Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

48. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Ljutomer, 17. april 2004

Naloge za 1. letnik

1. Ali obstaja naravno število n, za katerega velja: če število n pomnožimo z vsoto njegovih števk, je vsota števk dobljenega zmnožka enaka 3?

2. Na vsaki ploskvi kocke je napisano naravno število, v vsakem oglišču pa je napisan zmnožek števil na 3 ploskvah, ki se stikajo v tem oglišču. Vsota števil v ogliščih kocke je 70. Kolikšna je vsota števil na ploskvah kocke?

3. Naj bosta E in F razpolovišči stranic AD in DC pravokotnika $ABCD$. Označimo z G presečišče daljic AF in EC. Dokaži, da je $\sphericalangle CGF = \sphericalangle FBE$.

4. Ana je izbrala števke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 in 9. Odločila se je, da bo oblikovala skupine s po 4 dvomestnimi praštevili in da bo za vsako skupino praštevil uporabila vse izbrane števke. Kolikšna je vsota praštevil posamezne skupine?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

48. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Ljutomer, 17. april 2004

Naloge za 2. letnik

1. Poišči vsa petmestna števila $\overline{abcde}$, ki so deljiva z 9 in za katera velja $\overline{ace} - \overline{bda} = 760$.

2. Dano je pozitivno realno število p. Med vsemi pari pozitivnih realnih števil (x, y), ki ustrezajo enačbi $xy(x+y) = p$, poišči tistega, za katerega je vrednost izraza $x^3 + y^3$ najmanjša.

3. Na krožnici k s središčem v točki O izberemo točki A in B tako, da izbrani točki nista krajišči premera. Na trikotniku OAB očrtani krožnici izberemo točko C, ki ne sovpada niti z A niti z B. Premica AC seka krožnico k v točkah A in D. Dokaži, da je trikotnik DCB enakokrak.

4. Igralca imata vsak po 2004 žetone. Izmenoma mečeta neobičajno igralno kocko, na kateri je napisanih prvih 6 praštevil. Igralec, ki je na potezi, vrže kocko, drugi pa mu da toliko žetonov, kolikor je ostanek pri deljenju števila 2004 s številom, ki je padlo pri metu kocke. Ali je mogoče, da bi imel eden izmed igralcev v nekem trenutku igre 7-krat toliko žetonov kot drugi?

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

48. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Ljutomer, 17. april 2004

Naloge za 3. letnik

1. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2004}$.

2. Naj bo n naravno število, ki je enako vsoti svojih od n manjših deliteljev. Tako število je denimo število 28. Kolikšna je vsota recipročnih vrednosti vseh njegovih deliteljev?

3. Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik, pri katerem si nobeni 2 nasprotni stranici nista vzporedni. Presečišče premic AB in CD označimo z E, presečišče premic AD in BC pa s F. Simetrala kota $\sphericalangle AFB$ seka daljico AB v točki P, daljico CD pa v točki R. Simetrala kota $\sphericalangle BEC$ seka daljico BC v točki Q, daljico AD pa v točki S. Dokaži, da je štirikotnik $PQRS$ romb.

4. V telenoveli o dogodkih v zarotniškem mestecu nastopa n meščanov, $n \geq 3$. Vsaka 2 meščana skupaj kujeta zaroto proti enemu izmed ostalih meščanov. Dokaži, da obstaja tak meščan, da je vsaj $\sqrt{n}$ meščanov vpletenih v zaroto proti njemu.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

48. matematično tekmovanje
srednješolcev Slovenije

Ljutomer, 17. april 2004

Naloge za 4. letnik

1. Členi neskončnega geometrijskega zaporedja so naravna števila, od katerih vsaj dve nista deljivi s 4. Zapiši splošni člen tega zaporedja, če veš, da je eden izmed členov enak 2004.

2. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe $a^b = ab + 2$.

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC. Naj bo C' nožišče višine na AB, D in E pa različni točki na daljici CC'. Naj bosta F in G pravokotni projekciji točke D na stranici AC oziroma BC. Dokaži, da je trikotnik ABC enakokrak, če je štirikotnik $DGEF$ paralelogram.

4. V telenoveli o dogodkih v zarotniškem mestecu nastopa n meščanov, $n \geq 4$. Vsaka skupina 3 meščanov kuje zaroto proti enemu izmed ostalih meščanov. Dokaži, da obstaja tak meščan, da je vsaj $\sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$ meščanov vpletenih v zaroto proti njemu.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 210 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA

I/1. Označimo s $s(m)$ vsoto števk naravnega števila m. Naloga sprašuje, ali obstaja naravno število n, da je $s(n \cdot s(n)) = 3$. Ker je naravno število deljivo s 3 natanko tedaj, ko je s 3 deljiva vsota njegovih števk, mora biti s 3 deljiv zmnožek $n \cdot s(n)$. Torej mora biti s 3 deljivo vsaj eno izmed števil n in $s(n)$. Če pa je eno deljivo s 3, je tudi drugo deljivo s 3 in je zmnožek $n \cdot s(n)$ deljiv z 9. Tedaj bi moralo biti število $s(n \cdot s(n))$ deljivo z 9, zato enačba $s(n \cdot s(n)) = 3$ ni rešljiva. Iskano naravno število ne obstaja.

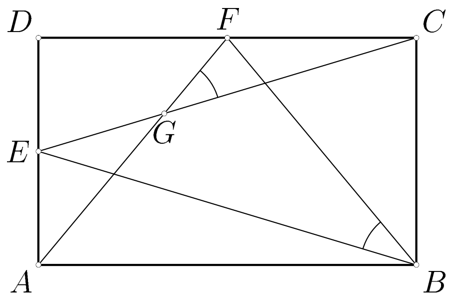
I/2. Označimo števila na ploskvah kocke z a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 in a_6. V ogliščih kocke so zapisana števila $a_1a_2a_5$, $a_2a_3a_5$, $a_3a_4a_5$, $a_4a_1a_5$, $a_1a_2a_6$, $a_2a_3a_6$, $a_3a_4a_6$ in $a_4a_1a_6$, zato je

$$\begin{aligned} 70 &= a_1a_2a_5 + a_2a_3a_5 + a_3a_4a_5 + a_4a_1a_5 + a_1a_2a_6 + a_2a_3a_6 + a_3a_4a_6 + a_4a_1a_6 = \\ &= (a_5 + a_6)(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1) = \\ &= (a_1 + a_3)(a_2 + a_4)(a_5 + a_6). \end{aligned}$$

Ker je $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ in so vsi 3 faktorji večji od 1, je eden izmed faktorjev enak 2, eden je enak 5 in eden je enak 7, njihova vsota pa je enaka $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2 + 5 + 7 = 14$.

I/3. Ker je $\sphericalangle FBA = \sphericalangle BAF = \sphericalangle DFA$ in $\sphericalangle EBA = \sphericalangle DCE$, je

$$\begin{aligned} \sphericalangle CGF &= \pi - \sphericalangle FCG - \sphericalangle GFC = \\ &= \pi - \sphericalangle DCE - (\pi - \sphericalangle DFG) = \\ &= -\sphericalangle DCE + \sphericalangle DFA = \\ &= \sphericalangle FBA - \sphericalangle EBA \\ &= \sphericalangle FBE. \end{aligned}$$



I/4. Ana lahko z izbranimi števkami oblikuje skupino praštevil $\{23,\ 41,\ 59,\ 67\}$. Da ne bi iskali vseh možnih skupin praštevil, razmišljajmo drugače. Dvomestno praštevilo se ne more končati z nobeno izmed števk 2, 4, 5 oziroma 6, zato te števke nastopajo na mestu desetic. Kakor koli Ana oblikuje skupino 4 praštevil, je njihova vsota enaka $10 \cdot (2 + 4 + 5 + 6) + (1 + 3 + 7 + 9) = 170 + 20 = 190$.

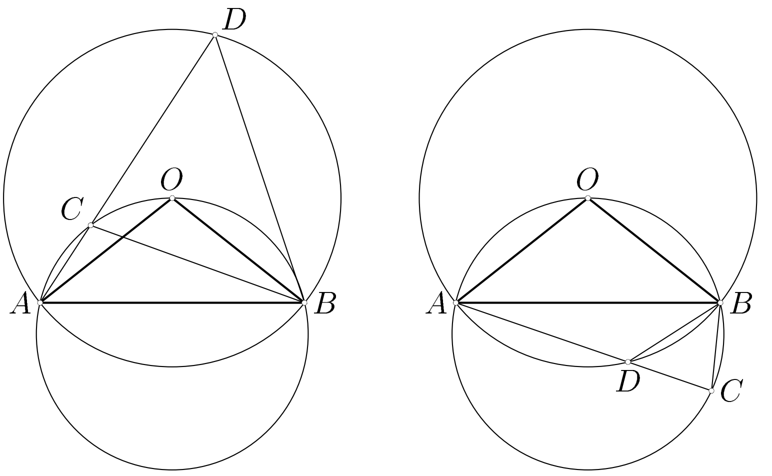
II/1. Enačbo $\overline{ace} - \overline{bda} = 760$ preoblikujemo v $100a + 10c + e - 100b - 10d - a = 760$, od koder sledi, da je $e = a$. Zdaj lahko enačbo delimo z 10 in dobimo $10(a - b) + (c - d) = 76$. Ločimo 2 možnosti, in sicer $c - d = 6$ ali $c - d = -4$.

V prvem primeru je $c = d + 6$ in $a = b + 7$. Upoštevamo pogoj, da je petmestno število deljivo z 9. To pomeni, da je $a + b + c + d + e = b + 7 + b + d + 6 + d + b + 7 = 3b + 2d + 20 = 3b + 2(d + 1 + 9)$ deljivo z 9. Zato je $d + 1$ deljivo s 3 in zaradi $c - d = 6$ sledi $d = 2$. Potem je $c = 8$ in velja, da 9 deli $3(b + 2)$, od koder zaradi $a = b + 7$ sledi $b = 1$. V tem primeru je petmestno število enako 81828.

V drugem primeru je $d = c + 4$ in $a = b + 8$. Zato je $a = 8$ in $b = 0$ ali $a = 9$ in $b = 1$. Če je $a = 8$, iz pogoja $9 \mid (a + b + c + d + e) = 8 + 2c + 4 + 8$ sledi, da 9 deli $2c + 2$. Torej je $c = 8$, vendar potem $d = c + 4 = 12$ ni števka. Če pa je $a = 9$, iz pogoja $9 \mid (a + b + c + d + e) = 10 + 2c + 4 + 9$ sledi, da 9 deli $2c + 5$. Torej je $c = 2$ in je petmestno število enako 91269.

II/2. Ker je $x^3 + y^3 - p = x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = x^2(x - y) - y^2(x - y) = (x - y)^2(x + y) \geq 0$, je vrednost izraza zagotovo večja ali enaka p. Enakost je dosežena le za $x = y = (\frac{p}{2})^{\frac{1}{3}}$.

II/3. Če točka C leži na istem loku nad AB kot točka O, je $\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle CDB + \sphericalangle DBC$. Ker je $\sphericalangle CDB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$, je tudi $\sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$. Torej je DCB enakokrak trikotnik z vrhom C.



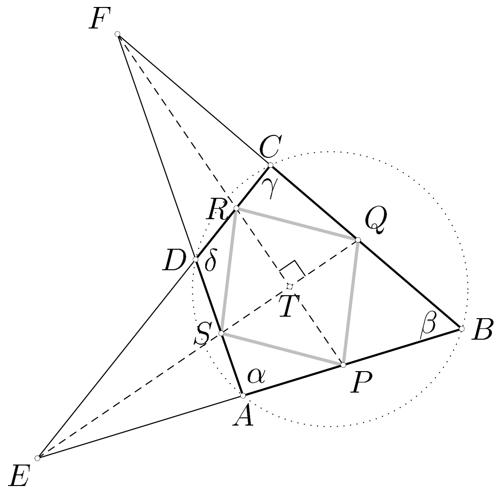
Če pa točki C in O ne ležita na istem loku nad AB, je $\sphericalangle BDA = \pi - \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle DBC + \sphericalangle BCD$. Zaradi $\sphericalangle BCD = \pi - \sphericalangle AOB$ je $\sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$. Ker je $\sphericalangle CDB = \pi - \sphericalangle BDA = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$, je tudi v tem primeru DCB enakokrak trikotnik z vrhom C.

II/4. Če bi imel eden izmed igralcev 7-krat toliko žetonov kot drugi, bi jih imel eden 3507, drugi pa 501, kajti žetonov je ves čas igre 4008. Prvih 6 praštevil je 2, 3, 5, 7, 11 in 13, število 2004 pa da pri deljenju s temi praštevili zaporedoma ostanke 0, 0, 4, 2, 2, 2. Pri vsakem metu kocke se torej število žetonov vsakega igralca spremeni za sodo število. Ker ima na začetku vsak igralec sodo število žetonov, ni mogoče, da bi jih imel eden izmed njiju v nekem trenutku igre 7-krat toliko kot drugi, saj bi to pomenilo, da bi tedaj vsak igralec imel liho število žetonov.

III/1. Kvadrirajmo enačbo $\sqrt{x} = \sqrt{2004} - \sqrt{y}$ in izrazimo $2\sqrt{y \cdot 2004} = 2004 + y - x$. Od tod sledi, da mora biti $2\sqrt{y \cdot 2004} = 4\sqrt{y \cdot 501}$ celo število, zato mora biti $y = 501 \cdot k^2$, kjer je k nenegativno celo število. Če sedaj y vstavimo v prvotno enačbo, dobimo $\sqrt{x} = (2-k)\sqrt{501}$, od koder sledi, da je k lahko 0, 1 ali 2. Vsi možni pari (x, y) so tako $(2004, 0)$, $(501, 501)$ in $(0, 2004)$.

III/2. Naj bodo $d_1, d_2, \ldots, d_k$ delitelji števila n in naj velja $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Potem je $d_i \cdot d_{k+1-i} = n$, zato je $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} = \frac{d_k}{n} + \frac{d_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{d_1}{n} = \frac{d_k + (d_{k-1} + \ldots + d_1)}{n} = \frac{n+n}{n} = 2$.

III/3. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da leži točka A med E in B, točka C pa med F in B. Presečišče obeh simetral označimo s T, notranje kote štirikotnika $ABCD$ pa z α, β, γ in δ. Potem je



$$\begin{aligned}\sphericalangle FTE &= \sphericalangle TFQ + \sphericalangle FQT = \\ &= \tfrac{1}{2}\sphericalangle AFB + (\tfrac{1}{2}\sphericalangle BEC + \sphericalangle FBE) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) + \tfrac{1}{2}(\pi - \beta - \gamma) + \beta = \\ &= \pi - \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma) = \tfrac{1}{2}\pi,\end{aligned}$$

saj je $\alpha + \gamma = \pi$. Torej je $ET \perp FT$. Ker je simetrala kota $\sphericalangle PER$ hkrati tudi višina na stranico PR, je PER enakokrak trikotnik z osnovnico PR, točka T pa njeno razpolovišče. Podobno je točka T razpolovišče osnovnice SQ enakokrakega trikotnika SQF. Torej je štirikotnik $PQRS$ romb, saj ima diagonali, ki se pravokotno razpolavljata.

III/4. Vseh (neurejenih) parov meščanov je $\frac{n(n-1)}{2}$. Vsak par označimo s tistim izmed $n-2$ meščanov, proti kateremu par kuje zaroto. Potem obstaja m parov, ki so vsi označeni z istim meščanom, in je $m \geq \frac{n-1}{2}$. Denimo, da v teh m parih sodeluje k meščanov. Tedaj velja $\frac{k(k-1)}{2} \geq m \geq \frac{n-1}{2}$, torej je $k^2 > k(k-1) \geq n-1$. Res je, da obstaja tak meščan, proti kateremu se je zarotilo $k \geq \sqrt{n}$ meščanov.

IV/1. Zaporedje je oblike $a_n = a \cdot r^n$, $n \geq 0$. Najprej dokažemo, da so vsi členi zaporedja cela števila. Ker je $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, je r racionalno število. Zapišimo $r = \frac{\alpha}{\beta}$, $\beta > 0$, kjer sta si števili α in β tuji. Dokazati je potrebno, da je $b = 1$. Recimo, da obstaja praštevilo p, ki deli b. Tedaj število $a_n = a\frac{\alpha^n}{\beta^n}$ za dovolj velike n ne bo celo.

Če je člen zaporedja deljiv s 4, so deljivi s 4 tudi vsi členi, ki mu sledijo, zato a_0 in a_1 nista deljiva s 4. Prav tako je $r \neq 1$, saj bi bili sicer vsi členi enaki 2004. Denimo, da je k-ti člen enak 2004. Tedaj je $a_k = a \cdot r^k = 2004 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 167$. Ker je 2004 sodo število, je $k \geq 2$. Če bi bil $k > 2$, bi od tod sledilo $r = 1$, to pa ni mogoče. Zato je $k = 2$ in $r > 1$. Edina možnost je $r = 2$, $a = 3 \cdot 167 = 501$. Iskano zaporedje je $a_n = 501 \cdot 2^n$.

IV/2. Če je $b < 0$, število a^b ni celo, če je $|a| > 1$. Pri $a = 1$ dobimo enačbo $1 = b + 2$ in od tod $b = -1$. Pri $a = -1$ dobimo enačbo $(-1)^b = -b + 2$, ki pa nima rešitve: ker je $b < 0$, je $-b + 2 \geq 3$, medtem ko je $(-1)^b = \pm 1$.

Če je $b = 0$, dana enačba ni rešljiva.

Če pa je $b > 0$, število a deli a^b. Zato a deli tudi število 2, saj je $a^b - ab = 2$. Torej je a lahko enak -2, -1, 1 ali 2. Oglejmo si vsakega izmed teh primerov posebej.

Če je $a = -2$, je $(-2)^b = -2b + 2$ oziroma $(-2)^{b-1} = (b-1)$. Tej enačbi ne ustreza nobeno naravno število b. Če število b ustreza pogoju, je liho; torej $b = 2s + 1$. Enačbo tedaj preoblikujemo v $4^s = s$, kar pa ni rešljivo, saj za vsako realno število s velja $4^s > s$.

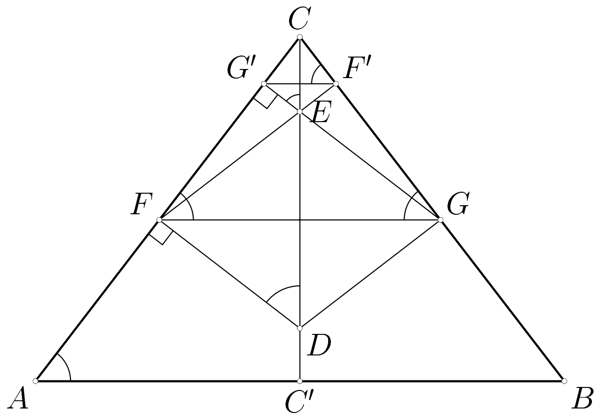
Če je $a = -1$, je $(-1)^b = -b + 2$. To pomeni, da je $|-b+2| = 1$, kar nam da $b = 1$ ali $b = 3$, vendar le $b = 3$ ustreza enačbi $(-1)^b = -b + 2$.

Če je $a = 1$, dobimo enačbo $1 = b + 2$, ki pri pogoju $b > 0$ nima rešitev.

Če je $a = 2$, je $2^b = 2(b+1)$ oziroma $2^{b-1} = b + 1$. Tej enačbi zadošča le $b = 3$. Za $b > 3$ pa velja $2^{b-1} > b + 1$, kar preverimo z indukcijo. (Pri $b = 4$ imamo $2^{4-1} = 8 > 4 + 1 = 5$. V dokazu induktivnega koraka pa $2^{(b+1)-1} = 2 \cdot 2^{b-1} > 2(b+1) > (b+1) + 2$.)

Pari (a,b), ki rešijo enačbo, so: $(2,3)$, $(1,-1)$ in $(-1,3)$.

IV/3. 1. način Označimo s F' presečišče premice FE s stranico BC ter z G' presečišče premice GE s stranico AC. Naj bo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $FDGC$ je $\sphericalangle CGF = \sphericalangle CDF = \alpha$. Predpostavimo, da je $DGEF$ paralelogram. Ker je $DF \parallel GG'$, je tudi $\sphericalangle CEG' = \alpha$, zaradi tetivnosti štirikotnika $G'EF'C$ pa je $\sphericalangle CEG' = \sphericalangle CF'G' = \alpha$. Nazadnje upoštevamo še, da je zaradi pravih kotov pri F' in G' tudi štirikotnik $FGF'G'$ tetiven in izpeljemo $\sphericalangle GFG' = \sphericalangle CF'G' = \alpha$. Torej smo dokazali, da je $\sphericalangle CGF = \sphericalangle GFC = \alpha$. Povsem analogno lahko sklepamo, da je $\sphericalangle CGF = \sphericalangle GFC = \beta$, kjer smo označili $\beta = \sphericalangle CBA$. Torej res velja $\alpha = \beta$ in je trikotnik ABC enakokrak.



2. način Označimo F' in G' kot v 1. načinu in naj bo $DGEF$ paralelogram. Ker je $GG' \perp FC$ in $FF' \perp BC$, je E višinska točka trikotnika FGC in zato je $CC' \perp FG$. Ker se diagonali v paralelogramu razpolavljata, je trikotnik FGC enakokrak. Ker pa velja $FG \parallel AB$, je tudi trikotnik ABC enakokrak.

IV/4. Vseh (neurejenih) trojic meščanov je $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Vsako trojico označimo s tistim izmed $n-3$ meščanov, proti kateremu trojica kuje zaroto. Potem obstaja m trojic, ki so vse označene z istim meščanom, in je $m \geq \frac{(n-1)(n-2)}{6}$. Denimo, da v teh m trojicah sodeluje k meščanov. Tedaj velja $\frac{k(k-1)(k-2)}{6} \geq m$, torej je $k^3 > k(k-1)(k-2) \geq 6m \geq (n-1)(n-2)$ in zato $k^3 \geq (n-1)(n-2)$. Res je, da obstaja tak meščan, proti kateremu se je zarotilo $k \geq \sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$ meščanov.