**Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

# Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

**51. tekmovanje iz matematike**
**za Vegovo priznanje**
**Področno tekmovanje, 1. april 2015**

Prilepi nalepko s šifro

# Naloge za 7. razred

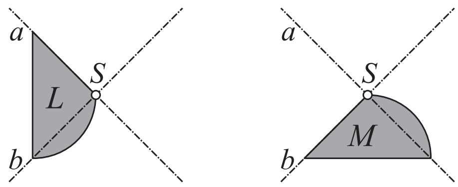
*Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.*

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

| B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|
| | | |

**A1.** S katero transformacijo se lik $L$ preslika v lik $M$?

(**A**) vrtež za $90°$ okrog $S$ (**B**) vrtež za $270°$ okrog $S$
(**C**) zrcaljenje čez premico $a$ (**D**) zrcaljenje čez premico $b$
(**E**) zrcaljenje čez točko $S$




**A2.** Jure se je odpravil na planinski izlet na Krn. Od koče na planini Kuhinja se je odpravil med $8$. in $9$. uro, ko sta se urna kazalca prekrivala. H koči na vrhu Krna je prispel med $14$. in $15$. uro, ko sta urna kazalca oklepala kot $180°$. Koliko časa je trajal pohod?

(**A**) $5$ ur $43$ min (**B**) $6$ ur (**C**) $6$ ur $43$ min (**D**) $5$ ur $17$ min (**E**) $6$ ur $30$ min

**A3.** Koliko števil izmed prvih $500$ naravnih števil je hkrati deljivih s $3$, $4$ in $5$?

(**A**) $8$ (**B**) $10$ (**C**) $12$ (**D**) $16$ (**E**) $120$

**A4.** Od tretjine števila $246$ odštejemo devetkratnik razlike števil $14$ in $5$. Kolikšna je vrednost te razlike?

(**A**) $1$ (**B**) $55$ (**C**) $67$ (**D**) $68$ (**E**) $81$

**A5.** Koliko naravnih števil deli število $2015$?

(**A**) $4$ (**B**) $5$ (**C**) $6$ (**D**) $7$ (**E**) $8$

**A6.** Na ligaškem tekmovanju vsaka zmaga prinese $2$ točki, neodločen izid $1$ točko in poraz $0$ točk. Moštvo je v desetih tekmah zbralo $15$ točk. Največ koliko neodločenih izidov je lahko doseglo?

(**A**) $1$ (**B**) $3$ (**C**) $4$ (**D**) $5$ (**E**) $7$

**A7.** Za kateri $x$ bosta vrednosti ulomkov $\dfrac{x}{\frac{1}{5}-\frac{2}{15}}$ in $\dfrac{\frac{2}{15}+0.1}{0.12-\frac{1}{15}}$ enaki?

(**A**) $2015$ (**B**) $1$ (**C**) $\frac{7}{24}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $\frac{7}{450}$

**A8.** Simetrali dveh notranjih kotov trikotnika oklepata $100°$ velik kot. Koliko je velik tretji notranji kot trikotnika?

(**A**) $20°$ (**B**) $80°$ (**C**) $100°$ (**D**) $160°$
(**E**) ni možno izračunati

**B1.** Velikost $\frac{3}{5}$ zunanjega kota ob vrhu enakokrakega trikotnika je $52°6'$. Izračunaj velikosti notranjih kotov tega trikotnika.

*(6 točk)*

**B2.** Prva tri mesta neke šestmestne telefonske številke oblikujejo trimestno število, manjše od trimestnega števila, ki ga oblikujejo zadnja tri mesta te telefonske številke. Obe števili imata na mestu desetic števko $7$ in sta deljivi s $45$. Poišči to telefonsko številko. Svoj odgovor utemelji.

*(6 točk)*

**B3.** Poišči največji ulomek, s katerim lahko po vrsti delimo $\frac{12}{35}$, $\frac{16}{15}$ in $\frac{8}{21}$ ter so dobljeni količniki naravna števila.

*(6 točk)*

dMFA

# 51. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Področno tekmovanje, 1. april 2015

Prilepi nalepko s šifro

## Naloge za 8. razred

*Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.*

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

| B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|
| | | |

**A1.** Koliko je $\frac{1}{32}$ od $2^{2015}$?

(**A**) $1$ (**B**) $2^{2020}$ (**C**) $2^{403}$ (**D**) $1^{2015}$ (**E**) $2^{2010}$

**A2.** Kolikšna je vrednost izraza $((((1-2)^{2015}-4)-5)+6)(-5)-(-2)^4+2015^0$?

(**A**) $2015$ (**B**) $37$ (**C**) $5$ (**D**) $-8$ (**E**) $2019$

**A3.** Kolikšna je vrednost izraza $\sqrt{40^4-30^4}$?

(**A**) $100$ (**B**) $10$ (**C**) $500\sqrt{7}$ (**D**) $700$ (**E**) $1000\sqrt{7}$

**A4.** Tim je zaklenil ključavnico na kovčku in pozabil kombinacijo. Spominja se, da so na začetku tri števke izmed števk $7$, $8$ ali $9$ (lahko se ponavljajo), nato jim sledita dve črki izmed črk $F$, $G$ in $H$ (lahko sta enaki). Največ koliko kombinacij mora preveriti, da bo lahko odprl kovček?

(**A**) $12$ (**B**) $25$ (**C**) $72$ (**D**) $243$ (**E**) $729$

**A5.** Kolikšna je najmanjša vrednost naravnega števila $n$, za katerega vrednost izraza $n^2+n+11$ ni praštevilo?

(**A**) $7$ (**B**) $8$ (**C**) $9$ (**D**) $10$ (**E**) $11$

**A6.** Nekatera naravna trimestna števila imajo lastnost, da je srednja števka enaka aritmetični sredini prve in tretje števke. Koliko je takih števil?

(**A**) $45$ (**B**) $40$ (**C**) $35$ (**D**) $30$ (**E**) $10$

**A7.** Velikost kota ob vrhu enakokrakega trikotnika $ABC$ je trikrat tolikšna kot velikost kota ob osnovnici. Kolikšna je velikost ostrega kota med nosilkama višin na kraka trikotnika?

(**A**) $54°$ (**B**) $72°$ (**C**) $90°$ (**D**) $108°$ (**E**) $120°$

**A8.** Blago se je dvakrat zapored podražilo za enako odstotkov. Po drugi podražitvi je bilo dražje za $44\ \%$ glede na prvotno ceno. Za koliko odstotkov se je blago podražilo prvič?

(**A**) $72\ \%$ (**B**) $44\ \%$ (**C**) $22\ \%$ (**D**) $20\ \%$ (**E**) $18\ \%$

**B1.** Izračunaj vrednost izraza

$$\frac{\sqrt{3^{2015}}+1}{\sqrt{3^{2008}}}-\frac{2}{2\cdot 3^{1004}}$$

in rezultat delno koreni.

*(6 točk)*

**B2.** Delavci so dobili naročilo za prepleskanje sten v pediatrični kliniki. Vseh $18$ delavcev bi pleskalo $24$ dni, da bi bilo delo opravljeno. Po $6$ dneh je tretjina delavcev zbolela, preostali pa so nadaljevali z delom. V kolikem času od začetka je bilo delo opravljeno?

*(6 točk)*

**B3.** Oglišča $5$-kotnika s skladnimi daljicami povežemo s točko $M$ v njegovi notranjosti. Dobimo dva enakostranična trikotnika ter $3$ skladne enakokrake. Koliko je velik najmanjši notranji kot v nastalih trikotnikih?

*(6 točk)*

# 51. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

**Področno tekmovanje, 1. april 2015**

Prilepi nalepko s šifro

## Naloge za 9. razred

*Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bomo pravilni odgovor ovrednotili z dvema točkama, za nepravilni odgovor pa bomo pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo, desno tabelo pusti prazno.*

| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

| B1 | B2 | B3 |
|---|---|---|
| | | |

**A1.** Kateti pravokotnega trikotnika sta dolgi $4$ cm in $6$ cm. Koliko je dolga višina na hipotenuzo?

**(A)** $\frac{\sqrt{13}}{13}$ cm **(B)** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ cm **(C)** $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ cm **(D)** $\frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm **(E)** $\sqrt{13}$ cm

**A2.** Tomaž je na testu pravilno odgovoril na $\frac{4}{5}$ vprašanj od $5$ v sklopu A, $60\ \%$ vprašanj od $20$ v sklopu B ter $20\ \%$ vprašanj od $15$ v sklopu C. Na koliko odstotkov vseh vprašanj na testu je pravilno odgovoril?

**(A)** $40\ \%$ **(B)** $47\ \%$ **(C)** $47.5\ \%$ **(D)** $48\ \%$ **(E)** $53.3\ \%$

**A3.** V učilnici je bilo na začetku šolske ure enako deklet in fantov. Ko je $8$ deklet zapustilo učilnico, je v njej ostalo dvakrat toliko fantov kot deklet. Koliko je bilo vseh učencev v učilnici na začetku ure?

**(A)** $8$ **(B)** $16$ **(C)** $24$ **(D)** $32$ **(E)** $40$

**A4.** Za pravokotnik $ABCD$ velja $|AB| = 2|BC|$. Točka $E$ leži na stranici $AB$, da velja $\sphericalangle DEA = \sphericalangle CED$. Koliko je velik kot $\sphericalangle DEA$?

**(A)** $45°$ **(B)** $60°$ **(C)** $75°$ **(D)** $90°$

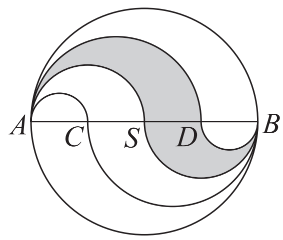
**(E)** nič od naštetega

**A5.** Vsoto kvadratov treh zaporednih naravnih lihih števil zmanjšamo za $5$. S katerim od spodnjih števil je zagotovo deljiva dobljena razlika?

**(A)** $0$ **(B)** $4$ **(C)** $5$ **(D)** $6$ **(E)** $12$

**A6.** Točke $C$, $S$ in $D$ delijo premer $AB$ dolžine $2$ na enake dele. Kolikšna je ploščina osenčenega območja?

**(A)** $\frac{\pi}{8}$ **(B)** $\frac{\pi}{4}$ **(C)** $\frac{3\pi}{16}$ **(D)** $\frac{\pi}{2}$ **(E)** $\pi$




**A7.** Za koliko parov naravnih števil $m$ in $n$ velja: $m^2 - n^2 = 2015$?

**(A)** $0$ **(B)** $1$ **(C)** $2$ **(D)** $3$ **(E)** $4$

**A8.** Za tri števila $x$, $y$ in $z$ veljata naslednji razmerji $x : y = 9 : 4$ in $y : z = 5 : 3$. Kolikšno je razmerje $(x - y) : (y - z)$?

**(A)** $7 : 12$ **(B)** $25 : 8$ **(C)** $4 : 1$ **(D)** $5 : 12$

**(E)** ni možno izračunati

**B1.** Klavdija sestavlja štirimestna števila po naslednjem pravilu:
– prva števka je sodo število,
– druga števka je praštevilo,
– tretja števka je liho število,
– četrta števka je sestavljeno število.
Koliko različnih štirimestnih števil lahko zapiše po tem pravilu?

*(6 točk)*

**B2.** Diagonala razdeli trapez na trikotnika, katerih ploščini sta v razmerju $5 : 7$. V kolikšnem razmerju sta ploščini likov, na katera srednjica razdeli ta trapez?

*(6 točk)*

**B3.** Določi vsa naravna števila $n$, za katera sta z izrazoma $2(n-3)(n+1)$ in $(n-2)(2n-1)$ podani zaporedni naravni števili.

*(6 točk)*

# 51. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

## Področno tekmovanje, 1. april 2015

## Rešitve za 7. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | A | A | E | D | C | A |

*Utemeljitve:*

**A1.** Z vrtenjem okrog točke $S$ za $90^\circ$ prvi lik preslikamo v drugega.

**A2.** Urna kazalca se prekrivata ob $12.00$, kot $180^\circ$ pa oklepata ob $6.00$ oziroma ob $18.00$. V $12$ urah se kazalca $11$-krat prekrivata in prav tolikokrat oklepata iztegnjeni kot. Kazalca se premikata s konstantno hitrostjo. Torej bo časovna razlika med položajema, ko se kazalca prekrivata med $8$. in $9$. uro oziroma oklepata kot $180^\circ$ enkrat med $14$. in $15$. uro enaka $6$ ur.

**A3.** Števila, ki so hkrati deljiva s $3$, $4$ in $5$, so deljiva s $60$. Med prvimi $500$ naravnimi števili je natanko $8$ večkratnikov števila $60$.

**A4.** Izračunajmo $\frac{1}{3} \cdot 246 - 9 \cdot (14 - 5) = 82 - 9 \cdot 9 = 1$.

**A5.** Praštevilski razcep je enak $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, torej je število $2015$ deljivo z $8$ naravnimi števili: $1$, $5$, $13$, $31$, $65$, $155$, $403$ in $2015$.

**A6.** Moštvo mora v desetih tekmah doseči najmanj $5$ zmag, če želi zbrati $15$ točk. S $5$ zmagami zbere $10$ točk, preostalih $5$ točk pa dobi s $5$ neodločenimi izidi.

**A7.** Prvi ulomek je enak $\frac{x}{\frac{1}{15}}$, drugi pa $\frac{\frac{7}{30}}{\frac{4}{75}}$. Ulomka izenačimo in dobimo enačbo $x \cdot \frac{4}{75} = \frac{1}{15} \cdot \frac{7}{30}$, katere rešitev je $\frac{7}{24}$.

**A8.** Stranica $c$ ter simetrali kotov $\alpha$ in $\beta$ določajo trikotnik, za katerega velja $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 100^\circ = 180^\circ$. Od tod sledi $\alpha + \beta = 160^\circ$ in $\gamma = 20^\circ$.

**B1.** Označimo notranji kot ob vrhu z $\gamma$, zunanji kot pa z $\gamma'$. Zapišemo enačbo $\frac{3}{5} \cdot \gamma' = 52° \, 6'$, katere rešitev je enaka $\gamma' = 86° \, 50'$. Velikost kota $\gamma$ je enaka $\gamma = 180° - \gamma' = 93° \, 10'$. Kota ob osnovnici sta skupaj velika $86° \, 50'$, torej velja $\alpha = \beta = 43° \, 25'$.

**Zapisana enačba $\frac{3}{5} \cdot \gamma' = 52° \, 6'$. ........................................ 1 točka**
**Rešitev enačbe $\gamma' = 86° \, 50'$. ........................................ 1 točka**
**Izračuna velikost kota $\gamma = 93° \, 10'$. ........................................ 2 točki**
**Sklep: $\alpha = \beta = 43° \, 25'$. ........................................ 2 točki**

**B2.** Iz naloge razberemo, da sta obe števili deljivi s $45$, torej sta deljivi s $5$ in $9$. Kar pomeni, da na mestu enic stoji števka $0$ ali $5$, vsota števk pa je deljiva z $9$. Število $270$ je edino, ki se konča z $0$ in je deljivo z $9$, saj je vsota števk enaka $9$. Trimestno število oblike $x70$ z vsoto števk $18$ ne obstaja. Podobno je število $675$ edino, ki se konča s $5$ in je deljivo z $9$. Iskana telefonska številka je torej $270\ 675$, saj mora biti prvo trimestno število manjše od drugega.

**Sklep, da morata biti obe števili deljivi s $5$ in $9$. ........................................ 1 točka**
**Upoštevanje kriterija za deljivost s $5$. ........................................ 1 točka**
**Upoštevanje kriterija za deljivost z $9$. ........................................ 1 točka**
**Sklep in utemeljitev, da sta $270$ in $675$ edini števili, ki ustrezata. .......... 2 točki**
**Sklep, da je iskana številka $270\ 675$. ........................................ 1 točka**

**B3.** Iskani ulomek označimo z $\frac{m}{n}$. Iz naloge razberemo, da morajo biti količniki $\frac{12}{35} : \frac{m}{n} = \frac{12n}{35m}$, $\frac{16}{15} : \frac{m}{n} = \frac{16n}{15m}$ in $\frac{8}{21} : \frac{m}{n} = \frac{8n}{21m}$ naravna števila. Ker iščemo največji ulomek, mora biti $m$ čim večje število, $n$ pa čim manjše. Števila $8$, $12$ in $16$ morajo biti deljiva z $m$, torej je $m = 4$, saj je njihov največji skupni delitelj. Število $n$ mora biti deljivo s $15$, $21$ in $35$, torej je $n = 105$, ker je njihov najmanjši skupni večkratnik. Ulomek, ki ga iščemo, je enak $\frac{4}{105}$.

**Ugotovitev, da mora biti $m$ čim večje število, $n$ pa čim manjše naravno število.**
**........................................ 1 točka**
**Ugotovitev, da je $m$ največji skupni delitelj števil $8$, $12$ in $16$. ............. 1 točka**
**Izračunano število $m$. ........................................ 1 točka**
**Ugotovitev, da je $n$ najmanjši skupni večkratnik števil $15$, $21$, in $35$. ...... 1 točka**
**Izračunano število $n$. ........................................ 1 točka**
**Zapis iskanega ulomka. ........................................ 1 točka**

**Opomba: Če tekmovalec poišče le najmanjši skupni imenovalec vseh treh ulomkov, prejme 1 točko.**

## Rešitve za 8. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | C | C | D | D | A | B | D |

*Utemeljitve:*

**A1.** Izračunajmo $\frac{1}{32} \cdot 2^{2015} = \frac{1}{2^5} \cdot 2^{2015} = 2^{2010}$

**A2.** Izračunajmo: $((((1-2)^{2015} - 4) - 5) + 6)(-5) - (-2)^4 + 2015^0 = ((-1)^{2015} - 4 - 5 + 6)(-5) - 16 + 1 = (-1-3)(-5) - 15 = (-4)(-5) - 15 = 20 - 5 = 5$.

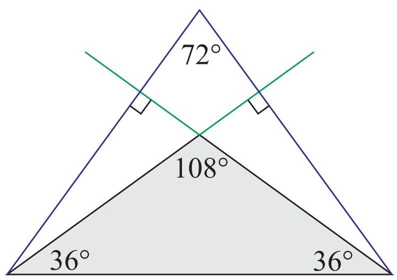
**A3.** Izračunajmo: $\sqrt{40^4 - 30^4} = \sqrt{4^4 \cdot 10^4 - 3^4 \cdot 10^4} = \sqrt{10^4(4^4 - 3^4)} = 10^2\sqrt{256-81} = 100\sqrt{25 \cdot 7} = 100 \cdot 5\sqrt{7} = 500\sqrt{7}$

**A4.** Kombinacija na ključavnici je petmestna. Za vsako mesto ima tri možnosti, torej je vseh možnih kombinacij $3^5 = 243$.

**A5.** Izračunamo vrednosti izraza za vsako od ponujenih rešitev. Po vrsti dobimo $67$, $83$, $101$, $121$ in $143$. Števili $121$ in $143$ nista praštevili, torej je rešitev $n = 10$.

**A6.** Ker je srednja števka aritmetična sredina prve in tretje števke, je njuna vsota zagotovo sodo število. Torej sta prva in tretja števka obe lihi ali obe sodi števili. Prvemu pogoju zadošča $25$ števil, drugemu pa $20$, saj na mestu stotic ne sme stati števka $0$. Torej pogojem naloge ustreza $45$ števil.

**A7.** Razberemo, da so notranji koti trikotnika veliki $\alpha$, $\alpha$ in $3\alpha$. Velja $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$ in $\alpha = 36°$. Torej je kot ob vrhu trikotnika velik $108°$, nosilki višin na kraka pa se sekata izven trikotnika. Nožišči višin, vrh trikotnika ter presečišče nosilk določajo deltoid z dvema pravima kotoma in enim notranjim kotom velikosti $108°$. Velikost iskanega kota je $72°$.




**A8.** Ker gre za enaki podražitvi v odstotkih, sta razmerji med drugo in začetno ceno ter končno in drugo ceno enaki. Razmerje med končno in začetno ceno pa je enako $1.44$, torej je razmerje med drugo in končno ceno enako $\sqrt{1.44} = 1.2$, kar pomeni, da sta bili obe podražitvi $20\ \%$.

**B1.** Izračunamo

$$\frac{\sqrt{3^{2015}}+1}{\sqrt{3^{2008}}}-\frac{2}{2\cdot 3^{1004}}=$$

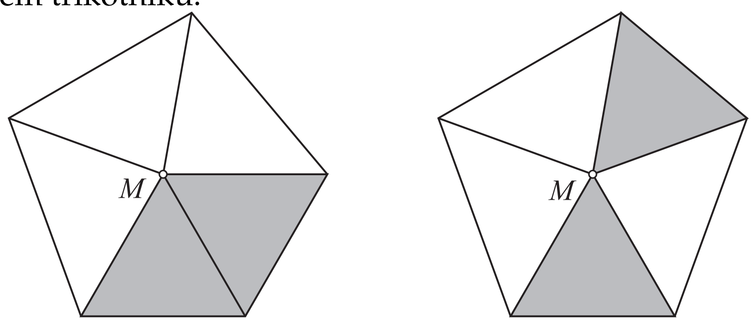
$$=\frac{\sqrt{3^{2015}}+1}{3^{1004}}-\frac{1}{3^{1004}}=\frac{\sqrt{3^{2015}}}{3^{1004}}=\sqrt{\frac{3^{2015}}{3^{2008}}}=\sqrt{3^7}=\sqrt{3^6\cdot 3}=27\sqrt{3}$$

**Izračunan imenovalec prvega ulomka:** $3^{1004}$**. ..................................1 točka**
**Krajšanje drugega ulomka:** $\frac{1}{3^{1004}}$**. ..........................................1 točka**
**Izračunana razlika:** $\frac{\sqrt{3^{2015}}}{3^{1004}}$**. ..................................................1 točka**
**Upoštevanje pravila za korenjenje ulomka in zapis:** $\sqrt{\frac{3^{2015}}{3^{2008}}}$**. ...............1 točka**
**Krajšanje korenjenca:** $\sqrt{3^7}$**. ................................................1 točka**
**Delno korenjenje:** $27\sqrt{3}$**. ..................................................1 točka**

**B2.** Po $6$ dneh od začetka bi vseh $18$ delavcev za dokončanje potrebovalo še $18$ dni, torej bi en delavec potreboval $324$ dni. Razberemo, da z delom nadaljuje le $12$ delavcev, kateri pa delo opravijo v $27$ dneh, saj je $\frac{324}{12}=27$. Upoštevamo še prvih $6$ dni, ko dela vseh $18$ delavcev in dobimo, da bo delo opravljeno v $33$ dneh.

**Ugotovitev, da vsi delavci za nedokončano delo potrebujejo** $18$ **dni. .....1 točka**
**Sklep, da bi en sam delavec to opravil v** $324$ **dneh. ......................1 točka**
**Ugotovitev, da z delom nadaljuje** $12$ **delavcev. ............................1 točka**
**Sklep, da preostalo delo** $12$ **delavcev opravi v** $27$ **dneh. ...................2 točki**
**Zapisana rešitev: Delo je bilo opravljeno v** $33$ **dneh. ....................1 točka**

**B3.** Točko $M$ povežemo z oglišči, kot zahteva naloga. Dobimo pet kotov z vrhom v točki $M$, ki so skupaj veliki $360°$. Dva kota sta velika $60°$, saj sta kota v dveh enakostraničnih trikotnikih, ostali trije pa so skladni. Velikost enega je enaka $\frac{1}{3}(360°-2\cdot 60°)=80°$. Ker so enakokraki trikotniki skladni, so daljice, ki povezujejo točko $M$ z oglišči, skladne. Torej je točka $M$ vrh enakokrakega trikotnika in kot ob vrhu je velik $80°$. Kota ob osnovnici sta velika $\frac{1}{2}(180°-80°)=50°$ in sta torej manjša od notranjega kota v enakostraničnem trikotniku.




**Ugotovitev, da je vsota vseh petih kotov z vrhom v točki** $M$ **enaka** $360°$**. .1 točka**
**Upoštevanje, da dva kota z vrhom v točki** $M$ **merita** $60°$**. ................1 točka**
**Izračun velikosti enega od preostalih treh kotov:** $80°$**. ....................1 točka**
**Ugotovitev, da je točka** $M$ **vrh enakokrakega trikotnika. ..................1 točka**

**Izračunani velikosti kotov ob osnovnic: $50^\circ$. ................................1 točka**
**Sklep, da je to najmanjši notranji kot v dobljenih trikotnikih. ............ 1 točka**

# Rešitve za 9. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | C | D | C | D | B | E | B |

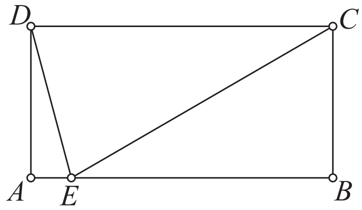
*Utemeljitve:*

**A1.** S Pitagorovim izrekom izračunamo dolžino hipotenuze: $c = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. Ploščina pravokotnega trikotnika je enaka: $p = \frac{ab}{2} = \frac{4\cdot 6}{2} = 12$ cm$^2$. Upoštevamo formulo za ploščino poljubnega trikotnika $p = \frac{cv_c}{2}$ in dobimo $v_c = \frac{2\cdot 12}{\sqrt{52}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm.

**A2.** Tomaž je pravilno odgovoril na $4$ vprašanja iz sklopa A, $12$ vprašanj iz sklopa B ter $3$ vprašanja iz sklopa C. Torej je pravilno odgovoril na $19$ vprašanj od $40$, kar predstavlja $47.5\ \%$.

**A3.** Označimo z $x$ število deklet oziroma fantov na začetku šolske ure. Po odhodu je ostalo $x-8$ deklet. Zapišemo enačbo $x = 2(x-8)$ z rešitvijo $x = 16$. Torej je bilo na začetku šolske ure skupaj $32$ deklet in fantov.

**A4.** Kot $\sphericalangle DEA$ je skladen s kotoma $\sphericalangle EDC$ in $\sphericalangle CED$, zato je trikotnik $CDE$ enakokrak z osnovnico $DE$ in velja $|CD| = |CE|$. Pravokotni trikotnik $EBC$ je polovica enakostraničnega trikotnika, saj velja $2|BC| = |CE|$. Torej je velikost kota $\sphericalangle BEC$ enaka 30°, velikost kota $\sphericalangle DEA$ pa je enaka 75°.




**A5.** Tri zaporedna liha števila lahko zapišemo kot $2n-1$, $2n+1$ in $2n+3$. Vsota njihovih kvadratov je enaka $4n^2-4n+1+4n^2+4n+1+4n^2+12n+9 = 12n^2+12n+11$. Od vsote odštejemo $5$ in izpostavimo $6$: $12n^2+12n+6 = 6(2n^2+2n+1)$, zato je izraz zagotovo deljiv s $6$.

**A6.** Polkroga s premeroma $BS$ in $AS$ sta skladna. Ploščina osenčenega območja je zato enaka razliki ploščin polkrogov s premeroma $AD$ in $AC$: $\frac{\pi(\frac{3}{4})^2}{2} - \frac{\pi(\frac{1}{4})^2}{2} = \frac{\pi}{4}$.

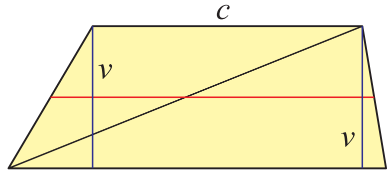
**A7.** Vemo, da je $m^2-n^2 = (m-n)(m+n)$. Število $2015$ zapišemo kot zmnožek dveh naravnih števil le na $4$ načine: $1\cdot 2015$, $5\cdot 403$, $13\cdot 155$ in $31\cdot 65$. Za vsakega izmed $4$ zmnožkov obstaja par naravnih števil $m$ in $n$, da je število $m-n$ enako prvemu, $m+n$ pa drugemu faktorju v naštetih zmnožkih.

**A8.** Iz prvega razmerja izrazimo $x = \frac{9y}{4}$ ter iz drugega $z = \frac{3y}{5}$. Razlika $x-y$ je enaka $\frac{5y}{4}$, razlika $y-z$ pa $\frac{2y}{5}$. Vrednost iskanega razmerja je $\frac{\frac{5y}{4}}{\frac{2y}{5}} = \frac{25}{8}$.

**B1.** Za prvo števko imamo štiri možnosti: $2$, $4$, $6$ in $8$. Za drugo števko imamo tudi štiri možnosti: $2$, $3$, $5$, $7$. Na tretjem mestu lahko stoji katerakoli izmed petih števk: $1$, $3$, $5$, $7$ in $9$. Števka na zadnjem mestu ima najmanj $3$ delitelje. Take števke so štiri: $4$, $6$, $8$ in $9$. Torej lahko na tak način sestavimo $320$ štirimestnih števil, saj je $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 320$.

**Naštete štiri možnosti za prvo mesto. .................................... 1 točka**
**Naštete štiri možnosti za drugo mesto. ...................................1 točka**
**Naštetih pet možnosti za tretje mesto. ....................................1 točka**
**Naštete štiri možnosti za zadnje mesto. ...................................1 točka**
**Sklep, da je vseh možnih števil $320$. ......................................2 točki**

**B2.** Upoštevamo razmerje ploščin obeh trikotnikov in dobimo $\frac{cv}{2} : \frac{av}{2} = 5 : 7$, kjer sta $a$ in $c$ osnovnici trapeza, $v$ pa njegova višina. Torej sta osnovnici trapeza v razmerju $a : c = 7 : 5$. Iz razmerja sklepamo, da je dolžina srednjice trapeza enaka $s = \frac{7t+5t}{2} = 6t$. Vemo, da srednjica razdeli trapez na dva trapeza z enakima višinama. Ploščina večjega je enaka $p_1 = \frac{a+s}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{7t+6t}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{13t}{4} \cdot v$, ploščina manjšega pa je enaka: $p_2 = \frac{s+c}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{6t+5t}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{11t}{4} \cdot v$. Iskano razmerje ploščin je enako $13 : 11$.




**Zapisano razmerje ploščin trikotnikov. .................................... 1 točka**
**Sklep, da sta osnovnici v razmerju $7 : 5$. ..................................1 točka**
**Ugotovitev, koliko je dolga srednjica trapeza. ............................ 1 točka**
**Izraženi ploščini obeh manjših trapezov. ...................................2 točki**
**Sklep, da je iskano razmerje ploščin enako $13 : 11$. .......................1 točka**

**B3.** Ker sta števili zaporedni, je razlika med njima enaka $1$. Recimo, da je prvo omenjeno število večje. Torej velja: $2(n-3)(n+1) - (n-2)(2n-1) = 1$. Odpravimo oklepaje in dobimo: $2n^2 - 4n - 6 - (2n^2 - 5n + 2) = 1$ oziroma $n - 8 = 1$. Rešitev te enačbe je $n = 9$. Druga možnost je, da je drugo število večje, zato velja enačba: $(n-2)(2n-1) - 2(n-3)(n+1) = 1$. Po odpravljanju oklepajev dobimo $2n^2 - 5n + 2 - (2n^2 - 4n - 6) = 1$ oziroma $-n + 8 = 1$. Tej enačbi ustreza $n = 7$.

**Ugotovitev, da je razlika med iskanima številoma enaka $1$. ................1 točka**
**Zapisana prva enačba, recimo: $2(n-3)(n+1) - (n-2)(2n-1) = 1$. .....1 točka**
**Rešitev enačbe: $n = 9$. ...................................................2 točki**
**Zapisana druga enačba: $(n-2)(2n-1) - 2(n-3)(n+1) = 1$. ............1 točka**
**Rešitev enačbe: $n = 7$. ................................................... 1 točka**