Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

dMFA

49. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Področno tekmovanje, 4. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA SEDMI RAZRED

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. S katerim od naštetih števil ni deljiva razlika $(200013 - 2013)$?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 11

A2. Na štirih lističih so zapisana števila 2, 4, 13 in 19. Na hrbtnih straneh lističev pa različne trditve: »večje od 15«, »praštevilo«, »večkratnik števila 5«, »liho število«. Noben zapis ne ustreza številu, ki je zapisano na drugi strani lističa. Katero število je napisano na lističu z napisom »večkratnik števila 5«?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 13
(**D**) 19 (**E**) nemogoče je določiti

A3. Predviden čas pohoda je 4 h 20 minut v enakomernem tempu. Pohodniki so na poti že $\frac{3}{5}$ časa. Koliko časa jim še ostane do $\frac{3}{4}$ predvidenega časa?

(**A**) 39 minut (**B**) 40 minut (**C**) 35 minut (**D**) 41 minut (**E**) pol ure

A4. V škatli so čokoladni, vanilijevi in orehovi piškoti. Četrtina piškotov je čokoladnih, $\frac{1}{3}$ vanilijevih, preostalih 15 piškotov pa je orehovih. Koliko piškotov je v škatli?

(**A**) 20 (**B**) 24 (**C**) 36 (**D**) 48 (**E**) 60

A5. Med katerima ulomkoma je po velikosti število 0.2013?

(**A**) med 0 in $\frac{1}{10}$ (**B**) med $\frac{1}{10}$ in $\frac{1}{5}$ (**C**) med $\frac{1}{5}$ in $\frac{1}{4}$ (**D**) med $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{3}$ (**E**) med $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$

A6. V nizu ponavljajočih se znakov $6xyzt166xyzt166xyzt166xyz\ldots$, kjer so x, y, z in t med seboj različne števke, na 2013. mestu stoji števka 5. Kateri znak je enak 5?

(**A**) x (**B**) y (**C**) z
(**D**) t (**E**) nemogoče je določiti

A7. Velikost kota pri vrhu enakokrakega trikotnika je $70°$. Koliko je velik kot med simetralo notranjega kota ob osnovnici in simetralo zunanjega kota ob vrhu trikotnika?

(**A**) $27°30'$ (**B**) $55°$ (**C**) $62°30'$ (**D**) $90°$ (**E**) $117°30'$

A8. Neko število je zmnožek treh različnih praštevil. Koliko deliteljev tega števila je sestavljenih?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 7

B1. Izračunaj vrednost izraza:

$$\frac{2\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}+4\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{9}:4\right).$$

(6 točk)

B2. Točki D in E ležita na osnovnici AB enakokrakega trikotnika ABC. Točka D leži med točkama A in E. Trikotnik CDE je enakokrak z osnovnico DE. Kot $\sphericalangle ABC$ je velik 52°, kot $\sphericalangle ACE$ pa 58°. Izračunaj velikosti kotov trikotnika CDE.

(6 točk)

B3. Številu a prištejemo četrtino njegove vrednosti. K rezultatu prištejemo petino vrednosti rezultata. Če k novemu rezultatu prištejemo še šestino vrednosti novega rezultata, dobimo število, ki je za 111 večje od prvotnega števila a. Kolikšno je število a?

(6 točk)

49. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Področno tekmovanje, 4. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA OSMI RAZRED

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Za katero vrednost realnega števila x velja enakost $\sqrt{(2013-\sqrt{2012})^2}-(x-\sqrt{2012})=1$?

(**A**) $\sqrt{2012}$ (**B**) 2012 (**C**) $\sqrt{2013}$
(**D**) 2013 (**E**) nič od naštetega

A2. Razmerje med velikostma največjega in najmanjšega kota pravokotnega trikotnika je enako $6:1$. Koliko je velik srednji kot po velikosti?

(**A**) $15°$ (**B**) $30°$ (**C**) $60°$ (**D**) $75°$ (**E**) $90°$

A3. Število $2^5\cdot 8^3\cdot 16^2$ zapišemo kot potenco z osnovo 4. Kolikšen je eksponent te potence?

(**A**) 12 (**B**) 11 (**C**) 10 (**D**) 20 (**E**) 22

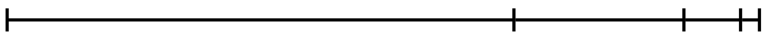
A4. Kolikšna je vrednost izraza $\left(\left(\left(\left(\left((-1)^{n+3}\right)^{2-n}\right)^{n}\right)^{n-1}\right)^{2}\right)^{2013}$ za poljubno naravno število n?

(**A**) -2013 (**B**) -1 (**C**) 1 (**D**) $2n+2019$ (**E**) 2013

A5. V 420 g slane vode je 20 % soli. Čez čas izhlapi 120 g vode. Koliko odstotna je tedaj raztopina?

(**A**) 24 % (**B**) 25 % (**C**) 28 % (**D**) 30 % (**E**) 32 %

A6. Vrvico smo razrezali na 4 različno dolge dele.



Dolžina posameznega dela je enaka trikratniku dolžine naslednjega. Kolikšen del celotne vrvice predstavlja najdaljši del?

(**A**) $\frac{27}{40}$ (**B**) $\frac{9}{13}$ (**C**) $\frac{1}{3}$ (**D**) $\frac{1}{9}$ (**E**) $\frac{2}{5}$

A7. V ravno vrsto postavimo 39 figuric tako, da je natanko vsaka tretja figurica ženska. Natanko vsaka druga moška figurica nosi kapo. Natanko vsaka peta figurica v vrsti pa se smehlja. Koliko moških figuric ima kapo in se smehlja?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

A8. Za naravni števili a in b velja $3^2+4^2+5^2+12^2=a^2+b^2$. Kolikšna je vrednost vsote $(a+b)$?

(**A**) 9 (**B**) 15 (**C**) 17 (**D**) 18 (**E**) 24

B1. Izračunaj vrednost izraza:

$$\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}-\sqrt{\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}:4-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}}}.$$

(6 točk)

B2. Dan je trikotnik ABC, katerega merska števila dolžin stranic so tri zaporedna naravna števila. Točka P je razpolovišče najdaljše stranice BC. Simetrala kota $\sphericalangle ACB$ je pravokotna na daljico AP. Izračunaj dolžine stranic trikotnika ABC.

(6 točk)

B3. Če se vsi učenci 8. razredov razdelijo v skupine po 4, ostaneta 2. Če pa se razdelijo v skupine po 5, ostanejo 3. V generaciji 8. razredov je 45 deklic in najmanj $\frac{1}{3}$ generacije so dečki. Koliko dečkov je v generaciji, če jih je manj kot deklic? Odgovor utemelji.

(6 točk)

49. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje
Področno tekmovanje, 4. april 2013

Prilepi nalepko s šifro

NALOGE ZA DEVETI RAZRED

Čas reševanja: 120 minut. V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za nepravilni odgovor pol točke odšteli. Odgovore sklopa A vpiši v levo tabelo.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8

B1	B2	B3

A1. Katero število reši enačbo $\frac{3}{1-\frac{2}{x}} = 3x$?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 0
(**E**) nobeno izmed naštetih

A2. Kolikšna je vrednost izraza $\frac{6^{23}-6^{22}+6^{21}-6^{20}}{2^{23}-2^{22}+2^{21}-2^{20}}$?

(**A**) 3 (**B**) 9 (**C**) $31 \cdot 3^{20}$ (**D**) $37 \cdot 3^{20}$ (**E**) 0

A3. Diagonala kvadrata je dolga $(2+\sqrt{2})$ cm. Koliko je ploščina kvadrata?

(**A**) $\sqrt{2}$ cm^2 (**B**) 2 cm^2 (**C**) $(3+2\sqrt{2})$ cm^2
(**D**) 6 cm^2 (**E**) $(6+4\sqrt{2})$ cm^2

A4. Operacija $\otimes$ je definirana s predpisom $x \otimes y = x^2 - 3xy$, kjer sta x in y celi števili. Koliko je $(2 \otimes 1) \otimes (1 \otimes 2)$?

(**A**) 34 (**B**) 1 (**C**) 0 (**D**) -13 (**E**) -26

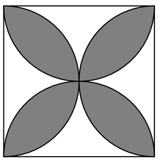
A5. Enakostranični trikotnik in pravilni šestkotnik imata enak obseg. Kolikšno je razmerje ploščin trikotnika in šestkotnika?

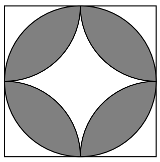
(**A**) $1:1$ (**B**) $1:1.5$ (**C**) $1:2$ (**D**) $1:\sqrt{3}$ (**E**) $1:3$

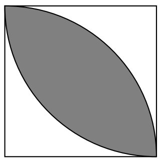
A6. Sveže posekano deblo ima maso 600 kg in vsebuje $60\ \%$ vlage. Po sušenju je v deblu še $4\ \%$ vlage. Koliko je masa posušenega debla?

(**A**) 240 kg (**B**) 360 kg (**C**) 230.4 kg (**D**) 249.6 kg (**E**) 250 kg

A7. V kvadrat smo včrtali like na tri načine. Na kateri sliki je osenčen največji del kvadrata?


Slika 1


Slika 2


Slika 3

(**A**) na sliki 1
(**B**) na sliki 2
(**C**) na sliki 3
(**D**) vsi osenčeni deli imajo enako ploščino
(**E**) nemogoče je določiti

A8. Na tabli je zapisanih 6 zaporednih naravnih števil. Če eno izbrišemo, bo vsota ostalih števil enaka 2013. Kolikšna je vsota števk izbrisanega števila?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

B1. Anja, Blaž in Manca so naročeni na enak paket storitev pri mobilnem operaterju. Vsi trije plačujejo naročnino, poleg tega pa za vsako minuto pogovora določen znesek. Aprila je imela Manca 50 % popusta na naročnino. Anja je v tem mesecu govorila 10 minut in z naročnino vred plačala 13.20 EUR. Blaž je v istem mesecu govoril 18 minut in z naročnino vred plačal 14.16 EUR. Koliko je aprila plačala Manca, ki je govorila 1 uro?

(6 točk)

B2. V trikotniku ABC velja $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Težiščnica na stranico AB razdeli trikotnik na dva enakokraka trikotnika z osnovnico AC oz. BC in seka stranico AB v točki D. Daljica CD je dolga 5 cm. Izračunaj dolžine stranic trikotnika ABC.

(6 točk)

B3. Poišči vse rešitve enačbe

$$2013 - 4 \cdot |x^2 - 13| = 1986.$$

(6 točk)

49. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Področno tekmovanje, 4. april 2013

Rešitve za 7. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
D	D	A	C	C	C	A	C

Utemeljitve:

A1. Razlika je 198000 in je deljiva z 2, 3, 5 in 11. Število 7 ne deli te razlike.

A2. »Praštevilo« je zapisano na lističu s številom 4. Napis »liho število« ustreza lističu s številom 2. Listič s številom 13 ima na hrbtni strani napis »večje od 15«. Rešitev je število 19.

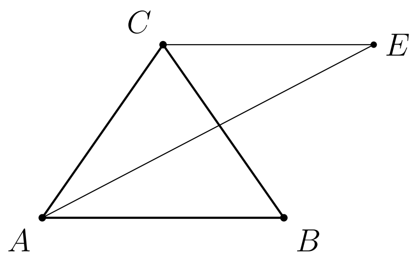
A3. $\frac{3}{5}$ predvidenega časa je 156 minut, $\frac{3}{4}$ pa 195. Razlika je 39 minut.

A4. Čokoladnih in vanilijevih piškotov je $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$. Preostalih $\frac{5}{12}$ je orehovih. Vseh piškotov je $(15 : 5) \cdot 12 = 36$.

A5. Vse ulomke zapišemo z decimalnim zapisom: $\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ in $\frac{1}{2} = 0.5$ ter vidimo, da število 0.2013 leži med $\frac{1}{5}$ in $\frac{1}{4}$.

A6. Dolžina minimalnega ponavljajočega vzorca je 7. Števka 5 stoji na 4. mestu, saj je $2013 = 287 \cdot 7 + 4$. Torej je rešitev z.

A7. Notranji kot ob osnovnici $\sphericalangle BAC$ meri $(180° - 70°) : 2 = 55°$, zato kot $\sphericalangle EAC$ meri $27.5°$, kjer je točka E presečišče obeh simetral. Zunanji kot ob vrhu meri $110°$. Torej kot $\sphericalangle ACE$ meri $70° + 55° = 125°$. Kot $\sphericalangle CEA$ meri $180° - 125° - 27.5° = 27.5°$.



A8. Produkt treh različnih praštevil je enak $p \cdot q \cdot r$. Štiri sestavljena števila, ki delijo ta produkt so: $p \cdot q$, $p \cdot r$, $q \cdot r$ in $p \cdot q \cdot r$

B1.

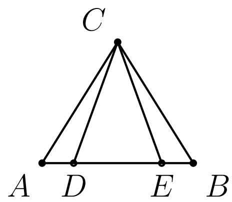
$$\frac{2\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}+4\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{9}:4\right)=\frac{\frac{11}{5}}{1+\frac{2}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}+\frac{9}{2}\cdot\left(\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{36}\right)=$$

$$=\frac{\frac{11}{5}}{1+\frac{2}{1+\frac{2}{3}}}+\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{36}\right)=\frac{\frac{11}{5}}{1+\frac{2}{\frac{5}{3}}}+\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{36}-\frac{1}{36}\right)=\frac{\frac{11}{5}}{1+\frac{6}{5}}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{9}=$$

$$=\frac{\frac{11}{5}}{\frac{11}{5}}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$$

Izračunan imenovalec ulomka v imenovalcu prvega člena $\frac{5}{3}$ **.............. 1 točka**
Izračunan imenovalec prvega člena $\frac{11}{5}$ **.................................. 1 točka**
Vrednost prvega ulomka 1 **.. 1 točka**
Izračunana vrednost v oklepaju drugega člena $\frac{1}{9}$ **........................ 1 točka**
Vrednost drugega šlena $\frac{1}{2}$ **.. 1 točka**
Rezultat: $1\frac{1}{2}$ **.. 1 točka**

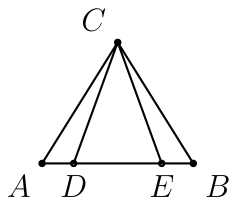
B2. 1. način



V enakokrakem trikotniku ABC merijo koti $\alpha=\beta=52^\circ$ in $\gamma=180^\circ-2\cdot52^\circ=76^\circ$. Kot $\sphericalangle ECB$ meri $\gamma-58^\circ=18^\circ$. Trikotnika ADC in BEC sta skladna, zato tudi kot $\sphericalangle ACD$ meri 18°. Torej kot $\sphericalangle DCE$ meri $58^\circ-18^\circ=40^\circ$. Od tod izračunamo še kota ob osnovnici DE, ki merita $(180^\circ-40^\circ):2=70^\circ$.

Upoštevanje $\gamma=180^\circ-2\cdot\alpha$ **.. 1 točka**
Izračunan kot $\gamma=76^\circ$ **.. 1 točka**
Ugotovitev, da kot $\sphericalangle ECB$ **meri** 18° **................................ 1 točka**
Sklep, da je $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCE$ **ter izračunan kot** $\sphericalangle DCE=40^\circ$ **.............. 2 točki**
Izračunana kota $\sphericalangle EDC=\sphericalangle CED=70^\circ$ **.............................. 1 točka**

2. način



V enakokrakem trikotniku ABC merijo koti $\alpha=\beta=52^\circ$ in $\gamma=180^\circ-2\cdot52^\circ=76^\circ$. Kot $\sphericalangle ECB$ meri $\gamma-58^\circ=18^\circ$. Kot $\sphericalangle DEC$ meri $52^\circ+18^\circ=70^\circ$, prav toliko meri tudi kot $\sphericalangle EDC$. Izračunamo še kot $\sphericalangle DCE=180^\circ-2\cdot70^\circ=40^\circ$.

Upoštevanje $\gamma=180^\circ-2\cdot\alpha$ **.. 1 točka**
Izračunan kot $\gamma=76^\circ$ **.. 1 točka**
Ugotovitev, da kot $\sphericalangle ECB$ **meri** 18° **................................ 1 točka**
Izračunan kot $\sphericalangle DEC=70^\circ$ **.. 1 točka**
Upoštevanje $\sphericalangle EDC=\sphericalangle DEC=70^\circ$ **............................. 1 točka**
Izračunan kot $\sphericalangle DCE=40^\circ$ **.. 1 točka**

B3. Število a povečamo za četrtino a in dobimo $\frac{5a}{4}$. Novo število povečamo za petino ter dobimo število $\frac{5a}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{6a}{4}=\frac{3a}{2}$. Povečamo ga še za šestino in dobimo $\frac{3a}{2}\cdot\frac{7}{6}=\frac{7a}{4}$.

Razlika med zadnjim dobljenim številom in številom a je $\frac{3a}{4}$ in je enaka 111. Torej je prvotno število enako $(111 : 3) \cdot 4 = 148$.

Povečano število za četrtino je enako $\frac{5a}{4}$ .... 1 točka
Novo število povečano za petino je enako $\frac{6a}{4} = \frac{3a}{2}$ .... 1 točka
Novo število povečano za šestino je enako $\frac{7a}{4}$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je končno število za $\frac{3a}{4}$ večje od prvotnega .... 2 točki
Izračunano prvotno število 148. .... 1 točka

Rešitve za 8. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	B	C	C	A	C	D

Utemeljitve:

A1. Poenostavimo levo stran enačbe in dobimo $2013 - \sqrt{2012} - x + \sqrt{2012} = 1$. Od tod razberemo rešitev $x = 2012$.
ali
Enačbo reši število 2012: $\sqrt{(2013 - \sqrt{2012})^2} - (2012 - \sqrt{2012}) = 2013 - \sqrt{2012} - 2012 + \sqrt{2012} = 1$.

A2. Najmanjši kot meri $90^\circ : 6 = 15^\circ$, torej meri srednji kot 75°.

A3. Izračunajmo $2^5 \cdot 8^3 \cdot 16^2 = 2^5 \cdot (2^3)^3 \cdot (2^4)^2 = 2^{22} = (2^2)^{11} = 4^{11}$·. Torej je eksponent 11.

A4. Produkt eksponentov je sodo število, saj v njem nastopa faktor 2. Sode potence števila -1 so enake 1.

A5. V začetni raztopini je 84 g soli in 336 g vode. Masa končne raztopine je 300 g in vsebuje $\frac{84}{300} \cdot 100\% = 28\%$ soli.

A6. Dolžina najkrajšega delčka je a. Del pred njim je dolg $3a$, njegov predhodnik pa $9a$. Najdaljši delček je dolg $27a$. Dolžina celotne vrvice je $40a$, zato je iskano razmerje enako $\frac{27}{40}$.

A7. Ženskih figuric je $\frac{1}{3}$, prav tako moških brez kape in moških s kapo. Prva figurica v vrsti, ki se smehlja, je moška s kapo. Vseh figuric v vrsti, ki se smehljajo je 7. Torej so 3 moške figurice s kapo, ki se smehljajo.

A8. Zapišemo $(3^2 + 4^2) + (5^2 + 12^2) = 5^2 + 13^2$. Vrednost vsote je enaka 18.

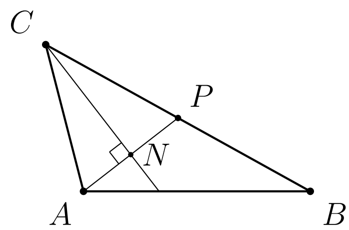
B1.

$$\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}-\sqrt{\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}:4-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}}-\sqrt{\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{36}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}}-\sqrt{\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{36}-\frac{5}{36}}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{2}{1}}}-\sqrt{\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{9}}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{3}}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$$

Izračunan imenovalec ulomka v imenovalcu prvega člena 1. .... 1 točka
Izračunana vrednost prvega korenjenca $\frac{1}{4}$ .... 1 točka
Vrednost imenovalca v drugem členu $-\frac{1}{9}$ .... 1 točka
Izračunana vrednost drugega korenjenca $\frac{9}{4}$ .... 1 točka
Vrednosti obeh korenov in rezultat $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$ .... 2 točki

B2. Označimo z N presečišče simetrale kota $\sphericalangle ACB$ in daljice AP. Trikotnika ANC inPNC sta skladna, ker imata skladna dva kota in skupno stranico. Zato sta skladni daljici AC in PC. Ker je točka P razpolovišče, velja $BC = 2\cdot AC$. Torej je ena dolžina stranice dvakrat daljša od druge. Ker gre za tri zaporedna naravna števila n, $n+1$, $n+2$, imamo naslednje možnosti:



- $n+2 = 2n$, torej je $n = 2$; stranice trikotnika pa so 2, 3 in 4.
- $n+2 = 2(n+1)$, torej je $n = 0$; stranica trikotnika ne more biti enaka 0.

Ugotovitev, da sta trikotnika ANC in PNC skladna .... 1 točka
Sklep, da sta stranici AC in PC skladni .... 1 točka
Sklep, da je stranica BC dvakrat daljše od stranice AC .... 1 točka
Izračunan $n = 2$ iz zveze $n+2 = 2n$ .... 1 točka
Izločitev možnosti $n+2 = 2(n+1)$ .... 1 točka
Rešitev: Dolžine stranic so 2, 3 in 4 .... 1 točka

Opomba: Za uganjeno rešitev brez utemeljitve dobi tekmovalec 1 točko.

Če tekmovalec dokaže, da v trikotniku s stranicami 2, 3, 4, velja: "Če sta daljici AP in CN pravokotni, potem je stranica BC dvakrat daljša od stranice AC."dobi 3 točke po točkovniku (skladnost trikotnikov in daljic ter razmerje stranic). Merjenje ni korektna rešitev.

Za sklep, da je trikotnik s stranicami 2, 3, 4, edini trikotnik, katerega stranice so tri zaporedna naravna števila z lastnostjo $BC = 2\cdot AC$, dobi tekmovalec 2 točki.

B3. Skupno število vseh učencev je sodo število, ki ni deljivo s 4 in pri deljenju s 5 da ostanek 3. Vemo, da je število zagotovo manjše od 90 in večje od 67. V poštev pride samo 78, torej je dečkov 33.

Ugotovitev, da je skupno število učencev manjše od 90 .... 1 točka
Sklep, da je število učencev večje od 67 .... 1 točka
Ugotovitev, da je število učencev sodo število, ki ni deljivo s 4 .... 1 točka
Ugotovitev, da število učencev pri deljenju s 5 da ostanek 3 .... 1 točka
Sklep, da je edino ustrezno število 78 .... 1 točka
Odgovor: Dečkov je 33. .... 1 točka

Opomba: Tekmovalec lahko reši nalogo tudi drugače, tako da preveri vsa števila do 90. Če na ustrezen način utemelji, da je število vseh učencev 78 ter pravilno odgovori, da je dečkov 33, lahko dobi vse točke.

Samo z ugibanjem, brez utemeljitve, dobi tekmovalec največ 2 točki.

Rešitve za 9. razred

V sklopu A bo pravilni odgovor ovrednoten z dvema točkama, medtem ko za obkroženi nepravilni odgovor eno točko odštejemo. Da bi se izognili morebitnemu negativnemu končnemu dosežku, se vsakemu tekmovalcu prizna začetne 4 točke.

1	2	3	4	5	6	7	8
C	D	C	E	B	E	D	C

Utemeljitve:

A1. Enačbo reši število 3: $\frac{3}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 3$

A2. Izpostavimo in izračunamo: $\frac{6^{23}-6^{22}+6^{21}-6^{20}}{2^{23}-2^{22}+2^{21}-2^{20}} = \frac{6^{20}(6^3-6^2+6-1)}{2^{20}(2^3-2^2+2-1)} = 37 \cdot 3^{20}$

A3. Izračunajmo stranico kvadrata: $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$ cm. Ploščina meri: $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ cm^2.

A4. Izračunajmo: $2 \otimes 1 = 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -2$, $1 \otimes 2 = 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 = -5$, $(-2) \otimes (-5) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) \cdot (-5) = -26$

A5. Stranica enakostraničnega trikotnika je enaka $2a$, šestkotnika pa a. Ploščina trikotnika je enaka $\frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$, ploščina šestkotnika pa $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. Razmerje ploščin je enako $1 : 1.5$.

A6. Masa ostalih snovi v svežem deblu je 40% od 600 kg $= 240$ kg, ki pa v sušenem deblu predstavljajo 96% celotne teže. Sušeno deblo tehta $240 : 0.96 = 250$ kg.

A7. Lik 1 in Lik 2 sta skladna, ker sta oba sestavljena iz 4 skladnih delov. Lik 3 je četrtina Lika 1 povečana v razmerju $1 : 2$. Njegova ploščina je 4-krat večja od četrtine Lika 1, torej je enaka ploščini Lika 1 (ali Lika 2).

A8. Povprečna vrednost preostalih petih števil je $2013 : 5 = 402.6$. Če bi izbrisali najmanjše oz. največje število, bi bila povprečna vrednost enaka srednjemu številu. Sklepamo, da so tri števila večja od 402, dve pa sta manjši. Torej velja $2013 = 400 + 401 + 403 + 404 + 405$. Vsota števk izbrisanega števila je enaka 6.

B1. 1. način (uporaba linearne funkcije)

Št. minut pogovora	Skupen znesek (poraba in naročnina) v EUR
10	13.20
18	14.16

$x\ldots$ število minut pogovora
$y\ldots$ skupen znesek z naročnino vred
$k\ldots$ cena minute pogovora
$n\ldots$ višina naročnine
$k=\frac{14.16-13.20}{18-10}=\frac{0.96}{8}=0.12$ EUR/min

Iz enačbe za skupen znesek $y=0.12x+n$ izračunamo višino naročnine $n=13.20-0.12\cdot 10=12$ EUR, s 50% popustom 6 EUR

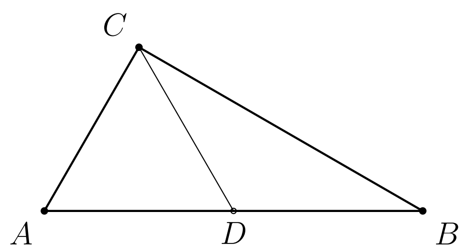
Manca je plačala $0.12\cdot 60+6=13.20$ EUR.

Izračunana cena minute pogovora 0.12 **EUR/min .... 2 točki**
Zapisana zveza za višino skupnega zneska .... 1 točka
Izračunan znesek naročnine 12 **EUR oziroma** 6 **EUR .... 2 točki**
Odgovor: Manca je plačala 13.20 **EUR .... 1 točka**

2. način (sistem dveh enačb)
$x\ldots$ cena minute pogovora
$y\ldots$ višina naročnine
Zapišemo enačbi: $13.20=10x+y$ in $14.16=18x+y$. Enačbi odštejemo in dobimo $8x=0.96$. Cena minute pogovora je enaka $x=\frac{0.96}{8}=0.12$ EUR. Višina naročnine je enaka $y=13.20-0.12\cdot 10=12$ EUR, s 50% popustom 6 EUR. Manca je plačala $0.12\cdot 60+6=13.20$ EUR.

Zapisani obe enačbi $13.20=10x+y$ **in** $14.16=18x+y$ **..................... 2 točki**
Izračunana cene minute pogovora 0.12 **EUR/min .... 1 točkai**
Izračunan znesek naročnine 12 **EUR oziroma** 6 **EUR .... 2 točki**
Odgovor: Manca je plačala 13.20 **EUR .... 1 točka**

B2. Stranica c meri 10 cm, saj je trikotnik ADC enakokrak z osnovnico AC in je dolžina AD enaka dolžini DC. Trikotnik ADC je celo enakostraničen, saj je enakokrak z enim kotom $60°$. Torej je dolžina stranice $b=5$ cm. Kot $\sphericalangle BDA$ meri $180°-60°=120°$. Upoštevamo, da je trikotnik BDC enakokrak z osnovnico BC in izračunamo $\beta=30°$. Od tod sledi, da je trikotnik ABC pravokoten s pravim kotom v oglišču C. Po Pitagorovem izreku izračunamo $a=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$ cm.



Ugotovitev: $|AD|=|DC|$ **ter izračunana stranica** $c=10$ **cm .... 1 točka**
Ugotovitev, da je trikotnik ADC **enakostraničen .... 1 točka**
Sklep: Stranica b **meri** 5 **cm .... 1 točka**

Ugotovitev, da je trikotnik ABC pravokoten .... 2 točki
Izračunana stranica $a = 5\sqrt{3}$ cm .... 1 točka

B3. Enačbo preoblikujemo v $|x^2 - 13| = \frac{27}{4}$. Leva stran enačbe je lahko enaka $\frac{27}{4}$ ali $-\frac{27}{4}$. Ob upoštevanju pozitivne vrednosti dobimo $x^2 = \frac{79}{4}$. Rešitvi sta $x = \pm\frac{\sqrt{79}}{2}$. Če upoštevamo negativno vrednost, dobimo $x^2 = \frac{25}{4}$. Rešitvi sta $x = \pm\frac{5}{2} = \pm 2.5$.

Poenostavitev enačbe $|x^2 - 13| = \frac{27}{4}$ .... 1 točka
Odprava absolutne vrednosti in upoštevanje $x^2 - 13 = \frac{27}{4}$ .... 1 točka
Izračunani prvi dve rešitvi $x = \pm\frac{\sqrt{79}}{2}$ .... 2 točki*
Upoštevanje negativne vrednosti $x^2 - 13 = -\frac{27}{4}$ .... 1 točka
Izračunani drugi dve rešitv $x = \pm\frac{5}{2} = \pm 2.5$ .... 1 točka*

Opomba: Če tekmovalec poda samo pozitivni rešitvi, dobi največ 5 točk.