

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na www.dmfa.si), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

NALOGE ZA SEDMI RAZRED

N1	N2	N3	N4	N5

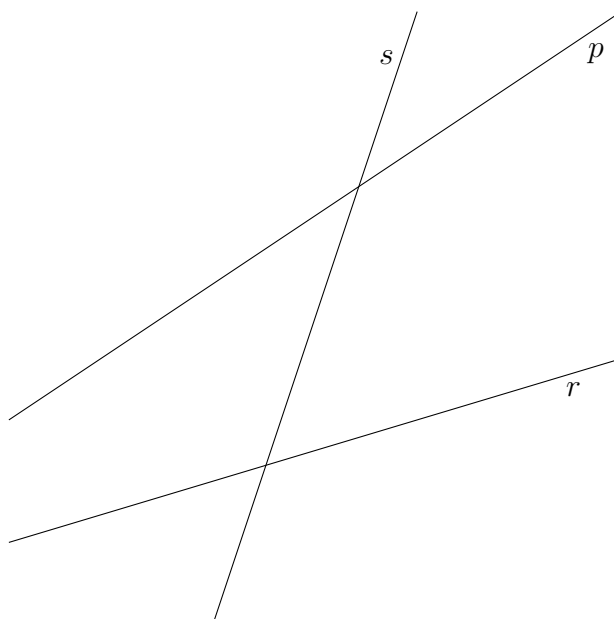
Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

- V novi hiši moramo iz kleti v pritličje premostiti 1.47 m, iz pritličja v prvo nadstropje 2.52 m in iz prvega nadstropja na podstrešje 2.10 m višinske razlike. Postavili bomo stopnice enake višine na vseh nivojih. Koliko naj bo višina vsake stopnice, da bo potrebnih čimmanj stopnic? (Višina stopnice v cm mora biti celo število.)
- V trikotniku ABC meri razlika kotov ob stranici AB 90° . Simetrala notranjega kota ob oglišču C seka nosilko stranice AB v točki M , simetrala zunanjega kota ob oglišču C pa jo seka v točki N . Dokaži, da sta daljici CM in CN enako dolgi.
- Branjevka je prvi dan prodala 30% krompirja. Drugi dan je prodala $\frac{4}{7}$ ostanka. Za tretji dan ji je ostalo 200 kg krompirja manj od prodanega v prvih dveh dneh. Koliko krompirja je imela na začetku?
- Lina je vsaki črki abecede priredila drugo naravno število. Nato je za zapisane besede (v tabeli) izračunala produkt števil, ki pripadajo črkam v besedi. Dobila je naslednje vrednosti besed:

GNU	33
VENA	56
ANA	49
GOS	440

Kakšno vrednost bi po tem sistemu dobila beseda VEGA?

- Dane so tri premice p , r in s , kot kaže slika. Na premici p poišči tako točko P , na premici r pa tako točko R , da bosta ležali zrcalno glede na premico s . Konstrukcijo opiši.



NALOGE ZA OSMI RAZRED

N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Za naravna števila a, b, c in d velja: $a < b, c < d$ in $d < a$. Vstavi $<, >$ ali $=$ v narisane okvirčke, da dobiš pravilne trditve.

$$\frac{c}{d} \square \frac{c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \square \frac{d}{b}$$

$$\frac{c}{a} + \frac{d}{a} \square \frac{c}{a} + \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} \cdot b \square \frac{c}{b} : c$$

$$\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \square 1$$

$$\frac{a}{b} \square \frac{a}{d} \square \frac{a}{c}$$

$$a \cdot b \square c \cdot d$$

$$b - c \square a - d$$

$$\frac{a}{b} \square \frac{b}{a}$$

2. Črpalka A napolni vodni rezervoar v 4 urah, črpalka B v 6 urah. Ob 8. uri vključimo obe črpalke hkrati. Po eni uri delovanja se črpalka B pokvari, A pa še naprej deluje nemoteno. Po enournem popravilu spet normalno deluje tudi črpalka B . Ob kateri uri (na minuto natančno) je rezervoar poln?

3. Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

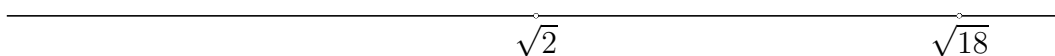
4. Nariši ostrokotni trikotnik s podatki $v_a = 3.5$ cm, $b = 4$ cm, polmer trikotniku očrtane krožnice pa meri 3 cm. Konstrukcijo opiši.
5. V 3 posodah so bile mešanice soka in vode. V prvi posodi je bilo 30% soka, v drugi 10% in v tretji 40%. Vse skupaj smo prelili v 4. posodo, tako da smo dobili 20 litrov tekočine, v kateri je 78% vode. Izračunaj, koliko tekočine je bilo v vsaki posodi, če je bilo v prvi posodi 2.5 krat toliko tekočine kot v tretji.

NALOGE ZA DEVETI RAZRED

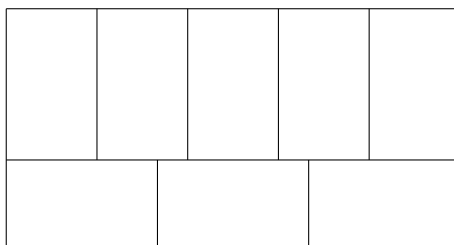
N1	N2	N3	N4	N5

Čas reševanja: 120 minut. Vsaka naloga je vredna 10 točk.

1. Na številski premici sta označeni točki, ki predstavljata števili $\sqrt{2}$ in $\sqrt{18}$. Natančno načrtaj še točki, ki pripadata številoma 0 in $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Načrtovanje opiši.



2. Razlika kvadratov dveh naravnih števil je 167-krat tolikšna kot razlika teh dveh naravnih števil. Če večje število delimo z manjšim, dobimo ostanek 15. Izračunaj obe števili.
3. Iz središča osnovne ploskve 12 m dolgega in 9 m širokega zabojnika v obliki kvadra poteka jeklena vrv do enega oglišča na zgornji ploskvi. Ob 11.00 začne v zabojnik enakomerno pritekati voda. Ob 12.00 je suhe še 6.8 metra jeklene vrvi. Do roba se napolni zabojnik natanko ob 16. uri. Izračunaj hitrost pritekanja vode v $\frac{m^3}{h}$.
4. V neki restavraciji na mize razpostavijo košare z jabolki. Na voljo imajo točno določeno število jabolk, na vsaki mizi pa jih mora biti enako. Če bi dodali 5 miz in jabolka razdelili v košare na vse mize, bi morali dati v vsako košaro po 6 jabolk manj. Če bi nato prinesli v restavracijo novih 5 miz, bi v vsako košaro na mizi dali še 4 jabolka manj. Koliko jabolk imajo na voljo v restavraciji?
5. 8 skladnih pravokotnikov zložimo v enega večjega, kot kaže slika. Diagonala velikega pravokotnika meri 136 cm. Izračunaj ploščino enega od malih pravokotnikov.

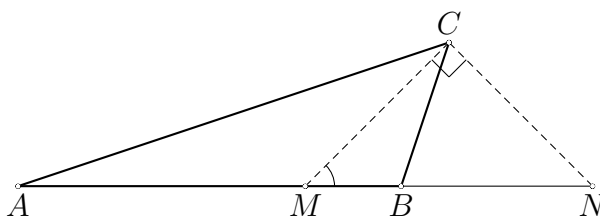


Rešitve za 7. razred

1. Višina stopnice mora biti največje celo število, ki deli 147, 252 in 210. Največji skupni delitelj teh števil je 21. Višina ene stopnice naj bi torej znašala 21 cm.

Ugotovitev, da je višina stopnice $D(147, 210, 252)$ 2 točki
Razcep na prafaktorje $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ 2 točki
 $147 = 3 \cdot 7^2$ 2 točki
 $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ 2 točki
Izračunan največji skupni delitelj in odgovor 21 cm. 2 točki

2. Trikotnik CMN mora biti enokotak. Dovolj je, če pokažemo, da sta kota ob osnovnici skladna. Kote v trikotniku ABC označimo z α, β in γ . Kot $\beta = 90^\circ + \alpha$. Kot γ pa meri potem $90^\circ - 2\alpha$. Kot CMN meri $180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \beta = 45^\circ$. Velikost kota CNM dobimo iz zveze $180^\circ - \frac{\gamma'}{2} - \beta'$, kjer sta γ' in β' zunanja kota in merita po vrsti $180^\circ - \gamma = 90^\circ - 2\alpha$ in $180^\circ - \beta = 90^\circ - \alpha$. Tako tudi kot CNM meri 45° in $|CM| = |CN|$.



Skica z vrisanimi koti in daljicama CM in CN 1 točka
Ugotovitev, da mora biti trikotnik CMN enokotak in kota CMN in CNM skladna. 1 točka
Zapis kota γ kot $180^\circ - (\alpha + 90^\circ) - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$ 1 točka
Izračunan kot CMN : $180^\circ - \frac{\gamma}{2} - \beta = 45^\circ$ 3 točke
Izračunan kot CNM : $180^\circ - \frac{\gamma'}{2} - \beta' = 180^\circ - \frac{90^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha = 45^\circ$ 3 točke
Sklep $|CM| = |CN|$ 1 točka

3. Branjevka ima na začetku x kg krompirja. Prvi dan ga proda $0.3x$ kg, ostane pa ji $0.7x$ kg. Drugi dan proda $\frac{4}{7} \cdot 0.7x = 0.4x$ kg, torej ji za tretji dan ostane $0.3x$ kg. Razlika med količino prodanega in ostalega krompirja je torej $0.4x$ kg, kar znaša 200 kg in $x = 500$ kg.

Ugotovitev, da prvi dan proda $0.3x$ kg. 1 točka
Izračunan ostanek $0.7x$ kg. 1 točka
Izračunana količina prodanega krompirja drugi dan $0.4x$ kg. 2 točki
Izračunan ostanek krompirja $0.3x$ kg. 1 točka
Ugotovitev, da je razlika med prodanim in ostalim krompirjem $0.4x$ kg. .. 2 točki

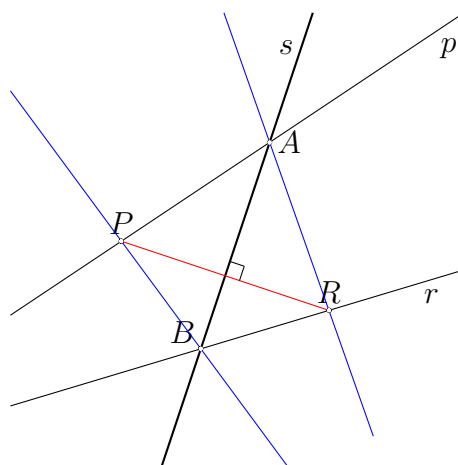
Izenačitev $0.4x = 200$ **1 točka**
Rezultat $x = 500$ **kg**. **2 točki**

4. Številске vrednosti prirejene črkam abecede označimo z malimi črkami. Iz podatkov v tabeli izvemo, da je $a^2 \cdot n = 49$, torej mora biti črki A prirejena vrednost 7, črki N pa 1. Iz vrednosti besede $VENA$ sklepamo, da je $v \cdot e = 8$. Izvedeti moramo samo še vrednost g . Nastopa v besedah GNU in GOS , edino število, ki deli tako 33 kot 440 in je različno od 1, pa je 11. $v \cdot e \cdot g \cdot a = 8 \cdot 11 \cdot 7 = 616$.

Iz vrednosti besede ANA izračunani števili $a = 7$ **in** $n = 1$ **3 točke***
Ugotovitev, da je $v \cdot e = 8$ **2 točki**
Ugotovitev, da g **deli** 33 **in** 440. **1 točka**
 $g = 11$ **2 točki**
Izračunana vrednost besede VEGA je 616. **2 točki**

***Opomba: Tekmovalec dobi vse točke, če jasno izključi ostale možnosti.**

5. Če prezrcalimo premici p in r čez premico s , tvorijo presečišča vseh narisanih premic deltoid (ali dva skladna trikotnika). Točki, ki sta oglišči obeh trikotnikov, ki ne ležita na premici s , pa sta torej enako oddaljeni od nje in sta iskani točki P in R .



Natančno konstruirani obe točki. **5 točk**
Opis konstrukcije: Zrcalimo premico p **čez** s **v** p' **in premico** r **čez** s **v** r' .
Presečišče premic p **in** r' **je točka** P , **presečišče premic** r **in** p' **pa** R **5 točk**

Rešitve za 8. razred

1.

$$\begin{array}{lll} \frac{c}{d} > \frac{c}{b} & \frac{a}{b} > \frac{d}{b} & \frac{c}{a} + \frac{d}{a} < \frac{c}{a} + \frac{b}{a} \\ \frac{a}{b} \cdot b > \frac{c}{b} : c & \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} > 1 & \frac{a}{b} < \frac{a}{d} < \frac{a}{c} \\ a \cdot b > c \cdot d & b - c > a - d & \frac{a}{b} < \frac{b}{a} \end{array}$$

Vsak pravilno zapisan neenačaj prinaša eno točko.

2. Prva črpalka v eni uri napolni $\frac{1}{4}$ rezervoarja, druga pa $\frac{1}{6}$. Skupaj torej v eni uri napolnita $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ rezervoarja. Tolikšen del je poln ob 9. uri. Nato do desetih dela samo prva in napolni še $\frac{1}{4}$, tako da je ob 10.00 rezervoar napolnjen do $\frac{2}{3}$. Ostane še $\frac{1}{3}$ rezervoarja, tega pa obe črpalki skupaj napolnita v $\frac{1}{3} : \frac{5}{12} = \frac{4}{5}$ ure ali v 48 minutah. Rezervoar bo torej poln ob 10.48.

Ugotovitev, da prva črpalka napolni v eni uri $\frac{1}{4}$, druga pa $\frac{1}{6}$ (1 + 1) točka
Izračun, da skupaj v eni uri napolnita $\frac{5}{12}$ rezervoarja. 2 točki
Izračun deleža vode po dveh urah: $\frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$ 2 točki
Ostank za polnjenje po dveh urah $\frac{1}{3}$ 1 točka
Izračunan čas, ki ga za polnjenje tretjine porabita obe črpalki $\frac{1}{3} : \frac{5}{12} = \frac{4}{5}$ ure. ... 2 točki
Odgovor: 10.48 1 točka

3.

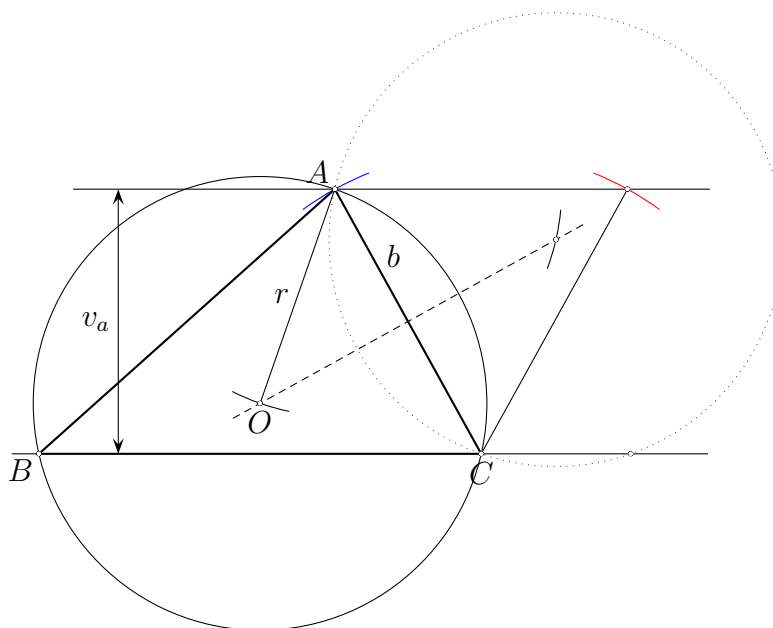
$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = \\ & = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{6} \right) = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{6} = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Pravilno racionalizirani različni ulomki. 4 točke
Množenje (kvadriranje) prvega dela. 4 točke
Odštevanje. 1 točka
Rezultat: $\frac{13}{12}$ 1 točka

Opomba: Možna je tudi rešitev brez racionalizacije, v tem primeru dobijo tekmovalci:

Pravilno izračunan kvadrat tročlenika: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ **6 točk**
Odštevanje (odprava oklepaja). **2 točki**
Rezultat: $\frac{13}{12}$ **2 točki**

4. Najprej načrtamo nosilko stranice CB in na njej označimo oglišče C . Narišemo njeno vzporednico na razdalji 3.5 cm in s pomočjo šestila z lokom dolžine 4 cm in središčem v C na vzporednici določimo oglišče A . Nato narišemo simetralo stranice AC in določimo središče očrtane krožnice na simetrali z oddaljenostjo 3 cm od A in C . Narišemo očrtano krožnico. Oglišče B leži v enem od presečišč krožnice in nosilke stranice CB . Izberemo ga tako, da bo trikotnik ostrokoten.



Narisana skica z vsemi podatki. **1 točka**
Narisana nosilka stranice in vzporednica. **1 točka**
Določitev točk A in C **2 točki**
Načrtano središče očrtane krožnice. **1 točka**
Oglišče B in narisani ostrokotni trikotnik. **1 točka**
Opis konstrukcije. **4 točke**

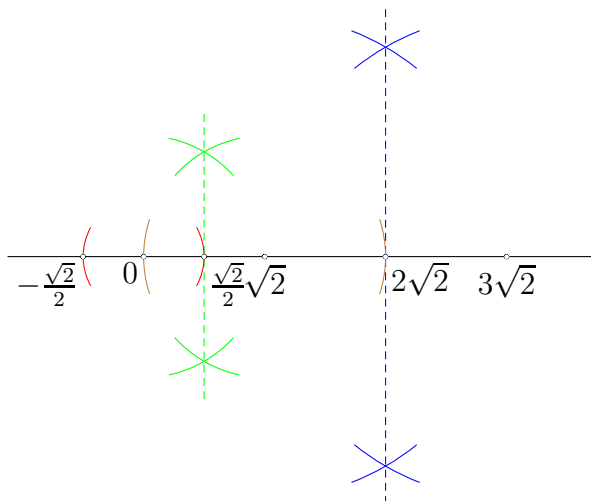
5. Naj bo količina tekočine v tretji posodi x litrov, potem je v prvi posodi $2.5x$ litrov in v drugi $(20 - x - 2.5x) = 20 - 3.5x$ litrov tekočine. Čistega soka v končni mešanici je 22%, $0.22 \cdot 20 = 4.4$ litra. V prvi posodi imamo $0.3 \cdot 2.5x = 0.75x$ litra soka, v drugi posodi $0.1(20 - 3.5x) = 2 - 0.35x$ litra in v tretji $0.4x$ litra soka. Če vse troje seštejemo je čistega soka v vseh treh posodah $0.75x + 2 - 0.35x + 0.4x = 2 + 0.8x$ litra. Ker mora biti soka v mešanici 4.4 litra, je $0.8x = 2.4$ litra in $x = 3$ litre. Tretja posoda torej vsebuje 3 litre, prva 7.5 litra in druga 9.5 litra tekočine.

Izračun končne količine soka v mešanici $0.22 \cdot 20 = 4.4$ litra. **2 točki**
Zapis količine tekočine v prvi in zadnji posodi, $2.5x; x$ **1 točka**

Izražena količina v tretji posodi $20 - 3.5x$1 točka
Zapis deležev soka v posameznih posodah $0.75x, 2 - 0.35x, 0.4x$. 2 točki (1 točka za dva pravilna odgovora)
Skupni delež soka $2 + 0.8x$1 točka
Izračunana količina soka v zadnji posodi $0.8x = 2.4$ litra in $x = 3$ litre.2 točki
Odgovor: 3, 7.5 in 9.5 litra.1 točka

Rešitve za 9. razred

1. Število $\sqrt{18}$ lahko zapišemo kot $3\sqrt{2}$, kar pomeni, da je razdalja med narisanima točkama $2\sqrt{2}$. Če to razdaljo razpolovimo in jo s šestilom prenesemo levo od $\sqrt{2}$, dobimo točko, ki predstavlja število 0. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ z racionaliziranjem zapišemo kot $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, pomeni, da razpolovimo razdaljo med 0 in $\sqrt{2}$ in jo s šestilom prenesemo levo od točke, ki predstavlja število 0.



Zapis $\sqrt{18}$ v obliki $3\sqrt{2}$	1 točka
Razpolovitev daljice med $\sqrt{2}$ in $\sqrt{18}$	1 točka
Prenos polovice razdalje levo od $\sqrt{2}$ in označeno število 0.	1 točka
Opisan postopek za načrtovanje prvega števila.	2 točki
Zapis $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ v obliki $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1 točka
Razpolovitev daljice med 0 in $\sqrt{2}$	1 točka
Natančno prenesena razdalja in narisano število $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1 točka
Opisan postopek za načrtovanje drugega števila.	2 točki

Opomba: Konstrukcija mora biti izvedena s šestilom in ravnalom. Zapis $\sqrt{2}$ v obliki približka in merjenje ne prinaša točk.

2. Večje število označimo z a , manjše pa z b , tako velja $a^2 - b^2 = 167(a - b)$, $(a - b)(a + b) = 167(a - b)$, iz česar sledi $a + b = 167$. Ostanek pri deljenju števil je 15, $a = k \cdot b + 15$. $k \cdot b + 15 + b = 167$. $b(k + 1) = 152$. Število b mora deliti 152, hkrati pa mora biti večje od 15. Zapišemo 152 kot produkt prafaktorjev: $152 = 2^3 \cdot 19$. b je torej lahko 19, 38, 76 ali 152, a pa je 148, 129, 91 in 15. Zadnja rešitev ne pride v poštev, ker mora biti a večji od b , da bo razlika kvadratov večja od razlike teh števil.

Zapis zveze $a^2 - b^2 = 167(a - b)$	1 točka
Razcep razlike kvadratov in ugotovitev $a + b = 167$	2 točki
Zapis zveze med a in b z ostankom pri deljenju $a = k \cdot b + 15$	1 točka
Dobljena enačba $b(k + 1) = 152$	1 točka

- Ugotovitev, da mora b deliti 152. 1 točka**
Razcep 152 na prafaktorje. 1 točka
Zapis vse možnosti za b 1 točka
Izločitev števil manjših od 15 in večjih od $\frac{167}{2}$ 1 točka
Rešitve: (91, 76), (129, 38) in (148, 19). 1 točka

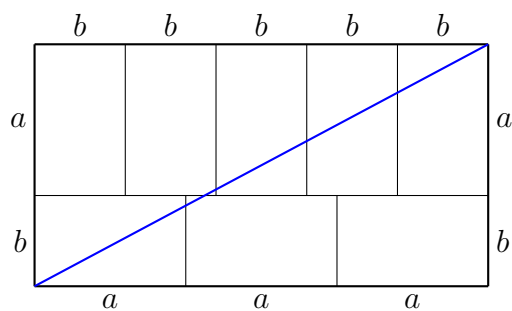
3. Zabojujnik se napolni v 5 urah, kar pomeni, da je ob 12. uri v zabojujniku ena petina vode in je suhe $\frac{4}{5}$ jeklene vrvi. Ta jeklenica potem meri 8.5 m. Dolžino jeklene vrvi lahko izračunamo s pomočjo Pitagorovega izreka $8.5^2 = v^2 + d^2$, kjer je v višina zabojujnika in d diagonala osnovne ploskve. $d = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 9^2} = 7.5$ m. Višina zabojujnika potemtakem meri 4 m. Vsako uro priteče v zabojujnik $\frac{1}{5}$ njegove prostornine, ta pa znaša $V = 12 \cdot 9 \cdot 4 \text{ m}^3 = 432 \text{ m}^3$. Hitrost pritekanja vode je $86.4 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

- Ugotovitev ali upoštevanje, da se v 1 uri napolni $\frac{1}{5}$ zabojujnika. 1 točka**
Izračunana dolžina jeklene vrvi 8.5 m. 2 točki
Izračunana diagonala osnovne ploskve 15 m 2 točki
Izračunana višina zabojujnika 4 m. 2 točki
Izračunana prostornina 432 m^3 2 točki
Odgovor: Hitrost pritekanja vode je $86.4 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ 1 točka

4. Število miz označimo z m , število jabolk na eni mizi pa z j . Skupno število jabolk je $m \cdot j$. Če dodamo 5 miz, se zmanjša število jabolk na mizi za 6, skupno število le-teh je sedaj $(m + 5)(j - 6)$. Če dodamo še 5 novih miz in zmanjšamo število jabolk v košari za 4, dobimo skupaj $(m + 10)(j - 10)$ jabolk. Iz enačbe $m \cdot j = (m + 5)(j - 6)$ sledi zveza $j = \frac{6m+30}{5}$. Če to zvezo uporabimo v enačbi $m \cdot j = (m + 10)(j - 10)$, pridemo do rešitve sistema enačb: $m = 20$ in $j = 30$. V restavraciji imajo na voljo $20 \cdot 30 = 600$ jabolk.

- Zapis števila jabolk v vseh treh primerih,**
npr. $m \cdot j$, $(m + 5)(j - 6)$, $(m + 10)(j - 10)$ (1 + 1 + 1) točka
Zapisana ena od enačb, npr. $m \cdot j = (m + 5)(j - 6)$ 1 točka
Izpeljana zveza med neznankama, npr. $j = \frac{6m+30}{5}$ 2 točki
Zamenjava neznanke v drugi enačbi. 1 točka
Rešitvi sistema: $j = 30$, $m = 20$ (1 + 1) točka
Odgovor: 600 jabolk. 1 točka

5. Stranici enega od osmih skladnih pravokotnikov označimo z a (daljšo) in b . $3a = 5b$. Sestavljen večji pravokotnik ima stranici dolgi $3a$ in $a + b$. Diagonalo dobimo kot $d = \sqrt{(3a)^2 + (a + b)^2}$. Z upoštevanjem $b = \frac{3a}{5}$, dobimo $d = \sqrt{\frac{289a^2}{25}} = \frac{17a}{5}$. $a = 5 \cdot \frac{136}{17} = 40$ cm, $b = 24$ cm. Ploščina enega od malih pravokotnikov meri $a \cdot b = 960 \text{ cm}^2$.



- Zapis zveze med stranicama manjšega pravokotnika $3a = 5b$ 2 točki**
- Zapis ali upoštevanje stranic večjega pravokotnika: $3a, a + b$ 2 točki**
- Izračun diagonale s Pitagorovim izrekom $\frac{17a}{5}$ 2 točki**
- Izračunana ena od stranic, npr. $a = 40$ cm. 2 točki**
- Izračunana druga stranica $b = 24$ cm. 1 točka**
- Izračunana ploščina 960 cm². 1 točka**