Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

dMFA

19. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 13. april 2019

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 1. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Kateri od spodaj navedenih izrazov je enakovreden izrazu $(y-2)^3-y(y+5)(y-5)-29+6y^2$?

(**A**) $12y^2+37y-37$ (**B**) $-13y+37$ (**C**) $37y-21$
(**D**) $37(y-1)$ (**E**) $12y^2-37y-37$

A2. Mama je na vprašanje, koliko je star sin, odgovorila z uganko: Če od sedanje dvakratne sinove starosti odštejemo trikrat toliko let, kot jih je imel pred šestimi leti, dobimo, koliko je star danes. Koliko let je sin star danes?

(**A**) 3 leta (**B**) 18 let (**C**) 9 let (**D**) 6 let (**E**) 27 let

A3. Kateri od spodaj navedenih izrazov je enakovreden izrazu $\frac{16a^{-2}b^{-1}c^{-4}}{2^{-1}a^{-3}b^{-2}c^{-3}} \cdot (a^0+(ab)^0)^{-1}$?

(**A**) $64abc^{-1}$ (**B**) $16abc^{-1}$ (**C**) $\frac{32}{abc}$ (**D**) $32abc^{-1}$ (**E**) $16abc^{-7}$

B1. Trije prijatelji so se odločili, da si bodo namesto malice v isti trgovini kupili zdrave izdelke. Prvi je kupil v trgovini 0,5 kg grozdja, 30 dag banan in 25 dag jabolk in plačal 2,20 evra. Drugi je kupil 45 dag banan, 300 g jabolk in 25 dag grozdja in plačal 1,98 evra. Tretji je kupil 350 g banan, 20 dag jabolk in 30 dag grozdja in plačal 1,74 evra. Izračunaj, koliko stane en kilogram jabolk, en kilogram grozdja in en kilogram banan.

(8 točk)

B2. Naj bosta x in y celi števili. Če prvo število delimo z drugim številom, dobimo količnik 2 in ostanek 2. Če delimo vsoto števil x in y z njuno razliko, pa dobimo količnik 2 in ostanek 8. Določi $D(x, y)$ in $v(x, y)$.

(8 točk)

B3. Dan je izraz $A = |x+3| + |x-5|$.

a) Izračunaj vrednost izraza za $x = \sqrt{2}$.

b) Poišči vse možne vrednosti x, za katere velja $A = 4$.

(8 točk)

19. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol
Državno tekmovanje, 13. april 2019

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 2. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. V konveksnem štirikotniku so zunanji koti v razmerju $7:4:6:1$. V kakšnem razmerju so notranji koti tega štirikotnika pri istih ogliščih?

(**A**) $2:5:3:8$ (**B**) $8:3:5:2$ (**C**) $1:6:4:7$ (**D**) $7:4:6:1$ (**E**) $11:14:12:17$

A2. V nekem večkotniku je vsota notranjih kotov enaka $4140°$. Kolikšno je število diagonal tega večkotnika?

(**A**) 250 (**B**) 275 (**C**) 205 (**D**) 725 (**E**) 257

A3. Naj bo $b=\sqrt[2019]{\sqrt[2018]{\ldots\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}}}}$, $a>0$. Kateri izraz je enakovreden $\sqrt[2020]{\sqrt[2019]{\sqrt[2018]{\ldots\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{404}}}}}}$?

(**A**) $\sqrt[2020]{b}$ (**B**) $\sqrt[5]{b}$ (**C**) $\sqrt[5]{b^2}$ (**D**) b^{404} (**E**) b^{202}

B1. V implicitni, eksplicitni in odsekovni obliki zapiši enačbo vzporednice k premici, podani z enačbo $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1$, ki gre skozi presečišče premic z enačbama $3x+5y=-3$ in $5x+4y=8$.

(8 točk)

B2. Dani sta krožnici s središčema S_1 in S_2. Središči teh dveh krožnic sta oddaljeni 21 cm, njuna skupna tetiva je dolga 24 cm. Polmer prve krožnice je 13 cm. Nariši skico. Izračunaj polmer druge krožnice in obseg lika, ki ga predstavlja unija dveh krogov. *(8 točk)*

B3. Dan je izraz $Z=5a^{-x}(1-a^{-x})^{-1}-3a^{-x}(1+a^{-x})^{-1}-2a^{x}(a^{2x}-1)^{-1}$, kjer je $a^{x}\neq 0,1,-1$.

a) Poenostavi izraz Z.

b) Izračunaj vrednost izraza Z za $a=9^{b+c}\cdot 3^{2b+c}:27^{\frac{4}{3}b+c+\frac{1}{3}}$ in $x=1$.

(8 točk)

19. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 3. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Kolikšna je velikost središčnega kota, ki pripada krožnemu loku, ki ima enako dolžino kot polmer krožnice?

(A) $\frac{45^\circ}{\pi}$ **(B)** $\frac{90^\circ}{\pi}$ **(C)** $\frac{135^\circ}{\pi}$ **(D)** $\frac{180^\circ}{\pi}$ **(E)** $\frac{270^\circ}{\pi}$

A2. Kateri izraz je enakovreden izrazu $\log_{ab}(a^{-1} \cdot \sqrt[2]{a^3 b^{-1}} : \sqrt[3]{b^{-1} a^2})$?

(A) ab **(B)** $\frac{a}{b}$ **(C)** 1 **(D)** $-\frac{1}{6}$ **(E)** $-\frac{1}{2}$

A3. Kroglo prerežemo na dve polkrogli. Za koliko $\%$ je vsota površin obeh polkrogel večja od površine krogle?

(A) 25 **(B)** 50 **(C)** 75 **(D)** $22,5$ **(E)** 40

B1. Naj bo $ABCD$ trapez z osnovnicama AB in CD. Naj velja $|AB| = 6,5$ cm, $|BC| = 4,3$ cm, $|AD| = 3,8$ cm ter $|AC| = 5,3$ cm. Izračunaj velikost kota $\sphericalangle CBA$, dolžino višine trapeza $ABCD$ in njegovo ploščino. *(8 točk)*

B2. Dana je družina parabol $y=(k-3)x^2-2(k-1)x+2k+1; k \neq 3$.

a) Poišči tisto parabolo, katere os simetrije je premica $x=-2$.

b) Poišči vse vrednosti k, za katere bo imela parabola dve različni realni ničli.

(8 točk)

B3. Reši eksponentno enačbo $\frac{2^{x}+2^{-x}}{2}=2\left(2^{x}-2^{-x}\right)$. Rešitev naj bo točna.

(8 točk)

19. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Prilepi nalepko s šifro

Naloge za 4. letnik

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo vsak pravilni odgovor ovrednotili s tremi točkami, za vsak nepravilni odgovor pa bomo eno točko odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.

A1	A2	A3

B1	B2	B3

A1. Kolikšen je prvi člen rekurzivno podanega zaporedja s formulo $a_n = 2a_{n-1} + 1$, če je peti člen enak 7?

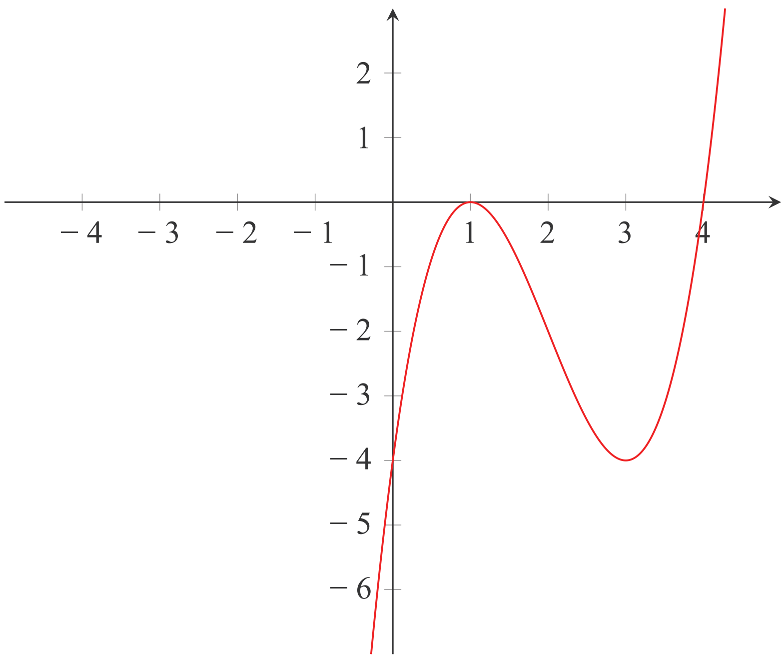
(**A**) 2 (**B**) 15 (**C**) $-\frac{7}{2}$ (**D**) $-\frac{1}{2}$ (**E**) -5

A2. Kateri interval je zaloga vrednosti funkcije $f(x) = \cos x + 1 - \pi$?

(**A**) $[-1+\pi,\ 2]$ (**B**) $[0,\ \pi+2]$ (**C**) $[-\pi,\ 2-\pi]$ (**D**) $[-\pi,\ 1+\pi]$ (**E**) $[1-\pi,\ 2-\pi]$

A3. Na sliki je graf polinoma p, ki seka os y v -4, se dotika abscisne osi v 1 in seka os x v 4. Kolikšna je vrednost izraza $p'(1) - 2 \cdot p(0) - 4 \cdot p(4)$?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 8 (**D**) 0 (**E**) -1



B1. Realni rešitvi enačbe $x^4 - x^3 - 2x - 4 = 0$ sta prva dva člena padajočega aritmetičnega zaporedja s 40 členi.

a) Izračunaj prva dva člena in diferenco zaporedja.

b) Izračunaj zadnji člen in zapiši splošni člen a_n zaporedja.

c) Izračunaj vsoto vseh členov zaporedja z lihimi indeksi.

(8 točk)

B2. V neki osnovni glasbeni šoli je v razredu 20 pianistov. Enemu pianistu je ime Mihael. Učitelj bo naključno izbral 9 pianistov, ki bodo samostojno igrali na šolskem nastopu, in njihov vrstni red.

a) Kolikšna je verjetnost, da bo med nastopajočimi tudi Mihael?

b) Koliko je vseh možnih različnih vrstnih redov pianistov za šolski nastop?

c) Kolikšna je verjetnost, da bo Mihael igral četrti po vrsti?

(8 točk)

B3. Dani sta realni funkciji $f(x) = x + 1$ in $g(x) = x^2 + 3$.

a) Funkcija h je podana s predpisom $h(x) = \frac{f(x)+g(x)}{g(x)}$. Izračunaj stacionarne točke funkcije h. Zapiši enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije h in izračunaj presečišče grafa z vodoravno asimptoto.

b) Izračunaj, za katere $a \in \mathbb{R}$ bo imela funkcija $j(x) = g(x) + af(x) - a$ vsaj eno realno ničlo.

(8 točk)

19. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog in točkovnik

(5. APRIL 2019, 10 : 30)

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

Prvi letnik

A1	A2	A3
D	C	B

A1. $(y-2)^3 - y(y+5)(y-5) - 29 + 6y^2 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8 - y^3 + 25y - 29 + 6y^2 = 37y - 37 = 37(y-1)$.

A2. Predpostavimo, da je danes star x let in zapišemo enačbo $2x - 3(x-6) = x$. Odpravimo oklepaj, enačbo uredimo in dobimo rešitev $x = 9$.

A3. $\frac{16a^{-2}b^{-1}c^{-4}}{2^{-1}a^{-3}b^{-2}c^{-3}} \cdot (a^0) + (ab)^0)^{-1} = 32abc^{-1} \cdot 2^{-1} = 16abc^1$.

B1. Banane označimo z x, jabolka z y in grozdje z z. Vse enote pretvorimo v kilograme in nastavimo sistem enačb, npr.: prva enačba $0,30x + 0,25y + 0,50z = 2,20$, druga enačba $0,45x + 0,30y + 0,25z = 1,98$ in tretja enačba $0,35x + 0,20y + 0,30z = 1,74$. Rešujemo sistem enačb s poljubno metodo, npr:. enačbe množimo s 100 in iz prve enačbe izrazimo z ter dobimo $z = \frac{220-30x-25y}{50}$, vstavimo ga v drugo in tretjo enačbo, enačbi uredimo in dobimo sistem dveh enačb npr.: $60x + 35y = 176$ in $17x + 5y = 42$. Iz druge enačbe izrazimo y, npr.: $y = \frac{42-17x}{5}$ in ga vstavimo v prvo enačbo. Dobimo rešitve enačbe $x = 2$, $y = 1,6$ in $z = 2,4$. Odgovor: Kilogram banan stane 2,00 evra, jabolk 1,60 evra in grozdja 2,40 evra.

Pretvorba vseh količin v eno mersko enoto .... 1* točka
Zapis enačbe $0,30x + 0,25y + 0,50z = 2,20$ .... 1 točka
Zapis enačbe $0,45x + 0,30y + 0,25z = 1,98$ .... 1 točka
Zapis enačbe $0,35x + 0,20y + 0,30z = 1,74$ .... 1 točka
Reševanje sistema enačb .... 1* točka
Zapis rešitev enačb $x = 2, y = 1,60$ in $z = 2,40$ .... 2 točki
Zapis odgovora .... 1 točka

B2. Ob upoštevanju osnovnega izreka o deljenju celih števil nastavimo enačbi $x = 2y + 2$ in $x + y = 2(x-y) + 8$. Enačbi uredimo in rešimo sistem. Rešitev sistema je $x = 22$ in $y = 10$. To sta iskani števili. Določimo $D(22,10) = 2$ in $v(22,10) = 110$.

Zapis prve enačbe $x = 2y + 2$ .... 1 točka
Zapis druge enačbe $x + y = 2(x-y) + 8$ .... 1 točka
Ureditev sistema .... 1 točka
Reševanje sistema enačb .... 1* točka
Rešitev sistema enačb $x = 22, y = 10$ .... 2 točki
Določitev $D(22,10) = 2, v(22,10) = 110$ .... 2 točki

B3.

a) Za x vstavimo $\sqrt{2}$ in izračunamo vrednost izraza $A = |\sqrt{2}+3| + |\sqrt{2}-5| = \sqrt{2}+3-\sqrt{2}+5 = 8$.

b) Za $x < -3$ ima enačba $-x - 3 - x + 5 = 4$ rešitev $x = -1$, kar ne ustreza pogoju. Za $-3 \leq x < 5$ enačba $x + 3 - x + 5 = 4$ nima rešitve. Za $x \geq 5$ ima enačba $x + 3 + x - 5 = 4$ rešitev $x = 3$, kar ne ustreza pogoju. Enačba torej nima rešitev.

Izračun vrednosti za $x = \sqrt{2}$ .... 2 točki
Zapis vseh treh pogojev $x < -3, -3 \leq x < 5, x \geq 5$ .... 2 točki
Reševanje enačbe za $x < -3$ .... 1 točka
Reševanje enačbe za $-3 \leq x < 5$ .... 1 točka
Reševanje enačbe za $x \geq 5$ .... 1 točka
Ugotovitev, da rešitve ne ustrezajo pogojem in da enačba nima rešitve .... 1 točka

19. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog in točkovnik

(5. april 2019, 10 : 30)

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

Drugi letnik

A1	A2	A3
A	B	C

A1. Vemo, da je vsota zunanjih kotov v konveksnem večkotniku enaka $360°$. Zunanji koti torej merijo zapovrstjo $140°, 80°, 120°$ in $20°$. Notranji koti so zato v razmerju $40° : 100° : 60° : 160°$. Razmerje okrajšamo in dobimo $2 : 5 : 3 : 8$.

A2. Uporabimo obrazec za vsoto notranjih kotov v večkotniku $S_n = (n-2) \cdot 180°$ in izračunamo število stranic (oglišč) iskanega večkotnika. Dobimo $n = 25$. Uporabimo še obrazec za število diagonal $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ in dobimo $d_{25} = 275$.

A3. Drugi izraz je zelo podoben izrazu b, namesto $\sqrt[2]{a}$ pa imamo a^{404}. Lahko pa a^{404} pišemo kot $\sqrt[2]{a^{808}}$. Vse skupaj pa lahko preoblikujemo v $\sqrt[2020]{b^{808}} = \sqrt[5]{b^2}$.

B1. Rešimo sistem enačb $3x + 5y = -3$ in $5x + 4y = 8$ in dobimo $x = 4$ in $y = -3$. Presečišče teh dveh premic je $P(4, -3)$. Premico $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$ zapišemo v eksplicitni obliki: $y = \frac{1}{2}x - 2$, njen smerni koeficient je $k = \frac{1}{2}$. Ker imajo vzporednice isti smerni koeficient, je $k = \frac{1}{2}$ tudi smerni koeficient iskane premice skozi točko $P(4, -3)$. Iskano premico v eksplicitni obliki zapišemo z enačbo $y = \frac{1}{2}x - 5$, v implicitni $-x + 2y + 10 = 0$ in v odsekovni $\frac{x}{10} + \frac{y}{-5} = 1$.
Opomba: Smerni koeficient premice lahko dobimo tudi iz odsekovne oblike na drug način: iz odsekov dobimo presečišči na koordinatnih oseh $M(4, 0)$ in $N(0, -2)$ in z uporabo $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ zopet dobimo $k = \frac{1}{2}$.

Reševanje sistema enačb .... 1* točka
Izračun presečišča $P(4, -3)$ .... 1 točka
Preoblikovanje v eksplicitno obliko .... 1 točka
Zapis ali ugotovitev $k = \frac{1}{2}$ .... 1 točka
Zapis ali uporaba, da imajo vzporednice isti k .... 1 točka
Zapis eksplicitne oblike $y = \frac{1}{2}x - 5$ .... 1 točka
Zapis implicitne oblike $-x + 2y + 10 = 0$ .... 1 točka
Zapis odsekovne oblike $\frac{x}{10} + \frac{y}{-5} = 1$ .... 1 točka

B2. Središči obeh krožnic povežemo z obema krajiščema tetive. Polmer prve krožnice, polovica tetive t in daljica d_1 od središča prve krožnice S_1 do razpolovišča tetive oblikujejo pravokotni trikotnik. Po Pitagorovem izreku dobimo $d_1 = 5$ cm. Ker je oddaljenost središč obeh krožnic 21 cm, je razdalja od središča druge krožnice do razpolovišča tetive $d_2 = 21 - 5 = 16$ cm. Še enkrat uporabimo Pitagorov izrek in dobimo polmer druge krožnice $r_2 = 20$ cm. Za izračun obeh središčnih kotov uporabimo kotne funkcije, npr.: $\sin\frac{\varphi_1}{2} = \frac{t/2}{r_1}$. Dobimo $\varphi_1 \doteq 134{,}76°$ in $\varphi_2 \doteq 73{,}74°$. Pripadajoči dolžini lokov sta $l_1 = \frac{\varphi_1}{180°} \cdot \pi \cdot r_1 \doteq 30{,}58$ cm in $l_2 \doteq 25{,}74$ cm. Obseg našega lika je vsota obsegov obeh krožnic - dolžini obeh lokov $o = o_1 + o_2 - l_1 - l_2 \doteq 151{,}03$ cm.

Skica obeh krožnic z označeno tetivo .... 1 točka
Izračun oddaljenosti S_1 od tetive: $d_1 = 5$ cm .... 1 točka
Izračun $r_2 = 20$ cm .... 1 točka
Izračun središčnega kota pri S_1: $\varphi_1 \doteq 134{,}76°$ .... 1 točka
Izračun središčnega kota $\varphi_2 \doteq 73{,}74°$ .... 1 točka
Izračun dolžine krožnega loka $l_1 \doteq 30{,}58$ cm .... 1 točka
Izračun dolžine krožnega loka $l_2 \doteq 25{,}74$ cm .... 1 točka
Izračun obsega $o \doteq 151{,}03$ cm .... 1 točka

B3. Poenostavimo vsak člen posebej. Prvi člen preoblikujemo v

$$5a^{-x}(1-a^{-x})^{-1}=\frac{5}{a^x}\left(\frac{a^x-1}{a^x}\right)^{-1}=\frac{5}{a^x-1}.$$

Podobno drugi člen preoblikujemo v

$$3a^{-x}(1+a^{-x})^{-1}=\frac{3}{a^x+1}.$$

Imenovalec tretjega člena razstavimo na produkt vsote in razlike

$$2a^x(a^{2x}-1)^{-1}=\frac{2a^x}{a^{2x}-1}=\frac{2a^x}{(a^x-1)(a^x+1)}.$$

Opazimo, da je to hkrati skupni imenovalec za prva dva člena. Prva dva člena razširimo, izraz poenostavimo in dobimo rezultat

$$\frac{5}{a^x-1}-\frac{3}{a^x+1}-\frac{2a^x}{(a^x-1)(a^x+1)}=\frac{8}{(a^x-1)(a^x+1)}=\frac{8}{a^{2x}-1}.$$

Izračunamo vrednost izraza

$$a=9^{b+c}\cdot 3^{2b+c}:27^{\frac{4}{3}b+c+\frac{1}{3}}=3^{2b+2c}\cdot 3^{2b+c}:3^{3\left(\frac{4}{3}b+c+\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{3}.$$

Izračunamo vrednost izraza Z za dobljeni vrednosti a in x: $\frac{8}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-1}=-9$.

Poenostavljen prvi člen $\frac{5}{a^x-1}$ .... 1 točka
Poenostavljen drugi člen $\frac{3}{a^x+1}$ .... 1 točka
Poenostavljen tretji člen $\frac{2a^x}{a^{2x}-1}$ .... 1 točka
Razširitev vseh členov na skupni imenovalec .... 1 točka
Preoblikovanje izraza v $\frac{8}{a^{2x}-1}$ ali $\frac{8}{(a^x-1)(a^x+1)}$ .... 1 točka
Izračunana vrednost izraza $a=\frac{1}{3}$ .... 1*+1 točka
Izračunana vrednost -9 izraza Z za $a=\frac{1}{3}$ in $x=1$ .... 1 točka

19. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog in točkovnik

(5. APRIL 2019, 10 : 30)

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

Tretji letnik

A1	A2	A3
D	D	B

A1. Dolžino krožnega loka izračunamo po formuli $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$. Ker je dolžina krožnega loka enaka polmeru kroga, enačbo preuredimo v $r = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$. Iz enačbe izrazimo α in dobimo rezultat $\frac{180^\circ}{\pi}$.

A2. Izraz v oklepaju preoblikujemo na skupni korenski eksponent $a^{-1} \cdot \sqrt[2]{a^3b^{-1}} : \sqrt[3]{b^{-1}a^2} = \sqrt[6]{a^{-6}} \cdot \sqrt[6]{a^9b^{-3}} : \sqrt[6]{b^{-2}a^4}$. Izraz poenostavimo in damo pod skupni koren: $\sqrt[6]{a^{-1}b^{-1}} = \sqrt[6]{\frac{1}{ab}} = \left(\frac{1}{ab}\right)^{\frac{1}{6}} = ab^{-\frac{1}{6}}$. Logaritem preuredimo v $\log_{ab}(a^{-1} \cdot \sqrt[2]{a^3b^{-1}} : \sqrt[3]{b^{-1}a^2}) = \log_{ab}(ab)^{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{6}$.

A3. Površina krogle je enaka $P_K = 4\pi R^2$. Če kroglo prerežemo, dobimo še površini dveh glavnih krogov, ki sta enaki $2\pi R^2$. Nova površina je enaka $P_{PK} = 6\pi R^2$. Površina se torej poveča za 50 %.

B1. Označimo $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |AD|$, $e = |AC|$. Naj bosta X in Y nožišči višin zaporedoma iz C in D ter $x = |XB|$ in $y = |AY|$. S pomočjo kosinusnega izreka izračunamo velikost kota $\cos\beta = \frac{a^2+b^2-e^2}{2ab} \Rightarrow \beta \doteq 54,26^\circ \doteq 54^\circ 16'$. V pravokotnem trikotniku s stranicami $|XC|, |XB|$ in $|BC|$ in kotom β izračunamo višino trapeza $v = b \cdot \sin\beta \doteq 3,5$ cm in stranico $x = \sqrt{b^2 - v^2} \doteq 2,5$ cm. V drugem pravokotnem trikotniku s stranicami $|AY|, |YD|$ in $|AD|$ s pomočjo Pitagorovega izreka izračunamo še stranico $y = \sqrt{d^2 - v^2} \doteq 1,5$ cm in tako dobimo dolžino stranice $c = a - x - y \doteq 2,5$ cm. S pomočjo formule $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$ izračunamo ploščino trapeza $S \doteq 15,75$ cm^2.

Uporaba kosinusnega izreka $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$ .... 1 točka
Izračunan kot $\beta \doteq 54,26^\circ \doteq 54^\circ 16'$ .... 1 točka
Izračun višine $v = b \cdot \sin\beta \doteq 3,5$ cm .... 1 točka
Izračun $x = \sqrt{b^2 - v^2} \doteq 2,5$ cm .... 1 točka
Izračun $y = \sqrt{d^2 - v^2} \doteq 1,5$ cm .... 1 točka
Izračun dolžine stranice CD: $c = a - x - y \doteq 2,5$ cm .... 1 točka
Zapis ali uporaba obrazca za ploščino $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$ .... 1 točka
Izračunana ploščina trapeza $S \doteq 15,75$ cm^2 .... 1 točka

B2.

a) Če je os simetrije premica $x = -2$, je $p = -2$. Iz enačbe $p = \frac{-b}{2a}$ izračunamo iskani koeficient $k = \frac{7}{3}$. Iskana parabola ima enačbo $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{17}{3}$.

b) Da bo imela parabola dve ničli, mora biti vrednost diskriminante večja od 0. Ko vstavimo koeficiente v neenačbo, dobimo $4(k-1)^2 - 4(k-3)(2k+1) > 0 \Rightarrow k^2 - 3k - 4 < 0 \Rightarrow (k-4)(k+1) < 0$. Rešitev dane neenačbe je $k \in (-1, 4)$.

Ugotovitev, da je $p = -2$ .... 1 točka
Izračun koeficienta $k = \frac{7}{3}$ .... 1 točka
Zapis enačbe parabole $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{17}{3}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $D > 0$ .... 1 točka
Zapis neenačbe $k^2 - 3k - 4 < 0$ .... 1 točka
Izračun koeficienta $k_1 = 4$ in $k_2 = -1$ .... 1 točka
Rešitev $k \in (-1, 4)$ .... 2 točki

B3. V eksponentni enačbi najprej odpravimo ulomek, torej jo pomnožimo z 2 in dobimo $2^x + 2^{-x} = 4(2^x - 2^{-x})$, odpravimo oklepaj: $2^x + 2^{-x} = 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}$, prenesemo vse člene na eno stran: $5 \cdot 2^{-x} - 3 \cdot 2^x = 0$ in upoštevamo, da je $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$. Enačbo preoblikujemo v $\frac{5}{2^x} - 3 \cdot 2^x = 0$, uvedemo novo neznanko $2^x = t$ in dobimo enačbo $\frac{5}{t} - 3 \cdot 5 = 0$; pomnožimo s t in zapišemo rešitev $5 - 3t^2 = 0, t = \pm\frac{\sqrt{15}}{3}$. Ker je $t = 2^x$, upoštevamo samo pozitivno rešitev $2^x = \frac{sqrt15}{3}$. Eksponentno enačbo logaritmiramo: $\log_2 2^x = \log_2\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$ in zapišemo rešitev $x = \log_2\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

Preoblikovanje enačbe $2^x + 2^{-x} = 4(2^x - 2^{-x})$ .... 1 točka
Ureditev enačbe $5 \cdot 2^{-x} - 3 \cdot 2^x = 0$ .... 1 točka
Upoštevanje $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $5 - 3t^2 = 0$ ali $5 - 3(2^x)^2 = 0$ .... 1 točka
Rešitev kvadratne enačbe $t = \pm\frac{\sqrt{15}}{3}$ .... 1 točka
Upoštevanje $2^x = \frac{\sqrt{15}}{3}$ .... 1 točka
Logaritmiranje eksponentne enačbe $\log_2 2^x = \log_2\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$ .... 1 točka
Rešitev eksponentne enačbe $x = \log_2\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$ .... 1 točka

19. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Državno tekmovanje, 13. april 2019

Rešitve nalog in točkovnik

(5. APRIL 2019, 10 : 30)

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki:
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Če je kakšen vmesni ali končni rezultat možno prepoznati, uganiti, odčitati iz slike ali izračunati na pamet, tekmovalcu praviloma pripadajo vse predvidene točke. Če pa je rešitev uganjena (do nje ni možno priti brez računanja), tudi zgolj slučajna brez zapisanega preizkusa oziroma dokaza, jo točkujemo z 0 točkami.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovice možnih točk.

Oznaka '*' pri točkah pomeni, da točko oz. točke tekmovalec lahko dobi za pravilni postopek, čeprav je morda izračun nepravilen.

Četrti letnik

A1	A2	A3
D	C	C

A1. Zapišemo $a_5 = 2a_4 + 1$ in izračunamo $a_4 = \frac{a_5-1}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$. Postopoma računamo vse člene do prvega člena $a_3 = \frac{a_4-1}{2} = 1$, $a_2 = \frac{a_3-1}{2} = 0$, $a_1 = \frac{a_2-1}{2} = -\frac{1}{2}$.

A2. Zaloga vrednosti funkcije kosinus je interval $[-1, 1]$, zato sledi, da je zaloga vrednosti funkcije f interval $[-\pi, 2-\pi]$.

A3. Iz slike preberemo, da je $p'(1) = 0, p(0) = -4$ in $p(4) = 0$, torej je $p'(1)-2\cdot p(0)-4\cdot p(4) = 8$.

B1.

a) Poiščemo realni rešitvi dane enačbe in zapišemo prva dva člena padajočega aritmetičnega zaporedja $a_1 = 2$ in $a_2 = -1$. Diferenca zaporedja je $d = -3$.

b) Izračunamo 40. člen zaporedja $a_40 = a_1 + 39d = 2 + 39 \cdot (-3) = -115$. Zapišemo splošni člen zaporedja $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \cdot (-3) = 5 - 3n$.

c) Ugotovimo, da je diferenca členov zaporedja z lihimi indeksi $d = -6$ in da je v dani vrsti 20 členov. Uporabimo formuo za vsoto 20 členov aritmetičnega zaporedja in dobimo $s_{20} = \frac{20\cdot(2\cdot2+19\cdot(-6))}{2} = -1100$.

Zapis $a_1 = 2, a_2 = -1$ .... 2 točki
Zapis $d = -3$ .... 1 točka
Izračun $a_{40} = -115$ .... 1 točka
Zapis $a_n = 5 - 3n$ .... 1 točka
Zapis ali upoštevanje $d = -6$ .... 1 točka
Zapis ali upoštevanje, da seštevamo 20 členov .... 1 točka
Izračun $s_{20} = -1100$ .... 1 točka

B2.

a) Verjetnost, da bo med nastopajočimi tudi Mihael je $P(A) = \frac{\binom{9}{1}}{\binom{20}{1}} = 0,45 = 45\%$.

b) Vseh možnih vrstnih redov pianistov za šolski nastop je $V_{20}^{9} = \frac{20!}{11!} \doteq 6,09 \cdot 10^{10}$.

c) Verjetnost, da bo Mihael igral četrti po vrsti, je $P(C) = \frac{V_{19}^{8}}{V_{20}^{9}} = 0,05 = 5\%$

Izračun $P(A) = 0,45 = 45\%$ .... 1 točka
Zapis odgovora .... 1 točka
Izračun $V_{20}^{9} \doteq 6,09 \cdot 10^{10}$ .... 2 točki
Zapis odgovora .... 1 točka
Izračun $P(C) = 0,05 = 5\%$ .... 2 točki
Zapis odgovora .... 1 točka

B3.

a) Zapišemo predpis funkcije $h(x)=\frac{x^2+x+4}{x^2+3}$. Izračunamo odvod funkcije $h'(x)=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$. Ničle odvoda funkcije h so rešitve enačbe $-x^2-2x+3=0$. Rešitvi enačbe sta $x_1=1, x_2=-3$, to sta stacionarni točki funkcije h. Enačba vodoravne asimptote grafa funkcije h je $y=1$. Abscisa presečišča grafa funkcije h z vodoravno asimptoto je ničla ostanka pri deljenju števca z imenovalcem racionalne funkcije h. Ničla ostanka $r(x)=x+1$ je $x=-1$. Presečišče je točka $P(-1,1)$.

b) Zapišemo predpis funkcije $j(x)=x^2+ax+3$. Funkcija j bo imela vsaj eno realno ničlo, ko bo veljalo $D\geq 0$, torej je $a^2-12\geq 0$. Rešitve neenačbe so $-2\sqrt{3}\geq a$ ali $a\geq 2\sqrt{3}$.

Zapis $h(x)=\frac{x^2+x+4}{x^2+3}$ .... 1 točka
Izračun $h'(x)=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $-x^2-2x+3=0$ .... 1 točka
Zapis stacionarnih točk $x_1=1, x_2=-3$ .... 1 točka
Zapis enačbe vodoravne asimptote $y=1$ .... 1 točka
Zapis presečišča $P(-1,1)$ .... 1 točka
Zapis neenačbe $a^2-12\geq 0$ .... 1 točka
Rezultat $-2\sqrt{3}\geq a$ ali $a\geq 2\sqrt{3}$ .... 1 točka