

**Društvo matematikov, fizikov  
in astronomov Slovenije**

Jadranska ulica 19  
1000 Ljubljana

# **Tekmovalne naloge DMFA Slovenije**

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dovoljuje shranitev v elektronski obliki, natis in uporabo gradiva v tem dokumentu **za lastne potrebe učenca/dijaka/študenta in za potrebe priprav na tekmovanje na šoli, ki jo učenec/dijak/študent obiskuje**. Vsakršno drugačno reproduciranje ali distribuiranje gradiva v tem dokumentu, vključno s tiskanjem, kopiranjem ali shranitvijo v elektronski obliki je prepovedano.

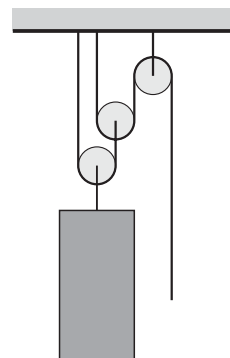
Še posebej poudarjamo, da **dokumenta ni dovoljeno javno objavljati na drugih spletnih straneh** (razen na [www.dmfa.si](http://www.dmfa.si)), dovoljeno pa je dokument hraniti na npr. spletnih učilnicah šole, če dokument ni javno dostopen.

### Skupina I

1. Kolona tovornjakov vozi po desnem pasu na avtocesti s stalno hitrostjo 90 km/h, osebni avtomobili vozijo po levem prehodevalnem pasu s stalno hitrostjo 120 km/h. Dolžino avtomobila zanemarimo.
- Kolikšna je dolžina kolone, če avtomobil vozi mimo 24 s?
  - Voznik avtomobila opazi, da se bo cesta zožila v ena sam pas, na katerem je omejitev hitrosti 90 km/h. S kolikšnim pojemkom mora zavirati, da bo imel na koncu prehodevanja ravno hitrost 90 km/h, če prične zavirati na začetku kolone, konča pa na varnostni razdalji pred prvim tovornjakom. Varnostna razdalja je enaka poti, ki jo (tovornjak) prevozi v dveh sekundah.
  - Kolikšna je razdalja od mesta, kjer začne prehodevati, do zožitve, da manever pri b) ravno uspe?

2. Matej na strop pritrži sistem treh škripcov. Škripec na desni je pritržen na strop, medtem ko sta levi in srednji škripec prosto gibljiva (glej sliko). Levi škripec Matej pritrži na breme, ki stoji na tleh. Prosti del vrvi na desni vleče navpično navzdol. Sila, s katero vleče vrv, je največ 400 N. V a) in b) delu naloge maso škripcov in vrvi zanemari.

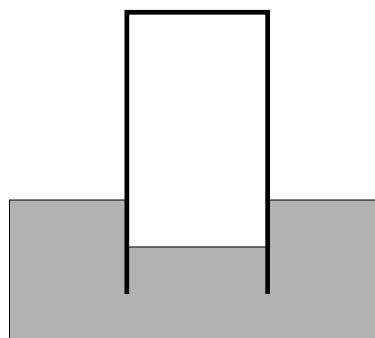
- Največ kolikšna je lahko masa bremena, da ga Matej s škripcem še uspe dvigniti s tal?
- Ko Matej počasi dviguje najtežje breme, ki ga še lahko dviga, se mu dlani vse bolj potijo, zato mu v nekem trenutku vrv začne drseti med dlanmi. Sila trenja med dlanmi in vrvjo je takrat 310 N. S kolikšnim pospeškom pada breme?
- V tem delu naloge upoštevaj maso škripcov, masa vsakega je 3,0 kg. Matej priveže na levi škripec breme z maso 200 kg. Breme je pretežko, da bi ga lahko dvignil s tal celo, ko vleče prosti del vrvi navpično navzdol z največjo možno silo 400 N. Katera od treh vrvi, ki so pritrjene na strop (leva, srednja ali desna), je takrat napeta z največjo silo? Kolikšna je ta sila?



3. Hokejist Andrej z maso (skupaj z opremo) 80 kg miruje tik ob steni. Branilec nasprotnega moštva z maso 100 kg se zaleti vanj s hitrostjo 8,0 m/s. Pri trku se igralca sprimeta. V nalogi upoštevaj, da se ob trku enega ali več hokejistov v steno hokejisti v smeri pravokotno na steno vedno ustavijo.
- S kolikšno povprečno silo je med trkom deloval branilec na mirujočega Andreja, če se je pred trkom gibal v smeri pravokotno na steno in se je ustavil po 0,50 s?
  - S kolikšno komponento hitrosti vzporedno s steno se gibljeta sprijeta hokejista takoj po trku, če se je pred trkom branilec gibal pod kotom  $30^\circ$  glede na steno z enako hitrostjo kot pri a), Andrej pa je s hitrostjo 6,0 m/s drsal tik ob steni v smeri proti branilcu? Trenje med steno in hokejistoma in med ledom in hokejistoma je zanemarljivo.
  - Čas trka hokejistov v b) delu naloge je 0,80 s. Kolikšna je povprečna komponenta sile, s katero branilec med trkom deluje na Andreja vzporedno s steno? Kolikšna je povprečna komponenta sile, s katero branilec med trkom deluje na Andreja pravokotno na steno?
  - Vsaj kolikšen bi moral biti koeficient lepenja med steno in hokejistoma, da bi sprijeta hokejista pri trku obmirovala ob steni?

Skupina II

- Na vir stalne napetosti 10 V vežemo na različne načine 4 enake upornike z uporom  $200 \Omega$ . Pri vseh delih naloge morajo biti v vezju vezani vsi štirje uporniki in skozi vsak upornik mora teči električni tok. Vezave s kratkimi stiki torej v nalogi štejemo kot nepravilne.
  - Nariši shemi tistih dveh vezav, pri katerih teče skozi vir napetosti največji (A) in najmanjši (B) tok. Shemi označi s črkama A in B. Kolikšna sta tok skozi vir v vezavi A in tok skozi vir v vezavi B?
  - Nariši še 4 med seboj različne, a drugačne vezave kot v a) delu naloge in za vsako izračunaj in zapiši tok, ki teče skozi vir.
  - Nariši vezavo, pri kateri je moč vira enaka kot v primeru, ko je na vir priključen samo en upornik z uporom  $200 \Omega$ .
- Ploščati kondenzator s ploščino posamezne plošče  $0,10 \text{ m}^2$  in z razmikom med ploščama  $1,0 \text{ mm}$  vežemo zaporedno z upornikom z uporom  $10 \text{ M}\Omega$  na vir enosmerne napetosti  $6,0 \text{ kV}$ .
  - Kolikšen naboj se nabere na kondenzatorju?
  - Iz vezja odklopimo vir in plošči razmaknemo na razdaljo  $2,5 \text{ mm}$ . Kolikšna je sedaj napetost in kolikšen je naboj na kondenzatorju?
  - Kondenzator z zaporedno vezanim upornikom iz b) dela naloge ponovno priključimo na isti vir napetosti. Kolikšen je začetni tok, ki steče skozi upornik?
  - Nedvoumno zapiši smer toka v delu c) glede na smer prvotnega toka v a) delu naloge.
  - Nato v vezje s kondenzatorjem iz c) dela naloge vežemo vzporedno s kondenzatorjem še en upornik z uporom  $20 \text{ M}\Omega$ . Kolikšna sta v tem vezju napetost in naboj na kondenzatorju?
- Stekleno posodo v obliki valja z maso  $35 \text{ kg}$ , višino  $200 \text{ cm}$  in s polmerom osnovne ploskve  $15 \text{ cm}$  previdno položimo na gladino vode z odprtino navzdol, da pri tem nič zraka ne uide iz posode (glej sliko). Posodo podpiramo, da se ne prevrne in je dno ves čas vodoravno, vendar je ne dvigamo.
  - Za koliko je v ravnovesju gladina vode v posodi nižja od gladine okoliške vode?
  - Koliko pod gladino okoliške vode je v ravnovesju spodnji rob posode? Zunanji zračni tlak je  $100 \text{ kPa}$ , temperatura zraka in vode je  $15 \text{ }^\circ\text{C}$ .
  - Vodo počasi segrejemo na temperaturo  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ . Za koliko se posoda dvigne ali spusti glede na lego v b) delu naloge, ko se temperatura zraka v posodi izenači s temperaturo vode?
  - Koliko dela pri tem opravi zrak v posodi?
  - Koliko toplote pri tem sprejme zrak v posodi?



Vzgon potopljenih sten posode zanemari, prav tako zanemari maso zraka v posodi v primerjavi z maso posode. Specifična toplota plina pri konstantni prostornini je  $c_v = \frac{R}{(\kappa-1)M}$  in pri konstantnem tlaku  $c_p = \frac{\kappa R}{(\kappa-1)M}$ .

### Skupina III

1. Balon, ki prazen tehta 1,0 g, napolnimo s helijem do prostornine 5,0 L.
  - a) Kolikšna je masa helija v balonu, če je temperatura helija 20 °C in tlak 100 kPa. Kilomolska masa helija je 4,0 kg/kmol.
  - b) Balon privežemo na lahko elastično vrvico z dolžino 100 cm. Ko se balon umiri, je vrvica raztegnjena za 5,0 cm. Kolikšen je prožnostni koeficient vrvice? Temperatura in tlak v balonu in v okoliškem zraku sta enaka. Kilomolska masa zraka je 29 kg/kmol.
  - c) Balon potisnemo iz ravnovesne lege navzdol za 2 cm. S kolikšno frekvenco zaniha, ko ga spustimo?

Privzemi, da upor zraka ne vpliva na frekvenco nihanja in da je masa zraka, ki niha skupaj z balonom, zanemarljiva.
  
2. Zbiralna leča ima goriščno razdaljo 12 cm. V oddaljenosti 36 cm pred središčem leče postavimo pravokotno na optično os leče 9 cm visok predmet.
  - a) V kolikšni oddaljenosti od leče nastane realna slika in kako velika je?
  - b) Za lečo (na drugo stran leče, kot je predmet) postavimo ravno zrcalo, ki je od leče oddaljeno 20 cm. Koliko realnih slik nastane, na kateri strani leče in v kolikšni oddaljenosti od leče so?
  - c) Zrcalo približamo leči na novo razdaljo 16 cm, predmet ostane na istem mestu kot prej. Koliko realnih slik nastane, na kateri strani leče in v kolikšni oddaljenosti od leče so?
  
3. Na strop je na lahko neprevodno neraztegljivo vrvico z dolžino 100 cm obešena majhna neprevodna kroglica z maso 1,0 g in nabojem  $e_1 = +8,0 \cdot 10^{-8}$  As. Na razdalji 60 cm od navpične vrvice premikamo v navpični smeri drugo majhno nabito kroglico z nabojem  $e_2$ .
  - a) Kolikšen je naboj  $e_2$ , če sta kroglici na enaki višini takrat, ko je razdalja med kroglicama 10 cm? Kolikšen kot tedaj oklepa vrvica z navpičnico?
  - b) Kroglico z nabojem  $e_2$  odstranimo. Kolikšen naboj  $e_3$  moramo postaviti na razdaljo 60 cm od navpične vrvice 100 cm pod stropom, da se bo kroglica na vrvici umirila na istem mestu, kjer miruje v a) delu naloge?
  - c) Kroglico z nabojem  $e_3$  odstranimo in na njeno mesto postavimo kroglico z nabojem  $e_2$  iz a) dela naloge. Oцени na 0,1° natančno, za koliko je od navpičnice odklonjena vrvica s kroglico v tem primeru. Upoštevaj, da se vrvica odkloni od navpičnice za majhen kot.

1.  $v_T = 90 \text{ km/h}$ ,  $v_A = 120 \text{ km/h}$ ,  $t_a = 24 \text{ s}$ .

a) Avtomobil v času  $t_a$  opravi za dolžino kolone  $l$  daljšo pot kot tovornjaki:

$$s_A = v_A t_a = s_T + l = v_T t_a + l.$$

Od tod

$$l = (v_A - v_T)t_a = 200 \text{ m}.$$

Enak rezultat dobimo, če računamo pot, ki jo avtomobil prevozi za voznika tovornjaka, saj se avtomobil glede na voznika giblje z relativno hitrostjo  $v_A - v_T$ .

[4 t.]

b) Varnostna razdalja meri  $l_v = v_T t_{2s} = 50 \text{ m}$ .

V času zaviranja  $t$  avtomobil opravi pot

$$s_A = v_A t - \frac{1}{2} a t^2.$$

Velikost pojemka lahko zapišemo kot

$$a = \frac{v_A - v_T}{t}.$$

Pojemek vstavimo v enačbo za pot

$$s_A = v_A t - \frac{1}{2} (v_A - v_T) t = \frac{1}{2} (v_A + v_T) t.$$

Podobno kot pri a) velja

$$s_A = v_T t + l + l_v$$

in

$$t = \frac{2(l + l_v)}{v_A - v_T} = 60 \text{ s}.$$

Pojemek meri

$$a = \frac{v_A - v_T}{t} = \frac{(v_A - v_T)^2}{2(l + l_v)} = 0,14 \text{ m/s}^2.$$

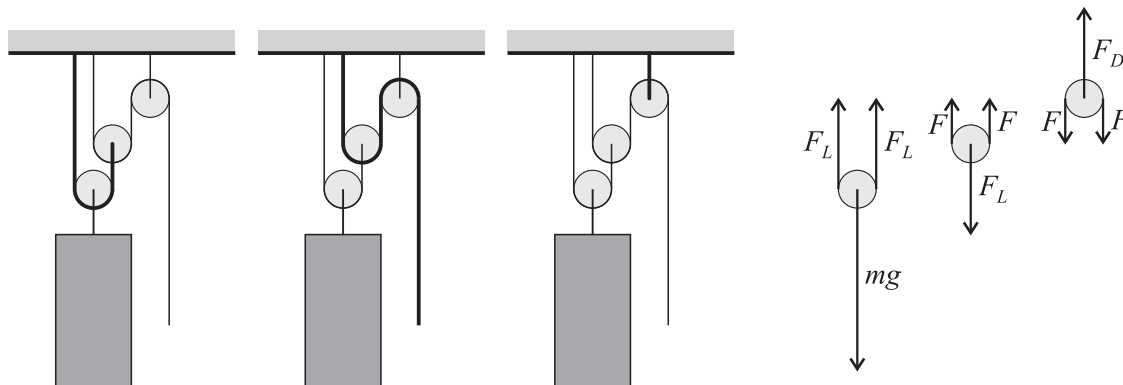
[5 t.]

c) Kritična razdalja meri

$$s_A = \frac{1}{2} (v_A + v_T) t = 1750 \text{ m}.$$

[1 t.]

2. Škripec preusmeri smer sile, s katero je napeta vrvi, ki poteka preko posameznega škripca. Na sliki so na treh kopijah skice iz naloge po vrsti odebeljene tri vrvi iz naloge: vrvi na levi poteka preko levega škripca od stropa do osi srednjega škripca in je napeta s silo  $F_L$ ; vrvi, ki jo vleče Matej, je pritrjena na strop kot srednja in poteka preko srednjega in desnega škripca, napeta je s silo  $F$ ; desni škripec je obešen na vrvi, ki poteka od stropa do osi škripca, ta vrvi je napeta s silo  $F_D$ .



Ravnovesje sil za posamezen škripec je narisano na desnem delu slike. Iz ravnovesja sil za škripce od levega proti desnemu po vrsti dobimo

$$mg = 2F_L, \quad F_L = 2F, \quad 2F = F_D.$$

- a) Iz prvih dveh enačb in podatka, da je največja sila  $F = 400$  N, dobimo

$$mg = 4F \quad \text{in od tu} \quad m = \frac{4F}{g} = 163,3 \text{ kg} = 163 \text{ kg} \approx 160 \text{ kg}.$$

[3 t.]

- b) Ko Mateju zaradi potenja vrvi drsi med dlanmi, se sila, s katero vleče, iz vrednosti 400 N zmanjša na  $F' = 310$  N. Drugi Newtonov zakon za breme, obešeno na levi škripec, nam da

$$ma = mg - 4F', \quad \text{in od tu} \quad a = g - \frac{4F'}{m} = g \left( 1 - \frac{F'}{F} \right) = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

[3 t.]

- c) Zaradi mase škripcev ( $m_0 = 3$  kg) se v enačbah za ravnovesje sil za posamezen škripec pojavi še teža škripca  $m_0g$  v smeri navzdol. Breme je pretežko, da bi ga Matej dvignil, zato vleče s silo  $F = 400$  N in sta za napetosti v vrveh dejansko pomembni le ravnovesji sil za srednji in desni škripec. Sila, s katero deluje vrvi med bremenom in levim škripcem se namreč prilagodi napetosti v levi vrvi  $F_L$ . Dobimo

$$F_L + m_0g = 2F, \quad 2F + m_0g = F_D.$$

od koder sledi

$$F_L = 2F - m_0g = 771 \text{ N} \approx 770 \text{ N}, \quad F = 400 \text{ N}, \quad F_D = 2F + m_0g = 829 \text{ N} \approx 830 \text{ N}.$$

Največja sila 830 N je torej v desni vrvi, na kateri visi desni škripec.

[4 t.]

3.  $m_1 = 80 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 100 \text{ kg}$ ,  $v_2 = 8,0 \text{ m/s}$ ,  $v_1 = 6,0 \text{ m/s}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\Delta t_a = 0,5 \text{ s}$ ,  $\Delta t_c = 0,8 \text{ s}$ .

a) Zapišemo izrek o gibalni količini za branilca:

$$0 - m_2 v_2 = F_H \Delta t_a, \quad F_B = -F_H = \frac{m_2 v_2}{\Delta t_a} = 1600 \text{ N}.$$

Pri tem je  $F_B$  sila, s katero branilec deluje na Andreja,  $F_H$  pa sila, s katero Andrej deluje na branilca.

[3 t.]

b) Ohrani se skupna gibalna količina v smeri, vzporedni s steno:

$$m_2 v_2 \cos \alpha - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v.$$

Hitrost, s katero se gibljeta sprijeta hokejista, je

$$v = \frac{m_2 v_2 \cos \alpha - m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 1,18 \text{ m/s} \approx 1,2 \text{ m/s}.$$

[2 t.]

c) Zapišimo izrek o gibalni količini za komponente gibalne količine branilca in za silo, s katero branilec deluje na Andreja v smeri, pravokotni na steno:

$$0 - m_2 v_2 \sin \alpha = -F_{\perp} \Delta t_c, \quad F_{\perp} = \frac{m_2 v_2 \sin \alpha}{\Delta t_c} = 500 \text{ N}$$

in vzporedno s steno:

$$m_2 v - m_2 v_2 \cos \alpha = -F_{\parallel} \Delta t_c, \quad F_{\parallel} = \frac{m_2 (v_2 \cos \alpha - v)}{\Delta t_c} = 720 \text{ N}.$$

[2 t.]

d) Sunek sile stene je enak spremembi skupne gibalne količine. V smeri pravokotno na steno velja enaka enačba kot pri c), saj je komponenta gibalne količine Andreja enaka 0. V smeri vzporedno s steno pa velja (gibalna količina na koncu je 0!):

$$0 - (m_2 v_2 \cos \alpha - m_1 v_1) = F_{\parallel} \Delta t_c, \quad |F_{\parallel}| = \frac{m_2 v_2 \cos \alpha - m_1 v_1}{\Delta t_c} = 266 \text{ N}.$$

Sprijeta hokejista pri trku mirujeta, če je vodoravna komponenta manjša od največje sile lepenja:

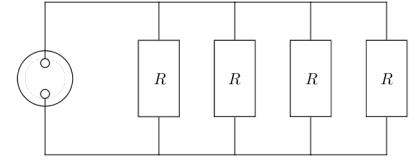
$$|F_{\parallel}| \leq k_l F_{\perp}.$$

Od tod

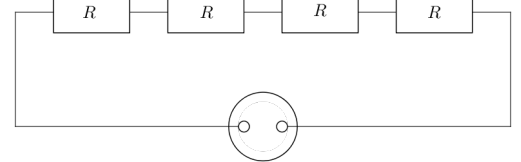
$$k_l \geq \frac{|F_{\parallel}|}{F_{\perp}} = 0,53.$$

[3 t.]

1. a) Vezje (A), pri katerem teče skozi vir napetosti največji tok, je tisto, kjer so vsi 4 uporniki vezani vzporedno. Skupni upor upornikov je  $R_A = R/4 = 50 \Omega$ , na njih je skupna napetost vira  $U_0 = 10 \text{ V}$ , in tok, ki teče skozi vir je  $I_A = \frac{U_0}{R_A} = 0,2 \text{ A}$ . (Skozi vsakega od 4 upornikov pa teče četrtnina tega toka, 50 mA.)



Vezje (B), pri katerem teče skozi vir napetosti najmanjši tok, je tisto, kjer so vsi 4 uporniki vezani zaporedno. Skupni upor upornikov je  $R_B = 4R = 800 \Omega$ , na njih je skupna napetost vira  $U_0 = 10 \text{ V}$ , in tok, ki teče skozi vir (in skozi vsakega od upornikov) je  $I_B = \frac{U_0}{R_B} = 12,5 \text{ mA}$ .



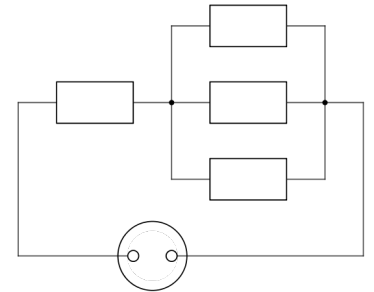
[4 t.]

- b) Obstaja še 8 drugačnih vezav štirih upornikov.

(C) Skupni upor upornikov na sliki je

$$R_C = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = R + \frac{R}{3} = \frac{4R}{3} = 266,7 \Omega.$$

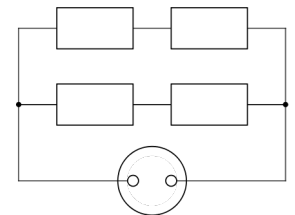
Skozi vir teče tok  $I_C = \frac{U_0}{R_C} = 37,5 \text{ mA}$ .



(D) Skupni upor upornikov na sliki je

$$R_D = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = R = 200 \Omega.$$

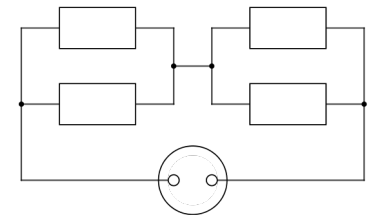
Skozi vir teče tok  $I_D = \frac{U_0}{R_D} = 50 \text{ mA}$ .



(E) Skupni upor upornikov na sliki je enak kot skupni upor (D),

$$R_E = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = R = 200 \Omega.$$

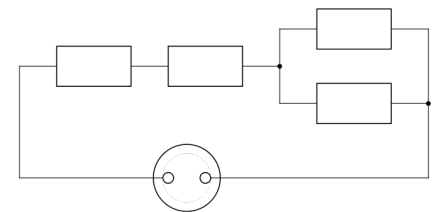
Skozi vir teče tok  $I_E = \frac{U_0}{R_E} = 50 \text{ mA}$ .



(F) Skupni upor upornikov na sliki je

$$R_F = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{5R}{2} = 500 \Omega.$$

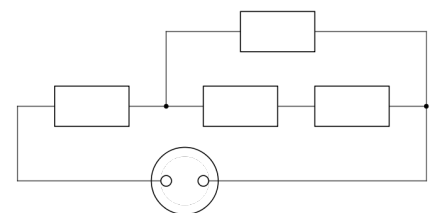
Skozi vir teče tok  $I_F = \frac{U_0}{R_F} = 20 \text{ mA}$ .



(G) Skupni upor upornikov na sliki je

$$R_G = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{5R}{3} = 333,3 \Omega.$$

Skozi vir teče tok  $I_G = \frac{U_0}{R_G} = 30 \text{ mA}$ .

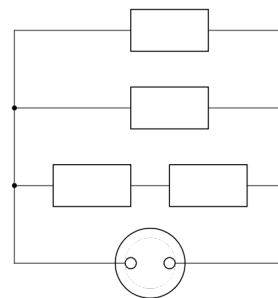




(H) Skupni upor upornikov na sliki je

$$R_H = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2R}{5} = 80 \Omega.$$

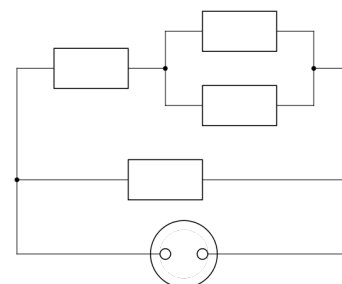
Skozi vir teče tok  $I_H = \frac{U_0}{R_H} = 125 \text{ mA}$ .



(I) Skupni upor upornikov na sliki je

$$R_I = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}}}} = \frac{3R}{5} = 120 \Omega.$$

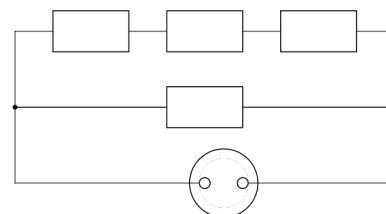
Skozi vir teče tok  $I_I = \frac{U_0}{R_I} = 83,3 \text{ mA}$ .



(J) Skupni upor upornikov na sliki je

$$R_J = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} = \frac{3R}{4} = 150 \Omega.$$

Skozi vir teče tok  $I_J = \frac{U_0}{R_J} = 66,7 \text{ mA}$ .



[4 t.]

c)

Moč vira je  $P_v = U_0 \cdot I_v$ . Ko je na vir priključen en upornik, teče skozi vir tok  $I_v = \frac{U_0}{R} = 50 \text{ mA}$  in je moč vira  $P_v = 0,5 \text{ W}$ . Enako moč daje od sebe vir tedaj, ko je skupen upor 4 enakih upornikov enak  $R$ , tedaj teče skozi vir enak tok kot pri vezavi enega samega upornika  $R$ , 50 mA. Skupen upor 4 upornikov je enak  $R$  pri vezavah na slikah (D) in (E).

[2 t.]

2.  $S = 0,10 \text{ m}^2$ ,  $l = 1,0 \text{ mm}$ ,  $U = 6 \text{ kV}$ ,  $R = 10 \text{ M}\Omega$ ,  $l' = 2,5 \text{ mm}$ ,  $R' = 20 \text{ M}\Omega$ .

a) Ker po dolgem času v vezju tok ne teče, je vsa napetost vira na kondenzatorju,  $U_C = U = 6 \text{ kV}$ .

$$e = CU_C = \frac{\varepsilon_0 S U}{l} = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ As}.$$

[2 t.]

b) Naboj se ohrani  $e' = e$ , kapaciteta pa se zmanjša:

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{l'} = \frac{2}{5} C.$$

$$U' = \frac{e'}{C'} = 2,5 U = 15 \text{ kV}.$$

[2 t.]

c) Kondenzator na začetku deluje kot napetostni vir z nasprotno polariteto kot 6 kV vir. Začetni tok je tako

$$I = \frac{U' - U}{R} = 0,9 \text{ mA}$$

[2 t.]

d) Kondenzator deluje kot vir z nasprotno polariteto in višjo napetostjo kot prvotni vir, zato tok teče v nasprotni smeri.

[1 t.]

e) V tem primeru teče tok skozi zaporedno vezana upornika, skozi kondenzator pa tok ne teče. Napetost vira se razdeli v razmerju uporov, zato je na uporniku  $R$  napetost 2 kV, na uporniku  $R'$  pa  $U' = 4 \text{ kV}$ . Ker je kondenzator vezan vzporedno z upornikom  $R'$ , je na kondenzatorju enaka napetost kot na uporniku. Naboj na kondenzatorju je potem

$$U' = \frac{R'}{R + R'} U = 4 \text{ kV}, \quad e' = C' U' = \frac{\varepsilon_0 S U'}{l'} = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ As}.$$

[3 t.]

3.  $m_p = 35 \text{ kg}$ ,  $h = 200 \text{ cm}$ ,  $r = 15 \text{ cm}$ ,  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ ,  $T_0 = 15^\circ\text{C}$ ,  $T = 25^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\kappa = 1,4$ ,  $M = 29 \text{ kg/kmol}$ .

a) Tlak vode tik pod gladino v posodi je za  $\rho g \Delta h$  večji od zunanega zračnega tlaka;  $\Delta h$  je iskano znižanje gladine v posodi. Sila tlaka uravnesi težo posode:

$$\rho g \Delta h \pi r^2 = mg, \quad \Delta h = \frac{m}{\rho \pi r^2} = 49,5 \text{ cm} \approx 50 \text{ cm}.$$

Nalogo lahko rešimo z vzgonom: prostornina izpodrinjene vode v posodi je  $V_v = \Delta h \pi r^2$ ; če zahtevamo, da je teža izpodrinjene tekočine enaka teži posode, pridemo do iste enačbe za ravnovesje.

[3 t.]

b) Zaradi povečanega tlaka se prostornina zraka v posodi zmanjša. Velja Boylov zakon. Če s  $h'$  označimo višino zraka v posodi, zapišemo

$$(p_0 + \rho g \Delta h) V' = p_0 V, \quad h' = \frac{V'}{\pi r^2} = \frac{p_0}{(p_0 + \rho g \Delta h)} h = 190,5 \text{ cm} \approx 190 \text{ cm}.$$

Spodnji rob posode je potopljen do globine

$$\Delta h' = \Delta h + h - h' = 59,0 \text{ cm} \approx 60 \text{ cm}.$$

[2 t.]

c) Segrevanje vode ne vpliva na globino gladine vode v posodi, zato segrevanje zraka v posodi poteka pri konstantnem tlaku. Če s  $h''$  označimo končno višino zraka v posodi, velja

$$\frac{V'}{T_0} = \frac{V''}{T}, \quad h'' = \frac{V''}{\pi r^2} = \frac{T}{T_0} h' = 197 \text{ cm}.$$

Posoda se dvigne za

$$\Delta h'' = h'' - h' = 6,5 \text{ cm} \approx 7 \text{ cm}.$$

[2 t.]

d) Delo tlaka, ki ga opravi zrak:

$$A = p(V'' - V') = (p_0 + \rho g \Delta h) \pi r^2 (h'' - h') = 490 \text{ J}.$$

[1 t.]

e) Toploto dovajamo pri konstantnem tlaku:

$$Q = m_z c_p (T - T_0)$$

Maso zraka določimo iz splošne plinske enačbe:

$$m_z = \frac{M p V'}{R T_0} = \frac{M (p_0 + \rho g \Delta h) \pi r^2 h'}{R T_0}$$

Če upoštevamo podani izraz za  $c_p$ , sledi

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{R}{M} \frac{M (p_0 + \rho g \Delta h) \pi r^2 h'}{R T_0} (T - T_0) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} (p_0 + \rho g \Delta h) \pi r^2 \left( \frac{h' T}{T_0} - h' \right) \\ &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} (p_0 + \rho g \Delta h) \pi r^2 (h'' - h') = \frac{\kappa}{\kappa - 1} A = 1720 \text{ J}. \end{aligned}$$

Seveda pa lahko izračunamo posebej  $m_z = 0,17 \text{ kg}$  in  $c_p = 1000 \text{ K/kgK}$  in vstavimo v prvo enačbo za  $Q$ .

[2 t.]

1.  $m_b = 1,0 \text{ g}$ ,  $V = 5 \text{ l}$ ,  $T = 293 \text{ K}$ ,  $p = 100 \text{ kPa}$ ,  $M_{\text{He}} = 4 \text{ kg/kmol}$ ,  $M_z = 29 \text{ kg/kmol}$ ,  $l_0 = 100 \text{ cm}$ ,  
 $s = 5 \text{ cm}$

a) Maso določimo iz splošne plinske enačbe:

$$m_{\text{He}} = \frac{pM_{\text{He}}V}{RT} = 0,82 \text{ g} \approx 0,8 \text{ g}.$$

[2 t.]

b) Vzgon okoliškega zraka je enak teži izpodrinjenega zraka:

$$F_v = m_z g, \quad m_z = \frac{pM_z V}{RT} = 5,96 \text{ g}.$$

Vzgon zraka je uravnotežen s težo balona in helija ter silo vrvice:

$$m_z g = m_b g + m_{\text{He}} g + k s,$$
$$k = \frac{(m_z - m_b - m_{\text{He}})g}{s} = 0,81 \text{ N/m} \approx 0,8 \text{ N/m}.$$

[4 t.]

c) Masa, ki niha, je po predpostavki le masa balona in masa helija. Frekvenca nihanja je zato

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m_{\text{He}} + m_b}} = 21,1 \text{ s}^{-1} \approx 21 \text{ s}^{-1}, \quad \nu = 3,36 \text{ s}^{-1} \approx 3,4 \text{ s}^{-1}.$$

[4 t.]

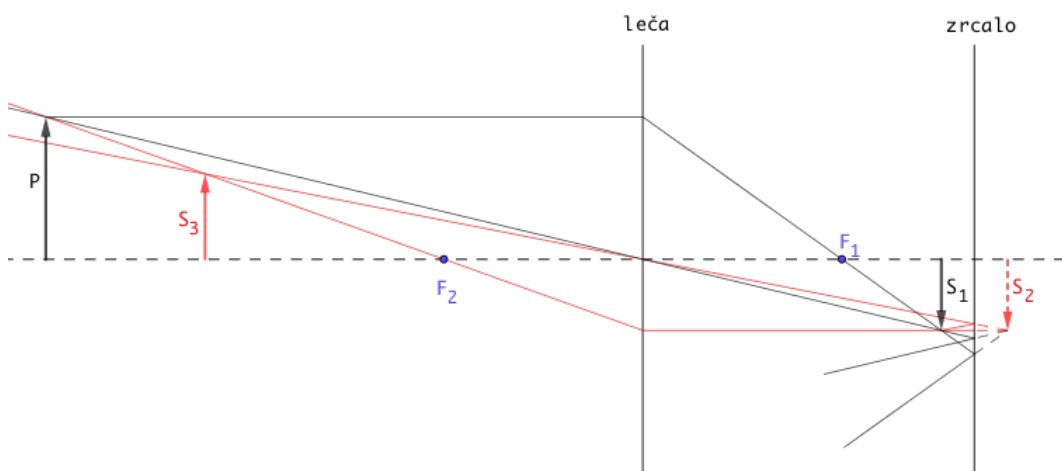
2. a) Iz enačbe leče izrazimo razdaljo slike  $S_1$  od leče  $b_1$  in vstavimo vrednosti za  $f$  in  $a_1$ ,

$$b_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = 18 \text{ cm.}$$

Velikost slike  $S_1$  je  $y' = y \frac{b_1}{a_1} = 4,5 \text{ cm}$ . Slika je realna.

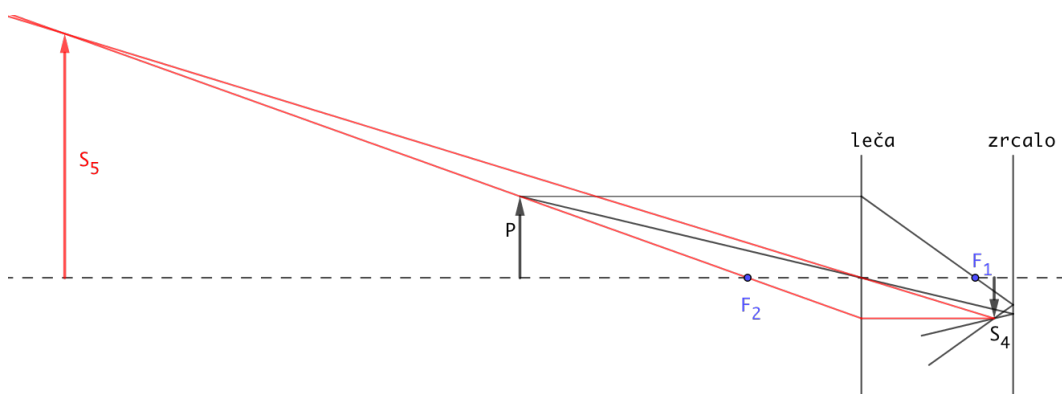
[3 t.]

b) Zrcalo je 2 cm oddaljeno od **prve realne** slike  $S_1$ . Če bi gledali v pravo smer proti zrcalu, bi v njem videli navidezno sliko  $S_2$  realne slike  $S_1$ ; slika  $S_2$  je od zrcala oddaljena za 2 cm, od leče pa za  $a_2 = 22 \text{ cm}$ . Svetloba se od zrcala odbija, kot bi izhajala iz  $S_2$ , in gre še enkrat skozi lečo. Po prehodu skozi lečo nastane v oddaljenosti  $b_2 = \frac{a_2 f}{a_2 - f} = 26,4 \text{ cm}$  **druga realna** slika  $S_3$ , na isti strani kot je predmet.



[4 t.]

c) Ko zrcalo približamo leči, se svetloba, ki od predmeta prehaja skozi lečo, na zrcalu odbije preden tvori realno sliko. **Prva realna** slika  $S_4$  zato nastane  $b_1 - 16 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$  pred zrcalom oziroma v oddaljenosti  $a_3 = 14 \text{ cm}$  od leče. Svetloba še enkrat potuje skozi lečo in v razdalji  $b_3 = \frac{a_3 f}{a_3 - f} = 84 \text{ cm}$  nastane **druga realna** slika  $S_5$ , na isti strani leče kot je predmet.



[3 t.]

3. Na sliki so oznake količin v nalogi. Dolžina vrvice  $l = 100$  cm, vodoravna razdalja  $a = 60$  cm od navpične vrvice, razdalja  $b = 10$  cm med kroglicama v a) delu naloge, ko je naboj  $e_2$  v točki 1. V delih b) in c) sta naboj  $e_3$  in  $e_2$  v točki 2. Kot nagiba vrvice v delih a) in b) je  $\varphi$ , kot med zveznico med kroglico v delih a) in b) ter točko 2 ter navpičnico označimo z  $\delta$ . Masa kroglice je  $m = 1$  g.

a) Naboj  $e_2$  mora biti negativen, da je sila privlačna. V vodoravni smeri deluje električna sila, v navpični teža, vrstica se nagne v smeri vsote teh dveh sil

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_e}{mg} = \frac{|e_1 e_2|}{4\pi\epsilon_0 b^2 mg}.$$

Iz geometrije naloge vidimo, da je  $\sin\varphi = (a - b)/l = 0,5$ . Od tu dobimo kot  $\varphi = 30^\circ$ . Zdaj izračunamo še naboj  $e_2$

$$e_2 = -\frac{4\pi\epsilon_0 b^2 mg}{e_1} \operatorname{tg}\varphi = -7,9 \cdot 10^{-8} \text{ As.}$$

[3 t.]

b) Iz geometrije vidimo, da bo vse skupaj najlažje izraziti s kotom  $\delta$ ,

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{F_x}{F_y} = \frac{b}{l(1 - \cos\varphi)}, \quad \delta = 36,74^\circ.$$

Zdaj za naklon vrvice  $\varphi$  velja

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_x}{mg + F_y}, \quad F_x = F_e \sin\delta, \quad F_y = F_e \cos\delta.$$

$$F_e = \frac{|e_1 e_3|}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{|e_1 e_3| \sin^2\delta}{4\pi\epsilon_0 b^2},$$

kjer je  $r = b/\sin\delta$  razdalja med nabojema  $e_1$  in  $e_3$ . Po nekaj premetavanju dobimo

$$e_3 = e_2 \frac{\cos\varphi}{\sin^2\delta \sin(\delta - \varphi)} = 20,6e_2 = -1,62 \cdot 10^{-6} \text{ As.}$$

[3 t.]

c) Ker je naboj  $e_3$  za cel velikostni red večji od naboja  $e_2$ , lahko sklepamo, da se bo, ko bo na mestu 2 naboj  $e_2$ , kroglico le malo odklonila. V najnižjem približku zato za razdaljo med  $e_1$  in  $e_2$  vzamemo kar  $a$  in dobimo za kot  $\varphi'$  približno enačbo

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{F'_e}{mg} = \frac{|e_1 e_2|}{4\pi\epsilon_0 a^2 mg} = \frac{|e_1 e_2|}{4\pi\epsilon_0 b^2 mg} \frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg}\varphi \frac{b^2}{a^2}$$

in od tu  $\varphi' = 0,92^\circ \approx 0,9^\circ$ .

S tem približkom izračunamo premik kroglice na vrvi  $x_1 = l \sin\varphi' = 1,6$  cm in popravimo razdaljo med nabojema na  $a'_1 = a - x_1 = 58,4$  cm. Z novim  $a'$  izračunamo popravljeno vrednost

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi \frac{b^2}{a_1'^2}$$

in dobimo boljši približek  $\varphi' = 0,97^\circ \approx 1,0^\circ$ .

Ponovno ocenimo odklon kroglice in dobimo  $x_2 = l \sin\varphi' = 1,7$  cm in  $a'_2 = a - x_2 = 58,3$  cm, kar pa ne spremeni več opazno naklona vrvice.

[4 t.]

