**Društvo matematikov, fizikov**
**in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

# Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

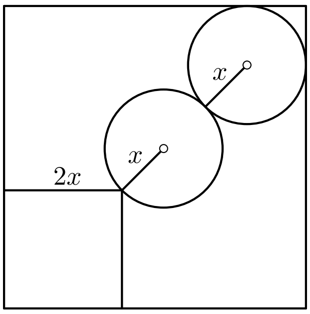
# 65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Odbirno tekmovanje, 22. april 2021

## Naloge za 1. letnik

*Čas reševanja: 45 minut.*

**B1.** Na sliki sta narisana dva kvadrata in dva skladna kroga, katerih središči ležita na diagonali večjega kvadrata. Stranica večjega kvadrata je dolga $1$ enoto, stranica manjšega kvadrata pa je dvakrat daljša od polmera krogov (glej sliko). Izračunaj polmer obeh krogov in racionaliziraj rezultat.



**B2.** Poišči vsa cela števila $n$, ki jih lahko zapišemo v obliki $n = \frac{m+2021}{2021-m}$, kjer je $m$ celo število.

# 65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Odbirno tekmovanje, 22. april 2021

## Naloge za 2. letnik

*Čas reševanja: 45 minut.*

**B1.** Nad stranico $CD$ kvadrata $ABCD$ z zunanje stani narišemo pravokotni trikotnik $DCE$ s pravim kotom pri $E$. Dokaži, da simetrala kota $\sphericalangle DEC$ razdeli kvadrat $ABCD$ na dva ploščinsko enaka dela.

**B2.** Izračunaj $x + y$, če je $(x + \sqrt{1 + x^2})(y + \sqrt{1 + y^2}) = 1$.

# 65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Odbirno tekmovanje, 22. april 2021

## Naloge za 3. letnik

*Čas reševanja: 45 minut.*

**B1.** V pokočno prizmo, katere osnovna ploskev je paralelogram z enim notranjim kotom $\alpha$, je včrtana sfera z radijem $r$, ki se se dotika vseh mejnih ploskev prizme. Izrazi prostornino prizme s pomočjo $r$ in $\alpha$.

**B2.** Dan je polinom $p(x) = x^6 + x^5 + \ldots + x + 1$. Dokaži, da polinom $p(x)$ deli polinom $p(x^9)$.

# 65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## Odbirno tekmovanje, 22. april 2021

## Naloge za 4. letnik

*Čas reševanja: 45 minut.*

**B1.** Naj bosta $a$ in $b$ taki realni števili, da ima polinom $p(x) = x^2 + ax + b$ dve realni ničli, polinom $p(q(x))$, kjer je $q(x) = x^2 + 2x + 7$, pa nima realnih ničel. Dokaži, da je $p(8) > 4$.

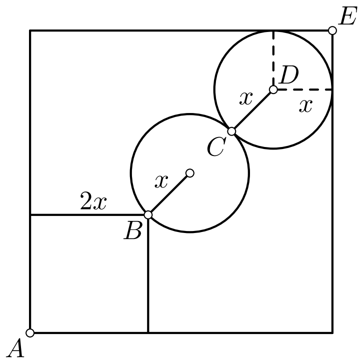
**B2.** Na tabelo velikosti $2 \times n$, kjer je $n$ naravno število, naključno na različni polji postavimo dva žetona. Kolikšna je verjetnost, da se da preostanek tabele prekriti z dominami velikosti $2 \times 1$? Domine se ne smejo prekrivati in ne smejo segati čez rob tabele.

# 65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## 16. marec 2006

## Rešitve nalog za Naloge za 1. letnik

**1.** Označimo nekatere točke, kot je prikazano na sliki.




Po predpostavkah naloge točke $B$, $C$ in $D$ ležijo na diagonali $AE$ velikega kvadrata. Če dorišemo še kvadrat z diagonalo $DE$, ugotovimo, da je njegova stranica dolga $x$. Dolžina diagonale $AE$ je zato

$$\sqrt{2} = |AE| = |AB| + |BC| + |CD| + |DE| = 2x\sqrt{2} + 2x + x + x\sqrt{2} = 3x(\sqrt{2} + 1).$$

Od tod sledi $x = \frac{\sqrt{2}}{3(\sqrt{2}+1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$. Polmer krogov je enak $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$ enot.

Izračun dolžine diagonale $AE$ . . . . . . . . . . 1 točka
Izračun dolžine diagonale $AB$ . . . . . . . . . . 2 točki
Izračun dolžine diagonale $DE$ . . . . . . . . . . 3 točke
Ugotovitev, da je dolžina daljice $BD$ enaka $3x$ . . . . . . . . . . 2 točki
Zapis $|AE| = |AB| + |BC| + |CD| + |DE|$ . . . . . . . . . . 1 točka
Zapis enačbe $\sqrt{2} = 2x\sqrt{2} + 2x + x + x\sqrt{2} = 3x(\sqrt{2} + 1)$ . . . . . . . . . . 2 točki
Izračun dolžine polmera (iz enačbe izrazi $x$) . . . . . . . . . . 6 točk
Racionalizacija rezultata . . . . . . . . . . 3 točke.

**2.** Enakost pomnožimo z $2021 - m$, da dobimo $2021n - mn = m + 2021$. Nato jo preuredimo do $2021(n-1) = m(n+1)$ in izrazimo $m = \frac{2021(n-1)}{n+1} = 2021 - \frac{2\cdot 2021}{n+1}$. Torej lahko v predpisani obliki zapišemo vsa tista cela števila $n$, za katera je $\frac{2\cdot 2021}{n+1}$ celo število. To pomeni, da mora biti $n+1$ delitelj števila $2 \cdot 2021 = 2 \cdot 43 \cdot 47$. Delitelji tega števila so $\pm 1, \pm 2, \pm 43, \pm 47, \pm 86, \pm 94, \pm 2021$ in $\pm 4042$. Rešitev naloge so torej cela števila

$$-4043, -2022, -95, -87, -48, -44, -3, -2, 0, 1, 42, 46, 85, 93, 2020, 4041.$$

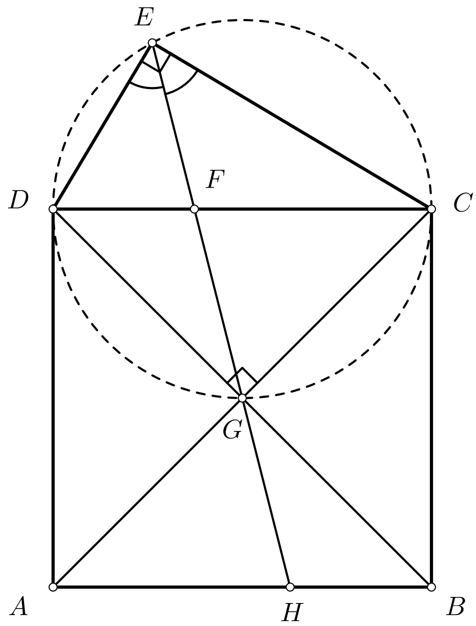
Iz dane enačbe izrazi $m$ . . . . . . . . . . 6 točk
Zapiše $m$ kot razliko celega števila in ulomka . . . . . . . . . . 4 točke
Sklep, da je $\frac{2\cdot 2021}{n+1}$ celo število . . . . . . . . . . 2 točke
Poišče vse delitelje števila $2 \cdot 2021$ (vsaki štirje delitelji 1 točka) . . . . . . . . . . 4 točke
Zapiše vseh $16$ rešitev (vsake štiri so vredne 1 točko) . . . . . . . . . . 4 točke.

# 65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

16. marec 2006

## Rešitve nalog za Naloge za 2. letnik

**1.**




Označimo z $G$ presečišče diagonal kvadrata $ABCD$. Ker je $\angle DEC = 90° = \angle CGD$, po Talesovem izreku točke $G, C, E$ in $D$ ležijo na isti krožnici $\mathcal{K}$. Točka $G$ zaradi simetrije razpolavlja lok $\widehat{DC}$ krožnice $\mathcal{K}$. Ker tudi simetrala obodnega kota $\angle DEC$ razpolavlja lok $\widehat{DC}$, točka $G$ leži na simetrali kota $\angle DEC$. Od tod sledi, da sta trikotnika $AHG$ in $CFG$ skladna, ker imata enake notranje kote in enako dolžino stranice $|AG| = |CG|$ nasproti enakega kota. Torej je $|AH| = |CF|$. Ploščina levega dela kvadrata, ki ga odreže simetrala kota $\angle DEC$, je zato po formuli za ploščino pravokotnega trapeza enaka

$$p_{AHFD} = \frac{|AH| + |DF|}{2} \cdot |AD| = \frac{|CF| + |DF|}{2} \cdot |AD| = \frac{|CD||AD|}{2},$$

kar je ravno polovica ploščine celotnega kvadrata $ABCD$. Torej simetrala kota $\angle DEC$ razdeli kvadrat $ABCD$ na dva ploščinsko enaka dela.

Pregledno narisana in označena skica kvadrata in pravokotnega trikotnika (z narisano simetralo) .................... 2 točki
Utemeljena ugotovitev, da točke $G, C, E$ in $D$ ležijo na isti krožnici .................... 5 točke
Utemeljena ugotovitev, da simetrala poteka skozi presečišče diagonal kvadrata .......... 3 točke
Utemeljen sklep, da sta trikotnika $AHG$ in $CFG$ skladna .................... 2 točki
Izračun ploščine štirikotnika $AHFD$ .................... 3 točki
Izračun ploščine štirikotnika $FCBH$ .................... 3 točki
Sklep, da sta ploščini enaki .................... 2 točki.

**2.** Dano enakost pomnožimo z $(x - \sqrt{1+x^2})$, da dobimo $(x^2 - (1 + x^2))(y + \sqrt{1+y^2}) = x - \sqrt{1+x^2}$ oziroma $-y - \sqrt{1+y^2} = x - \sqrt{1+x^2}$. Slednje lahko preoblikujemo v $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} = x + y$. Če dano enakost pomnožimo z $(y - \sqrt{1+y^2})$, dobimo $-x - \sqrt{1+x^2} = y - \sqrt{1+y^2}$ oziroma $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2} = -(x + y)$. Iz obeh enačb sledi $x + y = -(x + y)$ oziroma $x + y = 0$.

**2. način.** Na enak način kot v prvi rešitvi izpeljemo $x+y=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}$. Enačbo kvadriramo, da dobimo $x^2+2xy+y^2=(1+x^2)-2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+(1+y^2)$, ter jo nato poenostavimo do $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}=1-xy$. Po ponovnem kvadriranju dobimo $(1+x^2)(1+y^2)=1-2xy+x^2y^2$, kar lahko zopet poenostavimo do $x^2+2xy+y^2=0$. Dobljena enačba je ekvivalentna enačbi $(x+y)^2=0$, od koder sledi $x+y=0$.

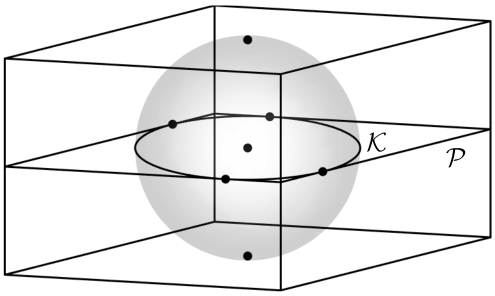
Množenje začetne enačbe z ustrezno razliko dvočlenika (v enem faktorju) .............. 6 točk
Preoblikovanje v $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}=x+y$ .............. 4 točke
Preoblikovanje v $-\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=x+y$ .............. 4 točke
Ugotovitev $x+y=-(x+y)$ .............. 4 točke
Izračun $x+y=0$ .............. 2 točki.
**2. način.** Množenje začetne enačbe z ustrezno razliko dvočlenika (v enem faktorju) .... 6 točk
Preoblikovanje v $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}=x+y$ oz. v $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=x+y$ ......... 4 točke
Pravilno kvadrirana zgornja enačba .............. 2 točki
Izračunan produkt korenov .............. 2 točki
Zapis $x^2+2xy+y^2=0$ .............. 3 točke
Razcep enačbe $(x+y)^2=0$ .............. 1 točka
Izračun $x+y=0$ .............. 2 točki.

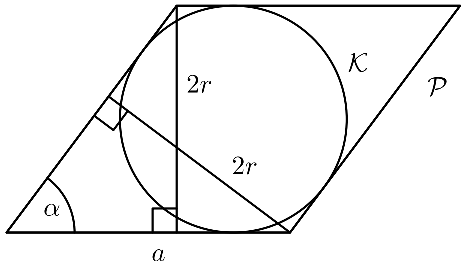
# 65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

## 16. marec 2006

## Rešitve nalog za Naloge za 3. letnik

**1.**




Ker se sfera dotika spodnje in zgornje ploskve prizme, je višina prizme enaka premeru sfere, torej $h = 2r$. Naj bo $\Sigma$ ravnina, ki vsebuje središče sfere in je vzporedna osnovni ploskvi prizme. Označimo s $\mathcal{P}$ presečišče prizme in ravnine $\Sigma$ ter s $\mathcal{K}$ presečišče sfere in ravnine $\Sigma$, kot je prikazano na levi sliki. Tedaj je $\mathcal{P}$ paralelogram, skladen z osnovno ploskvijo prizme z notranjim kotom $\alpha$, in $\mathcal{K}$ krožnica z radijem $r$. Dotikališča sfere s stranskimi ploskvami prizme ležijo vsa na krožnici $\mathcal{K}$ in hkrati tudi na robu paralelograma $\mathcal{P}$. To pomeni, da je krožnica $\mathcal{K}$ včtrana paralelogramu $\mathcal{P}$. Obe višini paralelograma $\mathcal{P}$ sta torej enaki $v = 2r$, zato je $\mathcal{P}$ romb. Privzemimo najprej, da je $\alpha$ manjši od notranjih kotov romba $\mathcal{P}$ in označimo stranico romba z $a$, kot je prikazano na desni sliki. Tedaj iz pravokotnega trikotnika dobimo $\sin\alpha = \frac{2r}{a}$ oziroma $a = \frac{2r}{\sin\alpha}$, ploščina romba $\mathcal{P}$ pa je enaka $p = a \cdot v = \frac{2r}{\sin\alpha} \cdot 2r = \frac{4r^2}{\sin\alpha}$. Prostornina prizme je zato enaka $V = p \cdot h = \frac{4r^2}{\sin\alpha} \cdot 2r = \frac{8r^3}{\sin\alpha}$. Ker pa je drugi notranji kot paralalograma enak $\beta = \pi - \alpha$ in velja $\sin\beta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, je ta fomula za prostornino prizme pravilna tudi, če je $\alpha$ večji izmed notranjih kotov osnovne ploskve prizme.

Pregledno narisana in označena skica (z vključenim presekom $\mathcal{P}$) ..................... 5 točk
Ugotovitev, da je $h = 2r$ ..................... 1 točka
Ugotovitev in utemeljitev, da je $\mathcal{P}$ romb ..................... 4 točke
Izračun stranice romba ..................... 3 točke
Izračun ploščine osnovne ploskve prizme ..................... 1 točka
Izračun prostornine prizme ..................... 2 točki
Utemeljitev, da formula velja tako za ostri kot tudi za topi kot $\alpha$ ..................... 4 točke.

**2.** Pri dokazu bomo nekajkrat uporabiti razcep

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Najprej opazimo, da je $(x-1)p(x) = x^7 - 1$. Torej je

$$\begin{aligned}(x^9 - 1)p(x^9) &= (x^9)^7 - 1 = x^{7\cdot 9} - 1 = (x^7)^9 - 1 = \\ &= (x^7 - 1)(x^{7\cdot 8} + x^{7\cdot 7} + \ldots + x^7 + 1) = \\ &= (x-1)p(x)(x^{7\cdot 8} + x^{7\cdot 7} + \ldots + x^7 + 1).\end{aligned}$$

Ker pa je $x^9 - 1 = (x-1)(x^8 + x^7 + \ldots + x^2 + x + 1) = (x-1)(x^2p(x) + x + 1)$, sledi

$$(x-1)(x^2p(x) + x + 1)p(x^9) = (x-1)p(x)(x^{7\cdot 8} + x^{7\cdot 7} + \ldots + x^7 + 1),$$

kar nam po preoblikovanju da

$$(x+1)p(x^9) = p(x)(x^{7\cdot 8} + x^{7\cdot 7} + \ldots + x^7 + 1 - x^2p(x^9)).$$

Polinoma $x+1$ in $p(x)=(x+1)(x^5+x^3+x)+1$ sta tuja, zato mora $p(x)$ deliti $p(x^9)$.

**2. način.** Nalogo lahko rešimo tudi z neposrednim deljenjem polinoma $p(x^9)$ s polinomom $p(x)$, kar pa zahteva precej računanja. Kvocient je enak

$$\begin{aligned}&x^{48}-x^{47}+x^{41}-x^{40}+x^{39}-x^{38}+x^{34}-x^{33}+x^{32}-x^{31}+x^{30}-x^{29}+x^{27}-x^{26}+x^{25}\\&-x^{24}+x^{23}-x^{22}+x^{21}-x^{19}+x^{18}-x^{17}+x^{16}-x^{15}+x^{14}-x^{10}+x^9-x^8+x^7-x+1.\end{aligned}$$

Zapis ali uporaba razcepa $a^n-1$ ........ 3 točke
Ugotovitev, da je $(x-1)p(x)=x^7-1$ ........ 2 točki
Preoblikovanje $(x^9-1)p(x^9)$ v $(x-1)p(x)(x^{7\cdot 8}+x^{7\cdot 7}+\ldots+x^7+1)$ ........ 5 točk
Zapis $x^9-1=(x-1)(x^2p(x)+x+1)$ ........ 2 točki
Zapis $(x+1)p(x^9)=p(x)(x^{7\cdot 8}+x^{7\cdot 7}+\ldots+x^7+1-x^2p(x^9))$ ........ 4 točke
Utemeljen sklep, da $p(x)$ mora deliti $p(x^9)$ ........ 4 točke.
**2. način.** Zapis polinoma $p(x^9)$ ........ 4 točke
Matematično korektno izpeljano deljenje ........ 16 točk
(za pravilno izračunanih prvih 5 členov količnika 5 točk, za pravilno izračunanih prvih 10 členov količnika 10 točk).

# 65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

**16. marec 2006**

## Rešitve nalog za Naloge za 4. letnik

**1.** Naj bosta $x_1$ in $x_2$ realni ničli polinoma $p(x)$. Tedaj je $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ in

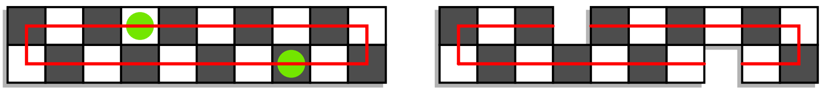
$$p(q(x)) = (q(x) - x_1)(q(x) - x_2) = (x^2 + 2x + (7 - x_1))(x^2 + 2x + (7 - x_2)).$$

Polinom $p(q(x))$ nima realnih ničel, zato tudi polinoma $x^2+2x+(7-x_1)$ in $x^2+2x+(7-x_2)$ nimata realnih ničel. Ker sta to polinoma z realnimi koeficienti, morata biti torej njuni diskriminanti negativni, se pravi $D_1 = 4 - 4(7 - x_1) < 0$ in $D_2 = 4 - 4(7 - x_2) < 0$. Od tod sledi $x_1 < 6$ ter $x_2 < 6$ in zato je $p(8) = (8 - x_1)(8 - x_2) > 2 \cdot 2 = 4$.

**2. način.** Naj bosta $x_1$ in $x_2$ realni ničli polinoma $p(x)$, torej $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)$. Opazimo, da je $q(x) = (x + 1)^2 + 6$, torej lahko polinom $q(x)$ zavzame vsa realna števila, ki so večja ali enaka 6. Ker pa polinom $p(q(x))$ nima realnih ničel, polinom $q(x)$ ne sme zadeti števil $x_1$ in $x_2$, torej mora veljati $x_1, x_2 < 6$. Od tod sledi $p(8) = (8 - x_1)(8 - x_2) > 2 \cdot 2 = 4$.

Razcep polinoma $p$ v $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ .......... 1 točka
Zapis $p(q(x)) = (x^2 + 2x + (7 - x_1))(x^2 + 2x + (7 - x_2))$ .......... 5 točk
Utemeljen sklep, da polinoma $x^2 + 2x + (7 - x_1)$ in $x^2 + 2x + (7 - x_2)$ nimata realnih ničel .. 3 točke
Izračun $D_1 = 4 - 4(7 - x_1) < 0$ in $D_2 = 4 - 4(7 - x_2) < 0$ .......... 6 točk
Izračun $x_1 < 6$ ter $x_2 < 6$ .......... 2 točki
Sklep $p(8) = (8 - x_1)(8 - x_2) > 2 \cdot 2 = 4$ .......... 3 točke.
**2. način.** Razcep polinoma $p$ v $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ .......... 1 točka
Zapis polinoma $q$ kot $q(x) = (x + 1)^2 + 6$ .......... 3 točke
Sklep, da je $q(x) \geq 6$ za vsako realno število $x$ .......... 5 točk
Utemeljena ugotovitev, da $q(x)$ ne sme zadeti števil $x_1$ in $x_2$ .......... 6 točk
Sklep $x_1, x_2 < 6$ .......... 2 točki
Sklep $p(8) = (8 - x_1)(8 - x_2) > 2 \cdot 2 = 4$ .......... 3 točke.

**2.** Tabelo pobarvamo kot šahovnico. Tedaj je v tabeli enako število belih in črnih polj. Ker vsaka domina prekrije 1 belo in 1 črno polje, vse domine skupaj prekrijejo enako število belih in črnih polj. Da lahko preostanek tabele prekrijemo z dominami velikosti $2 \times 1$ morata biti torej žetona postavljena na polji različnih barv. Pokažimo, da lahko v tem primeru preostanek tabele res prekrijemo z dominami velikosti $2 \times 1$. Na tabelo narišimo sklenjeno krivuljo, ki poteka skozi vsa polja tabele, kot je prikazano na levi sliki na konkretnem primeru tabele velikosti $2 \times 10$ pri konkretni postavitvi žetonov.



Iz tabele sedaj odstranimo polji, na katerih sta žetona, kot je prikazano na desni sliki. Ker sta bila žetona na poljih različne barve, narisana krivulja razpade na dva dela, ki oba potekata skozi sodo mnogo polj tabele. Torej lahko oba dela prekrijemo z dominami velikosti $2 \times 1$, tako da začnemo na enem koncu krivulje in ji pri prekrivanju sledimo, na vsakem koraku pa z domino prekrijemo naslednji dve polji na krivulji (to lahko vedno storimo).

Verjetnost iz naloge lahko sedaj izračunamo kot

$$P = \frac{\text{ugodne postavitve žetonov}}{\text{vse možne postavitve žetonov}},$$

kjer so ugodne postavitve žetonov tiste, pri katerih sta žetona postavljana na polji različne barve. Vseh možnih postavitev žetonov je $2n \cdot (2n-1)$, saj lahko prvi žeton postavimo na poljubno polje tabele (teh je $2n$), za postavitev drugega žetona pa nam ostane $2n-1$ polj tabele. Ugodnih postavitev žetonov je $2n \cdot n$, saj lahko prvi žeton prav tako postavimo na poljubno polje tabele, za postavitev drugega žetona pa imamo na voljo le $n$ polj tabele, saj mora biti ta postavljen na polje druge barve kot prvi žeton. Iskana verjetnost je torej enaka

$$P = \frac{2n^2}{2n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}.$$

Ugotovitev, da je prekrivanje mogoče, ko žetona postavimo na polji različnih barv ..... 5 točk
Dokaz, da je v zgornjem primeru prekrivanje mogoče ................................ 3 točke
Izračun vseh možnih postavitev žetonov ................................................ 5 točk
Izračun ugodnih postavitev žetonov ..................................................... 5 točk
Izračun verjetnosti ................................................................ 2 točki.