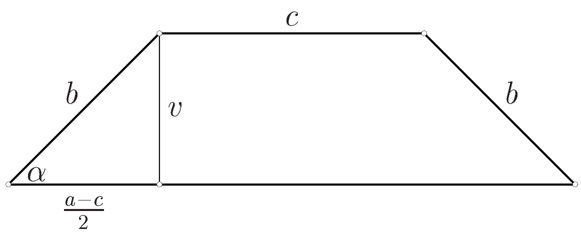
B2. Izraz poenostavimo: $8\cdot\sqrt[20]{2^5}-9\cdot\sqrt[30]{3^2}-4\cdot\sqrt[16]{2^4}+4\cdot\sqrt[45]{3^3}+5\cdot\sqrt[60]{3^4}=8\cdot\sqrt[4]{2}-9\cdot\sqrt[15]{3}-4\cdot\sqrt[4]{2}+4\cdot\sqrt[15]{3}+5\cdot\sqrt[15]{3}=4\cdot\sqrt[4]{2}$.

Poenostavitev vsakega člena:
prvi: $8\cdot\sqrt[4]{2}$ .... 1 točka
drugi: $9\cdot\sqrt[15]{3}$ .... 1 točka
tretji: $4\cdot\sqrt[4]{2}$ .... 1 točka
četrti: $4\cdot\sqrt[15]{3}$ .... 1 točka
peti: $5\cdot\sqrt[15]{3}$ .... 1 točka
Rezultat: $4\sqrt[4]{2}$ .... 1 točka

B3. Enačbo najprej preuredimo v $\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4x}$ in kvadriramo: $x^2+4=4x$. Ko člen $4x$ prenesemo na levo stran enačbe, dobimo $x^2-4x+4=0$, kar zapišemo v obliki: $(x-2)^2=0$. Edina rešitev je $x=2$. Opravimo še preizkus: $\sqrt{2^2+4}-\sqrt{4\cdot 2}=0$, s čimer se prepričamo, da $x=2$ reši dano iracionalno enačbo.

Preureditev enačbe: $\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4x}$ .... 1 točka
Pravilno kvadriranje zgornje enačbe: $x^2+4=4x$ .... 1 točka
Ureditev enačbe: $x^2-4x+4=0$ .... 1 točka
Razcep enačbe: $(x-2)^2=0$ .... 1 točka
Rešitev: $x=2$ .... 1 točka
Opravljen preizkus .... 1 točka

B4. Narišemo skico, s katere razberemo $\frac{a-c}{2}=4$ cm. Izračunamo dolžino višine: $v=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=\sqrt{16}=4$ cm. Ker je $v=\frac{a-c}{2}$, je pravokotni trikotnik z dolžinama katet v in $\frac{a-c}{2}$ enakokrak. Kot α je torej enak $45°$.



Ustrezna skica .... 1 točka
Ugotovitev $\frac{a-c}{2}=4$ cm .... 1 točka
Uporaba kotne funkcije $\cos\alpha=\frac{\frac{a-c}{2}}{d}$ .... 1 točka
Izračun kota $\alpha=45°$ .... 1 točka
Uporaba kotne funkcije ali Pitagorovega izreka za izračun višine .... 1 točka
Izračunana višina $v=4$ cm .... 1 točka

Tretji letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	D	B	C	C	A	D

A1. Enačba je linearna, če je vodilni koeficient v zapisani kvadratni enačbi enak 0. Torej mora veljati: $m^2-7m+6=0$ oziroma $(m-1)(m-6)=0$. Od tod dobimo rešitvi $m=1$ in $m=6$.

A2. Telo je sestavljeno iz 14 kock. Prostornina ene kocke je 2^3 cm^3, prostornina telesa pa $14\cdot 2^3=112$ cm^3 oziroma 0,112 dm^3.

A3. Ploščina najmanjšega kvadrata je a^2, ploščina drugega $(a+1)^2$ in ploščina največjega $(a+2)^2$. Velja torej $a^2+(a+1)^2+(a+2)^2=302$. To enačbo preuredimo v $a^2+2a-99=0$ in razstavimo: $(a-9)(a+11)=0$. Smiselna rešitev je $a=9$ cm. Stranica največjega kvadrata je dolga 11 cm.
Nekoliko manj računanja imamo, če izberemo dolžine stranic kvadratov po vrsti $a-1$, a in $a+1$. Tedaj je $a^2-2a+1+a^2+a^2+2a+1=302$, od tod dobimo $3a^2=300$ in $a=10$. Stranica največjega kvadrata je dolga 11 cm.

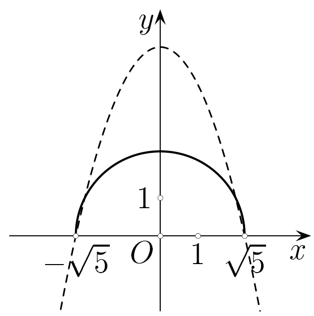
A4. Trditev $\log 0 = 0$ ni pravilna, saj logaritemska funkcija nima vrednosti v točki 0. Napačna je tudi trditev $\log 5 = \log 10 - \log 5$, saj je $\log 10 - \log 5 = \log \frac{10}{5} = \log 2$. Trditev $10^{\log \pi} = \pi$ je pravilna, saj na levi strani enačaja nastopata eksponentna in logaritemska funkcija z enakima osnovama. Trditev $\log 1 = 1$ je napačna, saj je $\log 1 = 0$. Če je osnova logaritma manjša od 1, je ustrezna logaritemska funkcija padajoča, zato je tudi trditev **(E)** napačna.

A5. Najprej je $4^0 = \log_3 \log_2 x$, nato $3 = \log_2 x$ in končno $2^3 = x$ oziroma $x = 8$.

A6. Če je na začetku $3{,}6 \cdot 10^7$ bakterij, jih je po eni uri $3{,}6 \cdot 10^7 \cdot 1{,}125$, po dveh urah $(3{,}6 \cdot 10^7 \cdot 1{,}125) \cdot 1{,}125 = 3{,}6 \cdot 10^7 \cdot 1{,}125^2$ ... Po t urah je v posodi $3{,}6 \cdot 10^7 \cdot 1{,}125^t = 36 \cdot 10^6 \cdot 1{,}125^t$ bakterij.

II. DEL

B1. Korenska funkcija je definirana za $5 - x^2 \geq 0$. Če $5 - x^2$ razstavimo, imamo $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) \geq 0$. S slike razberemo, za katere vrednosti spremenljivke x je funkcija $y = 5 - x^2$ nenegativna: $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.
S polno črto je narisan graf funkcije $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$, s črtkano pa graf funkcije $y = 5 - x^2$.



Zapis pogoja $5 - x^2 \geq 0$ .... 1 točka
Razcep $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) \geq 0$ .... 1 točka
Zapisani ničli: $x_1 = \sqrt{5}$ .... 1 točka
$x_2 = -\sqrt{5}$ .... 1 točka
Ustrezna skica .... 1 točka
Rešitev: $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ .... 1 točka

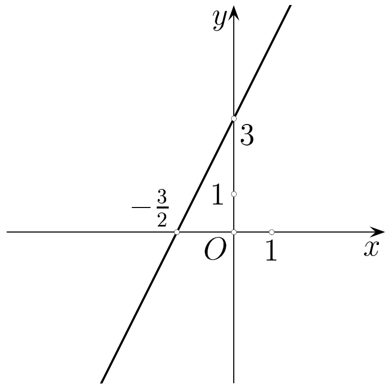
B2. Razlika obsegov naj bo $4a - 4b = 8$ cm, razlika ploščin pa $a^2 - b^2 = 16$ cm^2. Iz prve zveze dobimo $a - b = 2$, iz druge pa zaradi $(a - b)(a + b) = 16$ še $a + b = 8$. Od tod pridemo do $a = 5$ cm in $b = 3$ cm. Vsota obeh ploščin je $5^2 + 3^2 = 34$ cm^2.

Zapis razlike obsegov $4a - 4b = 8$ .... 1 točka
Zapis razlike ploščin $a^2 - b^2 = 16$ .... 1 točka
Pravilno reševanje sistema .... 1 točka
Rešitvi $a = 5$ cm in $b = 3$ cm .... $1 + 1$ točka
Izračunana vsota ploščin: $S_1 + S_2 = 34$ cm^2 .... 1 točka

B3. Neznano število kamel označimo z x. Iz besedila zapišemo enačbo $\frac{x}{4} + 2\sqrt{x} + 3 \cdot 5 = x$, ki jo preuredimo v $8\sqrt{x} = 3x - 60$. Enačbo kvadriramo $64x = 9x^2 - 360x + 3600$ in uredimo: $9x^2 - 424x + 3600 = 0$. Levo stran razstavimo $(x - 36)(9x - 100) = 0$, od tod pa preberemo smiselno rešitev $x = 36$.

Nastavitev enačbe $\frac{x}{4} + 2\sqrt{x} + 15 = x$ .... 2 točki
Odprava ulomka in ureditev enačbe do oblike $8\sqrt{x} = 3x - 60$ .... 1 točka
Kvadriranje enačbe .... 1 točka
Rešitev enačbe $x = 36$ .... 1 točka
Zapisan odgovor .... 1 točka

B4. Eksponentno enačbo uredimo $7^{x+y} = 7^{3x+3}$. Eksponenta enačimo in uredimo. Dobimo $y = 2x + 3$, kar predstavlja enačbo premice.



Ureditev enačbe: $7^{x+y} = 7^{3x+3}$ .... 1 točka
Zapis enakosti eksponentov $x + y = 3x + 3$.......... 1 točka
Ureditev zapisa $y = 2x + 3$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je to enačba premice .... 1 točka
Narisana premica v koordinatnem sistemu........... 2 točki

Četrti letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	D	B	C	D	B	A

A1. Najprej imamo $f(2) = -3$ in $f(0) = 1$ ter $f(2) + 2f(0) = -1$. Ker je $f(-1) = -3$ in $f(1) = -1$, velja $f(2) + 2f(0) = f(1)$.

A2. Na sliki je graf racionalne funkcije s polom $x = -1$, dvojno ničlo $x = 2$ in začetno vrednostjo 2, torej funkcije $f(x) = \frac{(x-2)^2}{2x+2}$.

A3. Izrazimo $3 - 3\cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) = 3\sin^2 x$.

A4. Zaporedje s splošnim členom $a_n = (-1)^n$ je $-1,\ 1,\ -1,\ 1, ...$, zaporedje s splošnim členom $a_n = 1-(-1)^n$ je $2,\ 0,\ 2,\ 0, ...$, zaporedje s splošnim členom $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ je $1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1, ...$, zaporedje s splošnim členom $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ pa $0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1, ...$. Pravilen je torej odgovor **(D)**.

A5. Ker zaporedje nima vseh členov enakih 0 in sta drugi in četrti člen x oziroma $2x$, zaporedje ni konstantno. Prvi štirje členi aritmetičnega zaporedja so a, $a + d = x$, $a + 2d = b$ in $a + 3d = 2x$, pri čemer $d \neq 0$. Iz $a + d = x$ in $a + 3d = 2x$ sklepamo, da je $a = d$. To pomeni, da je iskano razmerje enako $\frac{a}{b} = \frac{d}{3d} = \frac{1}{3}$.

A6. Ker je $\sin 20° = \cos 70°$ in $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$, je $\sin 20° + \sin\alpha = \cos 70° + \sin(\pi - \alpha)$.

II. DEL

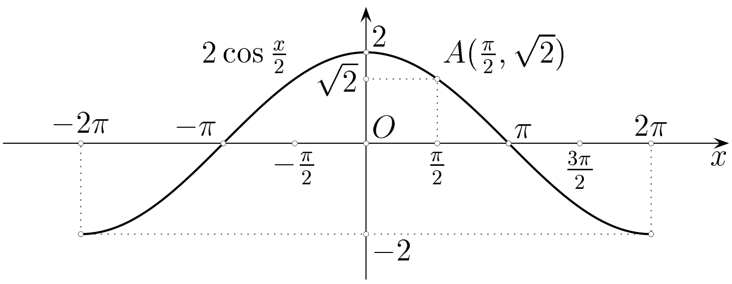
B1. Z grafa odčitamo ničle polinoma $x_1 = -1, x_{2,3} = 1$ in $x_4 = 4$ ter začetno vrednost $p(0) = -1$. Intervala, na katerih je funkcija negativna, sta $(-1, 1)$ in $(1, 4)$. Za zapis enačbe polinoma četrte stopnje uporabimo obliko polinoma za ničle $p(x) = a(x + 1)(x - 1)^2(x - 4)$. Upoštevamo, da je $p(0) = -1$, pa izračunamo vodilni koeficient $a = \frac{1}{4}$. Tako imamo $p(x) = \frac{1}{4}(x + 1)(x - 1)^2(x - 4)$.

Odčitane ničle polinoma; $x_1 = -1, x_{2,3} = 1$ in $x_4 = 4$ .... 1 točka
Odčitana začetna vrednost polinoma: $p(0) = -1$ .... 1 točka
Odčitani intervali, na katerih ima polinom negativno vrednost: $(-1, 1) \cup (1, 4)$..... 1 točka
Uporaba oblike polinoma za ničle: $p(x) = a(x + 1)(x - 1)^2(x - 4)$ .... 1 točka
Izračunan vodilni koeficient $a = \frac{1}{4}$.. 1 točka
Zapis polinoma .... 1 točka

B2. Izračunamo vrednosti funkcije $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ in $f(\frac{2\pi}{3})\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Imamo torej $f(\frac{\pi}{3}) \cdot f(\frac{2\pi}{3}) = 1$.

Vstavljena prva vrednost spremenljivke x: $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}}$ .... 1 točka
Izračunana vrednost zgornjega ulomka: $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .... 1 točka
Vstavljena druga vrednost spremenljivke x: $f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1+\cos\frac{2\pi}{3}}$ .... 1 točka
Prehod na ostri kot $\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}$ .... 1 točka
Izračunana vrednost ulomka: $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ .... 1 točka
Izračunan zmnožek: $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 1$ .... 1 točka

B3. Upoštevamo, da gre graf funkcije skozi točko A, pa imamo $\sqrt{2} = a \cdot \cos\frac{\pi}{4}$. Od tod dobimo $a = 2$. Nato izračunamo ničle funkcije $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$. Te so: $x_k = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. Narišemo graf funkcije na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.



Uporabljena točka A: $\sqrt{2} = a \cdot \cos\frac{\pi}{4}$ .... 1 točka
Izračunan $a = 2$ .... 1 točka
Izračunane ničle $x_k = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ .... 1 točka
Pravilno narisan graf .... $1 + 1 + 1$ točka

OPOMBA: Na sliki grafa mora biti upoštevana amplituda in označeni dve ničli.

B4. Denimo, da trenutno ponuja delo preko mladinskega servisa n delodajalcev. Čez 5 let bo delo ponujalo $2n$ delodajalcev. Naj bo r faktor letnega povečanja števila delodajalcev in $r = 1 + \frac{p}{100}$. Velja zveza $2n = n \cdot r^5$, od koder dobimo $r = \sqrt[5]{2}$, kar je približno $1,149$. Iz te vrednosti izračunamo p, ki znaša $p = 14,9$ oziroma $p = 15$, če zaokrožimo na celo vrednost. Vsako leto se bo število delodajalcev povečalo za 15 %.

Sklep, da bo $2n$ delodajalcev čez 5 let, če jih je sedaj n .... 1 točka
Zapis faktorja povečanja $r = 1 + \frac{p}{100}$ .... 1 točka
Zapis zveze $2n = n \cdot r^5$ .... 1 točka
Izračun $r = \sqrt[5]{2} \doteq 1,149$ .... 1 točka
Izračunana in zaokrožena vrednost letnega povečanja v odstotkih $p = 15$ % .... 1 točka
Odgovor .... 1 točka