Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije

Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

Tekmovalne naloge DMFA Slovenije

56. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Regijsko tekmovanje, 16. 3. 2018

Skupina I

1. Dve pokončni valjasti posodi s premeroma 10 cm in 20 cm, ki sta na dnu povezani z ozko kratko cevko, napolnimo s 50 L kapljevine z gostoto 1200 kg/m^3. Na gladini kapljevine v vsaki posodi je lahek pomičen pokrov, ki dobro tesni in je gibljiv v navpični smeri brez trenja. Prostornina vezne cevke na dnu je zanemarljiva.

   a) Do kolikšne višine sega kapljevina v vsaki posodi?
   b) Na pokrov ožje posode položimo utež za 2 kg. Kolikšna mora biti masa uteži na pokrovu širše posode, da bo kapljevina v obeh posodah segala enako visoko?
   c) Utež v širši posodi odstranimo, v ožji na pokrovu ostane dvokilogramska utež. Za koliko se razlikujeta višini gladin v posodah?
   d) Za koliko se razlikujeta višini gladin, če je na vsakem pokrovu dvokilogramska utež?
   e) Za koliko je v primeru d) tlak na dnu ožje posode večji od zunanjega zračnega tlaka?

2. Voziček z maso 5,0 kg trči s hitrostjo 10,0 m/s v mirujoč voziček z maso 20,0 kg. Med vozičkoma je lahka vzmet s prožnostnim koeficientom $4{,}0 \cdot 10^4$ N/m. Poseben mehanizem poskrbi, da ostaneta vozička po trku sprijeta, vzmet pa skrčena. Vozička se gibljeta premo po vodoravnem tiru.

   a) Kolikšna je hitrost vozičkov po trku?
   b) Kolikšna je skupna kinetična energija vozičkov po trku?
   c) Za koliko je po trku vzmet skrčena?
   d) V nekem trenutku se vzmet sproži in vozička se ločita. Kolikšen delež prožnostne energije vzmeti se spremeni v kinetično energijo vozičkov, če lažji voziček po ločitvi obmiruje?
   e) Kolikšen pa bi bil ta delež, če bi se po ločitvi vozička gibala z nasprotno enakima hitrostma?

3. Anica obesi utež na strop z lahko neraztegljivo nitjo z dolžino 200 cm. Ko utež miruje, je 50 cm nad tlemi. Anica utež odkloni, da je kot med nitjo in navpičnico 30°, in jo nato spusti. Ko je utež v najnižji legi, se nit pretrga.

   a) Kolikšna je hitrost uteži v trenutku, ko se nit pretrga?
   b) Kolikšen je domet uteži?

   Anico zanima, kolikšno silo zdrži nit, zato eno krajišče drži v roki in s silomerom vleče drugo krajišče, dokler se nit ne pretrga. Po več meritvah ugotovi, da se nit vsakič pretrga pri sili 10 N.

   c) Kolikšna je masa uteži, ki jo je v primeru a) obesila na nit?
   d) Anica priveže na enako nit z enako dolžino veliko lažjo utež in jo odkloni, da je nit spet nagnjena od navpičnice za 30°. S kolikšno začetno hitrostjo mora Anica pognati utež, da se utež na drugi strani ravno dotakne stropa?
   e) Če bi imela utež iz primera d) dovolj veliko maso, bi se nit med gibanjem uteži pretrgala in utež bi padla na tla. Kolikšno maso bi morala imeti utež, da bi bil domet uteži največji?

56. FIZIKALNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE
Regijsko tekmovanje, 16. 3. 2018

Skupina II

1. Z dvorišča vzamemo kup umazanega snega, ki ga sestavljajo pesek, voda in ledeni kristali. Masa mešanice je 2,20 kg. Mešanico damo v lonec s prostornino 4,00 L. Ko k mešanici v loncu dolijemo 2,06 L tople vode, je lonec do roba poln, v njem sta le tekoča voda in pesek. Gostota peska je 2,30 kg/L.

   a) Kolikšna je bila masa peska v mešanici?

   b) Kolikšna je bila skupna masa tekoče vode in ledenih kristalčkov snega v mešanici?

   Temperatura vode, ki smo jo dolivali v lonec, je bila 35,0 °C, končna temperatura vsebine lonca je 4,0 °C. Specifična talilna toplota ledu je 334 kJ/kg, specifična toplota peska je 900 J/kgK. Toploto, potrebno za segrevanje lonca, zanemari.

   c) Koliko toplote je voda, ki smo jo dolili v lonec, oddala mešanici?

   d) Kolikšna je bila masa ledenih kristalčkov snega v mešanici snega, vode in peska?

2. Trije kondenzatorji so vsi sestavljeni iz enakih bakrenih kvadratnih plošč z robom z dolžino 5,0 cm, med ploščami je zrak. Razdalje med ploščami v posameznem kondenzatorju so po vrsti $d_1 =$ 1,5 mm za kondenzator C_1, $d_2 =$ 1,9 mm za kondenzator C_2 in $d_3 =$ 2,0 mm za kondenzator C_3. Kondenzatorja C_1 in C_2 vežemo zaporedno na vir enosmerne napetosti 2000 V.

   a) Kolikšna sta napetost med ploščama in naboj na kondenzatorju C_1 in na kondenzatorju C_2?

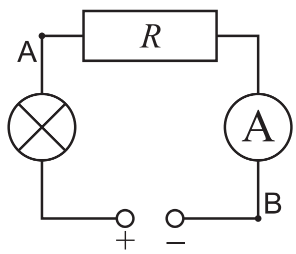
   b) V vezje dodatno vežemo vzporedno h kondenzatorjema C_1 in C_2 tretji kondenzator C_3. Kolikšna je jakost električnega polja v vsakem od kondenzatorjev C_1, C_2 in C_3?

   Vsi trije kondenzatorji imajo poseben mehanizem, s katerim lahko razdaljo med ploščama vsakega kondenzatorja enakomerno spreminjamo. V nekem trenutku sprožimo mehanizem vseh treh kondenzatorjev, da se razdalja med ploščama vsakega manjša s hitrostjo 1,0 mm/min.

   c) Kolikšne so po 30 s napetosti med ploščama kondenzatorjev C_1, C_2 in C_3?

   d) Ko električna poljska jakost preseže 3000 V/mm, v zraku pride do preboja. V katerem kondenzatorju in koliko časa po sprožitvi mehanizma pride do preboja?

3. V vezju na sliki je napetost na žarnici 3 V, gonilna napetost vira 6 V in tok skozi ampermeter 40 mA.



   a) Kolikšna sta upor žarnice R_z in upor upornika R?

   b) S kolikšno močjo sveti žarnica?

   c) S kolikšno močjo bi svetila žarnica, če bi imela konstantni upor R_z in bi jo priključili neposredno na vir?

   V resnici je upor žarnice v opazovanem območju tokov linearno odvisen od toka skozi žarnico: $R_z(I) = R_0 + kI$, kjer sta R_0 in k konstanti. Ko med točki A in B vežemo dodatni upornik z uporom R, teče skozi ampermeter tok 24 mA.

   d) Kolikšen je v tej vezavi upor žarnice in s kolikšno močjo sveti?

   e) Kolikšni sta vrednosti konstant R_0 in k?

   f) S kolikšno močjo sveti žarnica, ko jo priključimo neposredno na vir?

Skupina III

1. Dve enaki stanovanjski sobi dimenzij 5 m krat 10 m skupaj tvorita kvadratni tloris hiše s stranico 10 m. Štiri enake zunanje stene so debele 20 cm, zunanja temperatura je 0 °C. Debelina notranje stene med sobama ni znana. Ko v vsako od sob postavimo po en grelec, je temperatura v obeh sobah enaka 16 °C. Grelca imata enako moč. Toplotni tok skozi strop in tla zanemari.

   a) Kolikšna je moč vsakega grelca, če je višina stropa v sobah 2,5 m in toplotna prevodnost vseh zunanjih in notranjih sten 0,5 $\mathrm{W/m \cdot K}$?

   Stanovalca prve sobe zebe, zato vzame grelec iz druge sobe in ga vklopi poleg svojega grelca v prvi sobi. Temperatura v prvi sobi se po dolgem času povzpne na prijetnih 22 °C.

   b) Kolikšna je po dolgem času temperatura v drugi sobi?

   c) Kako debela je stena med sobama?

2. Fotografiramo s preprostim fotoaparatom z objektivom iz ene same zbiralne leče, ki je simetrična in ima oba krivinska radija enaka 40,0 mm. Lomni količnik stekla je odvisen od valovne dolžine svetlobe. V območju vidne svetlobe je dovolj dober linearni približek $n(\lambda) = n_0 - k\lambda$, kjer je $n_0 = 1{,}540$ in $k = 3{,}80 \cdot 10^{-2}/\mu\mathrm{m}$. Fotografirati želimo dva napisa, enega v rdeči in drugega v modri barvi, od katerih se v največjem deležu po vrsti odbijata svetlobi z valovnima dolžinama 650 nm in 450 nm. Rdeči napis fotografiramo na razdalji 50,0 cm pred objektivom, elektronika v fotoaparatu nastavi objektiv na tako razdaljo od svetlobnega senzorja v fotoaparatu, da je napis na senzorju fotoaparata oster. Zaslonka (to je vstopna odprtina objektiva, skozi katero svetloba vstopa v fotoaparat) je nastavljena na premer 4,00 mm.

   a) Kolikšna sta lomni količnik stekla leče in goriščna razdalja leče za rdečo svetlobo?

   b) Kolikšna je razdalja med lečo in svetlobnim senzorjem?

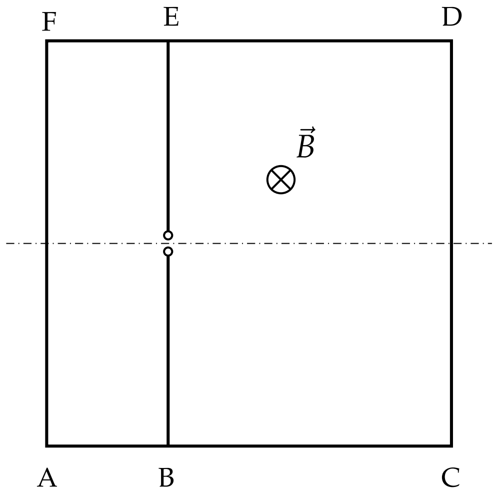
   c) Na kolikšni razdalji za lečo nastane ostra slika modrega napisa, ko je ta na enaki oddaljenosti 50,0 cm od objektiva kot rdeči napis?

   d) V krog s kolikšnim polmerom se preslika modra točka na optični osi objektiva, ko je 50,0 cm pred objektivom? Senzor fotoaparata ima 4000×3000 točk in je velikosti 8,00 mm $\times$ 6,00 mm. Približno koliko točk na fotografiji prekrije svetloba iz modre točke?

   e) Na kolikšno razdaljo pred objektiv moramo postaviti modri napis, da bosta oba napisa na fotografiji ostra?

Prosim, obrni list, na drugi strani je še ena naloga.

3. Kvadratni okvir s stranico 10 cm deli dodatna prečna žica EB v razmerju $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 7$. Vse žice imajo enak presek. V prečni žici je vgrajen majhen vir z napetostjo 3,0 V. Okvir je prosto vrtljiv okoli vodoravne osi, ki okvir razpolavlja. Postavimo ga v vodoravno magnetno polje z gostoto 1,0 T, tako da je polje pravokotno na os (glej sliko). Meter žice ima upor 1,0 Ω in maso 100 g.



a) Kolikšen tok teče v odseku AB in kolikšen v odseku BC?

b) V ravnovesni legi leži okvir v navpični ravnini. Na skici označi polariteto vira (+ in −), da bo okvir v stabilni ravnovesni legi pri usmerjenosti magnetnega polja v list, kot kaže slika.

c) Za primer b) izračunaj velikosti magnetnih sil, ki delujejo na odseke žic AB, BC, DE in EF, in smer vsake sile označi na skici.

d) Kolikšen navor deluje na okvir, če okvir zasučemo za kot 30° iz ravnovesne lege?

e) Določi frekvenco majhnih nihanj okvira okoli ravnovesne lege. Prispevek vira k vztrajnostnemu momentu okvira je zanemarljiv.

1. $2r_1 = 10$ cm, $2r_2 = 20$ cm, $V = 50$ L, $m = 2$ kg, $\rho = 1200$ kg/m^3.

a) $S_1 = \pi r_1^2 = 78{,}5$ cm^2, $S_2 = \pi r_2^2 = 4S_1 = 314$ cm^2,

Gladina v posodah sega do višine

$$h = \frac{V}{S_1 + S_2} = 127 \text{ cm}.$$

[1 t.]

b) Dodatna tlaka pod pokrovoma morata biti enaka:

$$\frac{mg}{S_1} = \frac{m_2 g}{S_2}, \qquad m_2 = m\,\frac{S_2}{S_1} = 8{,}0 \text{ kg}.$$

[2 t.]

c) Ključen razmislek pri tem in naslednjih vprašanjih je v ugotovitvi, da sta v ravnovesju tlaka na dnu obeh posod enaka. To pomeni, da morata biti enaka tudi tlaka v kapljevini na enakih višinah, merjenih od dna posode. Pri tem in naslednjem vprašanju izenačimo tlaka na višini gladine v ožji posodi.

Hidrostatski tlak zaradi višinske razlike med širšo in ožjo posodo uravnovesi dodatni tlak zaradi uteži na pokrovu:

$$\frac{mg}{S_1} = \rho g \Delta h, \qquad \Delta h = \frac{m}{\rho S_1} = 21 \text{ cm}.$$

[2 t.]

d) V tem primeru upoštevamo še dodatni tlak zaradi uteži na pokrovu širše posode:

$$\frac{mg}{S_1} = \rho g \Delta h' + \frac{mg}{S_2}, \qquad \Delta h' = \frac{m}{\rho}\left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) = 16 \text{ cm}.$$

[2 t.]

e) Izenačimo tlaka na dnu ožje in širše posode; če s h_1 označimo višino kapljevine v ožji in s h_2 višino v širši posodi, velja

$$\rho g h_1 + \frac{mg}{S_1} = \rho g h_2 + \frac{mg}{S_2}.$$

Pri d) smo že izračunali razliko višin, $h_2 - h_1 = \Delta h'$. Vsota prostornin kapljevine v ožji in širši posodi je enaka podani prostornini kapljevine:

$$V = S_1 h_1 + S_2 h_2 = S_1 h_1 + S_2(h_1 + \Delta h') = (S_1 + S_2)h,$$

pri čemer smo v zadnjem koraku upoštevali enačbo pri a). Sledi

$$(S_1 + S_2)h_1 = (S_1 + S_2)h - S_2 \Delta h', \qquad h_1 = h - \frac{S_2}{(S_1 + S_2)}\,\Delta h' = 115 \text{ cm}.$$

$$\Delta p = \rho g h_1 + \frac{mg}{S_1} = 13{,}5 \text{ kPa} + 2{,}5 \text{ kPa} = 16{,}0 \text{ kPa} \approx 16 \text{ kPa}.$$

Do enakega rezultata pridemo, če računamo tlak v drugi posodi:

$$h_2 = h + \frac{S_1}{(S_1 + S_2)}\,\Delta h' = 131 \text{ cm}.$$

$$\Delta p = \rho g h_2 + \frac{mg}{S_2} = 15{,}4 \text{ kPa} + 0{,}6 \text{ kPa} = 16{,}0 \text{ kPa} \approx 16 \text{ kPa}.$$

[3 t.]

2. $m_1 = 5{,}0$ kg, $m_2 = 20{,}0$ kg, $v_1 = 10$ m/s, $k = 4,0 \cdot 10^4$ N/m.

a) Ohrani se skupna gibalna količina obeh vozičkov:

$$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2)v\,, \qquad v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 2{,}0 \text{ m/s}\,.$$

[2 t.]

b) Kinetična energija po trku:

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 50 \text{ J}\,.$$

[1 t.]

c) Razlika kinetičnih energij pred in po trku se pretvori v prožnostno energijo vzmeti

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}v_1^2 = 200 \text{ J}\,,$$

$$x = \sqrt{\frac{m_1 m_2 v_1^2}{k(m_1 + m_2)}} = 10 \text{ cm}\,.$$

[2 t.]

d) Ohrani se skupna gibalna količina

$$(m_1 + m_2)v = m_2 v_2 + 0\,, \qquad v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v}{m_2} = 2{,}5 \text{ m/s}\,.$$

Sproščena energija vzmeti je enaka razliki kinetične energije na koncu in kinetične energije, izračunane pri b):

$$\Delta W = \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 62{,}5 \text{ J} - 50 \text{ J} = 12{,}5 \text{ J}$$

in

$$\eta = \frac{\Delta W}{\frac{1}{2}kx^2} = 6{,}25\ \%\,.$$

[2 t.]

e) Po sprostitvi vzmeti velja $v_2' = v'$ in $v_1' = -v'$ in iz ohranitve skupne gibalne količine sledi

$$(m_1 + m_2)v = m_2 v_2' + m_1 v_1' = (m_2 - m_1)v'\,, \qquad v' = \frac{(m_1 + m_2)v}{m_2 - m_1} = 3{,}3 \text{ m/s}\,.$$

Podobno kot pri d) sledi

$$\Delta W' = \tfrac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 {v_2'}^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)({v'}^2 - v^2) = 139 \text{ J} - 50 \text{ J} = 89 \text{ J}$$

in

$$\eta' = \frac{\Delta W'}{\frac{1}{2}kx^2} = 44\ \%\,.$$

[3 t.]

3. $l = 200$ cm, $h = 50$ cm, $\varphi = 30°$, $F_0 = 10$ N.

a) Ko utež odmaknemo za kot φ, je ta dvignjena nad najnižjo točko za $\Delta h = l(1 - \cos\varphi)$. Hitrost izračunamo iz ohranitve vsote potencialne in kinetične energije

$$mgl(1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)} = 2{,}29 \text{ m/s} \approx 2{,}3 \text{ m/s}.$$

[2 t.]

b) Vodoravni met z višine h: $t = \sqrt{2h/g} = 0{,}3194$ s$\approx 0{,}32$ s. Od tu je domet d enak

$$d = vt = 2\sqrt{hl(1 - \cos\varphi)} = 0{,}732 \text{ m} \approx 73 \text{ cm}.$$

[2 t.]

c) V najnižji točki mora rezultanta sil na utež, torej vsota sile niti F in sile teže mg, kazati proti osi vrtenja. Če naj se nit ne strga, mora veljati $F < F_0$ in mora biti hkrati rezultanta sil enaka centripetalni sili za kroženje s hitrostjo v po krožnici s polmerom l:

$$F - mg = m\frac{v^2}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad mg + m\frac{v^2}{l} = F \leq F_0\,.$$

Nit se strga ob pogoju $F = F_0$, iz česar dobimo

$$m = \frac{F_0}{g(3 - 2\cos\varphi)} = 0{,}805 \text{ kg} \approx 800 \text{ g}.$$

[3 t.]

d) Podobno kot v primeru a) uporabimo ohranitev vsote potencialne in kinetične energije, le da ima sedaj v začetni legi utež začetno hitrost v_0

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = mgl \qquad \Longrightarrow \qquad v_0 = \sqrt{2gl\cos\varphi} = 5{,}83 \text{ m/s} \approx 5{,}8 \text{ m/s}.$$

[1 t.]

e) Z razmislekom ugotovimo, da bo domet maksimalen pri taki masi m_1, da se bo nit strgala, ko bo utež v najnižji točki. Razmislek gre takole. Če je $m < m_1$, se nit ne strga in "domet" je nič. Če je $m > m_1$, ima utež, ko se strga, manjšo hitrost kot v najnižji točki nihaja, ker ima še nekaj potencialne energije. Poleg tega ima hitrost komponento navzdol, kar pomeni, da je vodoravna komponenta hitrosti še manjša, čas leta pa približno enak, saj pada z le malo večje višine z majhno začetno komponento hitrosti navzdol. Rezultat je najbolj očiten za pretrg tik pred najnižjo lego, ko je drugačna predvsem smer hitrosti, začetna višina pa je skoraj enaka kot v najnižji točki in je zato očitno, da je domet manjši kot pri pretrgu niti v najnižji točki.

Račun je kratek, hitrost u v najnižji legi je enaka, kot da bi utež zanihala izpod stropa

$$u = \sqrt{2gl} \quad \text{in} \quad m_1 g + m_1\frac{u^2}{l} = F_0 \qquad \Longrightarrow \qquad m_1 = \frac{F_0}{3g} = 340 \text{ g}.$$

[2 t.]

1. $m = 2{,}20$ kg, $V = 4{,}00$ L, $V_1 = 2{,}06$ L, $\rho_p = 2{,}30$ kg/L, $c_p = 900$ J/kgK, $q_t = 334$ kJ/kg, $T_1 = 35{,}0\,°$C, $T_k = 4{,}0\,°$C, $T_0 = 0\,°$C.

   a) Maso peska m_p izračunamo iz podatkov o masah in volumnih v prvem delu naloge. Z m_s označimo maso ledenih kristalčkov snega, z m_v maso tekoče vode in z ρ_v gostoto tekoče vode. Ker je na koncu vsa voda staljena, zdaj še ne moremo ločiti vode in snega, zato obe masi pišemo skupaj v oklepaju, da se to bolje vidi. Velja

$$m = m_p + (m_v + m_s) \qquad \text{in} \qquad V - V_1 = V_p + V_{v+s} = \frac{m_p}{\rho_p} + \frac{(m_v + m_s)}{\rho_v}\ ,$$

   kjer V_p označuje prostornino peska in V_{v+s} prostornino vode, ki je nastala iz tekoče vode in ledenih kristalčkov snega v mešanici, ko se je sneg stalil. Iz prve enačbe izrazimo $(m_v + m_s) = m - m_p$, vstavimo to v drugo enačbo in dobimo

$$m_p = \frac{m - \rho_v(V - V_1)}{\rho_p - \rho_v}\rho_p = 0{,}46 \text{ kg}.$$

   [4 t.]

   b) Iz prve enačbe dobimo $(m_v + m_s) = m - m_p = 1{,}74$ kg.

   [1 t.]

   c) Dolita topla voda se je ohladila s T_1 na T_k in oddala Q toplote

$$Q = \rho_v V_1 c_v (T_1 - T_k) = 268{,}212 \text{ kJ} \approx 268 \text{ kJ},$$

   kjer je c_v specifična toplota vode.

   [2 t.]

   d) Toplota Q, ki jo odda topla voda, gre za taljenje snega z maso m_s, segrevanje vse vode v mešanici z maso $(m_v + m_s)$ in segrevanje peska z maso m_p. Mešanica ima na začetku temperaturo T_0, ker je v njej taleči se sneg. Dobimo

$$Q = m_s q_t + (m_v + m_s)c_v(T_k - T_0) + m_p c_p (T_k - T_0)$$

   in od tu

$$m_s = \frac{Q - [(m_v + m_s)c_v + m_p c_p]\,(T_k - T_0)}{q_t} = 0{,}71055 \text{ kg} \approx 0{,}71 \text{ kg}.$$

   [3 t.]

2. $a = 5{,}0$ cm, $d_1 = 1{,}5$ mm, $d_2 = 1{,}9$ mm, $d_3 = 2{,}0$ mm, $U_0 = 2000$ V, $v = 1{,}0$ mm/min, $t_c = 30$ s, $E_0 = 3000$ V/mm.

a) Na zaporedno vezanih kondenzatorjih velja $e_1 = e_2$, torej

$$C_1U_1 = C_2U_2\,, \qquad \frac{\varepsilon_0 a^2 U_1}{d_1} = \frac{\varepsilon_0 a^2 U_2}{d_2}\,, \qquad \frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2}\,.$$

Padci napetosti se seštevajo, $U_1 + U_2 = U_0$. Iz obeh enačb sledi:

$$U_1 = \frac{d_1}{(d_1+d_2)}\,U_0 = 880\ \mathrm{V}\,, \qquad U_2 = \frac{d_2}{(d_1+d_2)}\,U_0 = 1120\ \mathrm{V}$$

in

$$e_1 = e_2 = \frac{\varepsilon_0 a^2\, U_1}{d_1} = \frac{\varepsilon_0 a^2 U_0}{d_1+d_2} = 13\ \mathrm{nAs}\,.$$

[3 t.]

b) Za električni poljski jakosti na prvem in drugem kondenzatorju velja

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{d_1 U_0}{d_1(d_1+d_2)} = \frac{U_0}{(d_1+d_2)} = 588\ \mathrm{kV/m} \approx 590\ \mathrm{kV/m}$$

in je enaka električni poljski jakosti v drugem kondenzatorju, $E_2 = E_1$. Tretji kondenzator je na napetosti vira in velja

$$E_3 = \frac{U_0}{d_3} = 1000\ \mathrm{kV/m}\,.$$

[2 t.]

c) Po 30 s se vse tri razdalje zmanjšajo za $\Delta d = vt_c = 0{,}5$ mm. Novi napetosti na C_1 in C_2 sta

$$U_1 = \frac{d_1 - \Delta d}{(d_1+d_2-2\Delta d)}\,U_0 = 830\ \mathrm{V}\,, \qquad U_2 = \frac{d_2 - \Delta d}{(d_1+d_2-2\Delta d)}\,U_0 = 1170\ \mathrm{V}\,,$$

na kondenzatorju C_3 pa se napetost ne spremeni.
[2 t.]

d) Čas preboja t_1 v kondenzatorju C_1 določimo z zahtevo

$$E_0 = \frac{U_0}{d_1+d_2-2vt_1}\,, \qquad t_1 = \frac{1}{2v}\left(d_1 + d_2 - \frac{U_0}{E_0}\right) = 1{,}37\ \mathrm{min} = 82\ \mathrm{s}\,.$$

Kot smo ugotovili že pri b), je električna poljska v kondenzatorju C_2 enaka tisti v C_1, zato pride do preboja v obeh kondenzatorjih hkrati. V primeru C_3 pa velja

$$E_0 = \frac{U_0}{d_3 - vt_3}\,, \qquad t_3 = \frac{1}{v}\left(d_3 - \frac{U_0}{E_0}\right) = 1{,}33\ \mathrm{min} = 80\ \mathrm{s}\,.$$

Do preboja pride torej prej v kondenzatorju C_3, in sicer 1,33 minute (80 s) po sprožitvi mehanizma.
[3 t.]

3. $U_z = 3$ V, $U_0 = 6$ V, $I_1 = 40$ mA, $I_2 = 24$ mA.

a) Skozi žarnico in upornik teče enak tok I_1, napetost na uporniku je $U_1 = U_0 - U_z = 3$ V. Upor žarnice je zaradi $U_z = U_1$ enak uporu upornika

$$R_z = \frac{U_z}{I_1} = \frac{U_0 - U_z}{I_1} = R = 75\ \Omega.$$

[2 t.]

b) Moč je enaka produktu toka skozi žarnico in napetosti na žarnici

$$P_z = I_1 U_z = 120\ \text{mW}.$$

[1 t.]

c) Podobno kot pri b) je moč produkt toka in napetosti, le da bi bil tok sedaj enak $I_c = U_0/R_z$, od koder dobimo

$$P_c = I_c U_0 = \frac{U_0}{R_z} U_0 = \frac{U_0^2}{R_z} = 480\ \text{mW}.$$

[1 t.]

d) Tok skozi žarnico I_d je enak vsoti tokov skozi vsakega od dveh vzporedno vezanih upornikov $I_d = 2I_2 = 48$ mA. Napetost na žarnici U_d je enaka razliki napetosti vira in napetosti na vzporedno vezanih upornikih $U_d = U_0 - I_2 R = 4{,}2$ V. Upor žarnice je torej

$$R_d = \frac{U_d}{I_d} = \frac{U_0 - I_2 R}{2I_2} = \frac{4{,}2\ \text{V}}{48\ \text{mA}} = 87{,}5\ \Omega.$$

Žarnica sveti z močjo

$$P_d = I_d U_d = 201{,}6\ \text{mW} \approx 200\ \text{mW}.$$

[2 t.]

e) Iz meritev z enim upornikom R in z dvema vzporedno vezanima upornikoma R dobimo dva para podatkov o uporu žarnice pri danem toku skozi žarnico: (I_a, R_a) in (I_d, R_d), kjer označimo z $R_a = 75\ \Omega$ in $I_a = 40$ mA po vrsti upor žarnice in tok skozi žarnico iz a) dela naloge. Neznana koeficienta v linearni odvisnosti $R_z(I) = R_0 + kI$ dobimo kot

$$k = \frac{R_d - R_a}{I_d - I_a} = \frac{12{,}5\ \Omega}{8\ \text{mA}} = 1562{,}5\ \Omega/\text{A} \approx 1{,}56\ \Omega/\text{mA}$$

in

$$R_0 = R_a - kI_a = R_d - kI_d = 12{,}5\ \Omega.$$

[2 t.]

f) Postopamo podobno kot pri c) delu naloge, le s to razliko, da je upor žarnice odvisen od toka. Iz Ohmovega zakona dobimo kvadratno enačbo za tok

$$U_0 = IR_z(I) = I(R_0 + kI) \qquad \Longrightarrow \qquad kI^2 + R_0 I - U_0 = 0$$

z eno samo smiselno rešitvijo (v drugi rešitvi bi bil tok negativen)

$$I = -\frac{R_0}{2k} + \sqrt{\left(\frac{R_0}{2k}\right)^2 + \frac{U_0}{k}} = -4\ \text{mA} + 62{,}097\ \text{mA} = 58{,}097\ \text{mA} \approx 58\ \text{mA}.$$

Moč žarnice je

$$P_e = IU_0 = 348{,}6\ \text{mW} \approx 350\ \text{mW}.$$

[2 t.]

1. $a = 10$ m, $D = 20$ cm, $h = 2{,}5$ m, $\lambda = 0{,}5$ W/m·K, $T = 16\,°\mathrm{C}$, $T_1 = 22\,°\mathrm{C}$, $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$.

a) Toplota iz vsake sobe uhaja skozi tri zunaje stene z dolžinami $a/2$, a in $a/2$. Dobimo

$$j = \lambda\frac{T - T_0}{D} \qquad \text{in} \qquad S = h\left(\frac{a}{2} + a + \frac{a}{2}\right) = 2ah \qquad \Longrightarrow \qquad P = jS = 2ah\lambda\frac{T - T_0}{D} = 2\ \mathrm{kW}.$$

[3 t.]

b) Ko sta oba grelca v prvi sobi s temperaturo T_1, oddaja prva soba toploto, ki jo prejema od obeh grelcev, v sosednjo sobo s temperaturo T_2 skozi steno s površino ah in z neznano debelino d ter skozi iste tri zunanje stene kot prej. Energijska bilanca da

$$2P = 2ah\lambda\frac{T_1 - T_0}{D} + ah\lambda\frac{T_1 - T_2}{d}\ .$$

Podobno za drugo sobo brez grelcev velja, da prejema toploto skozi vmesno steno iz prve sobe in jo vso oddaja skozi tri zunanje stene. Energijska bilanca da

$$2ah\lambda\frac{T_2 - T_0}{D} = ah\lambda\frac{T_1 - T_2}{d}\ .$$

Iz druge enačbe izrazimo člen z neznano debelino stene d in ga nesemo v prvo enačbo. V prvo enačbo vstavimo še izraz za moč iz a) dela naloge in dobimo

$$4ah\lambda\frac{T - T_0}{D} = 2ah\lambda\frac{T_1 - T_0}{D} + 2ah\lambda\frac{T_2 - T_0}{D}$$

in od tu

$$2T = T_1 + T_2 \qquad \Longrightarrow \qquad T_2 = 2T - T_1 = 10\,°\mathrm{C}.$$

[5 t.]

c) Iz enačbe za energijsko bilanco druge sobe izrazimo še debelino vmesne stene

$$2\,\frac{(2T - T_1) - T_0}{D} = \frac{T_1 - (2T - T_1)}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad d = \left(\frac{T_1 - T}{2T - T_1 - T_0}\right) D = 12\ \mathrm{cm}.$$

[2 t.]

2. $R = 40{,}0$ mm, $n_0 = 1{,}540$, $k = 3{,}80 \cdot 10^{-2}/\mu$m, $\lambda_1 = 650$ nm, $\lambda_2 = 450$ nm, $a = 50{,}0$ cm, $r = 2{,}00$ mm.

a) Lomni količnik za rdečo svetlobo je $n_1 = n_0 - k\lambda_1 = 1{,}5153 \approx 1{,}515$. Od tu izračunamo goriščno razdaljo leče f_1 za rdečo barvo

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\frac{2}{R} = 25{,}765\ \mathrm{m}^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad f_1 = 38{,}81\ \mathrm{mm}.$$

[2 t.]

b) Iz enačbe leče in oddaljenosti napisa od leče a izračunamo, kje za lečo nastane ostra slika rdečega napisa

$$b_1 = \frac{af_1}{a - f_1} = 42{,}079\ \mathrm{mm} \approx 42{,}1\ \mathrm{mm}.$$

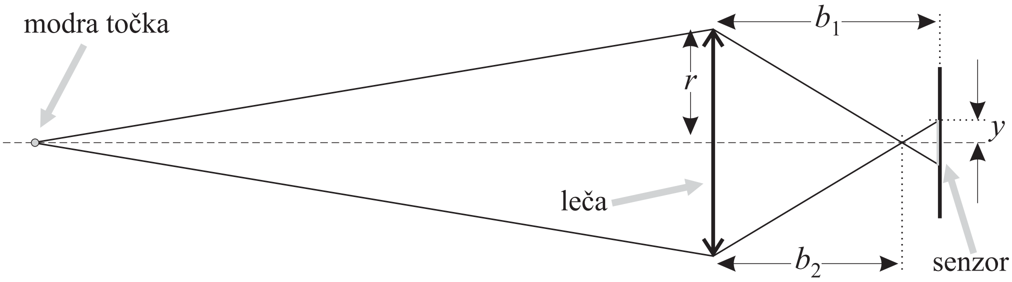
[1 t.]

c) Analogno kot pri a) delu naloge izračunamo lomni količnik $n_2 = n_0 - k\lambda_2 = 1{,}5229 \approx 1{,}523$ in goriščno razdaljo $f_2^{-1} = 26{,}145\ \mathrm{m}^{-1}$ oziroma $f_2 = 38{,}25$ mm za modro svetlobo. Končno izračunamo še, kje za lečo nastane ostra slika modrega napisa

$$b_2 = \frac{af_2}{a - f_2} = 41{,}416\ \mathrm{mm} \approx 41{,}4\ \mathrm{mm}.$$

[1 t.]

d)



Modra točka na razdalji a pred lečo se preslika v točko na razdalji b_2 za lečo. Svetlobni senzor je na razdalji b_1 za lečo, zato se vsa svetloba, ki je vstopila skozi zaslonko s polmerom r, na senzorju razmaže v krog s polmerom y. Iz podobnih trikotnikov na sliki dobimo

$$\frac{r}{b_2} = \frac{y}{b_1 - b_2} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \left(\frac{b_1 - b_2}{b_2}\right) r = 31{,}98\ \mu\mathrm{m} \approx 32\ \mu\mathrm{m}.$$

Iz podatkov o senzorju: 8,00 mm ustreza 4000 točkam oziroma 6,00 mm ustreza 3000 točkam izračunamo velikost točke x na senzorju $x = 2\ \mu$m. Modra točka se na senzorju razmaže v krog s površino $S = \pi y^2 \approx 3213\ \mu\mathrm{m}^2$. To ustreza približno N točkam

$$N = \frac{\pi y^2}{x^2} = 803{,}2 \approx 800.$$

[4 t.]

e) Spet uporabimo enačbo leče, a tokrat poznamo razdaljo med sliko modrega napisa in lečo, ki je tokrat enaka b_1, iščemo pa oddaljenost napisa od leče

$$a_2 = \frac{b_1 f_2}{b_1 - f_2} = 420{,}17\ \mathrm{mm} \approx 420\ \mathrm{mm}.$$

Modri napis mora biti torej 42 cm pred lečo oziroma 8 cm bližje fotoaparatu kot rdeči napis.

[2 t.]

3. $a = 10$ cm, $l_{AB} = 3$ cm, $l_{BC} = 7$ cm, $R/l = 1\ \Omega/\mathrm{m}$, $m/l = 100$ g/m, $B = 1$ T, $U = 3$ V, $\varphi = 30°$.

a) Upori odsekom merijo $R_1 = R_{BCDE} = 0{,}24\ \Omega$, $R_2 = R_{BAFE} = 0{,}16\ \Omega$, $R_n = R_{BE} = 0{,}10\ \Omega$. Vezje sestavljajo vzporedno vezana upornika z upori R_1 in R_2, zaporedno vezana z R_n na napetostni vir. Nadomestni upor vezja je

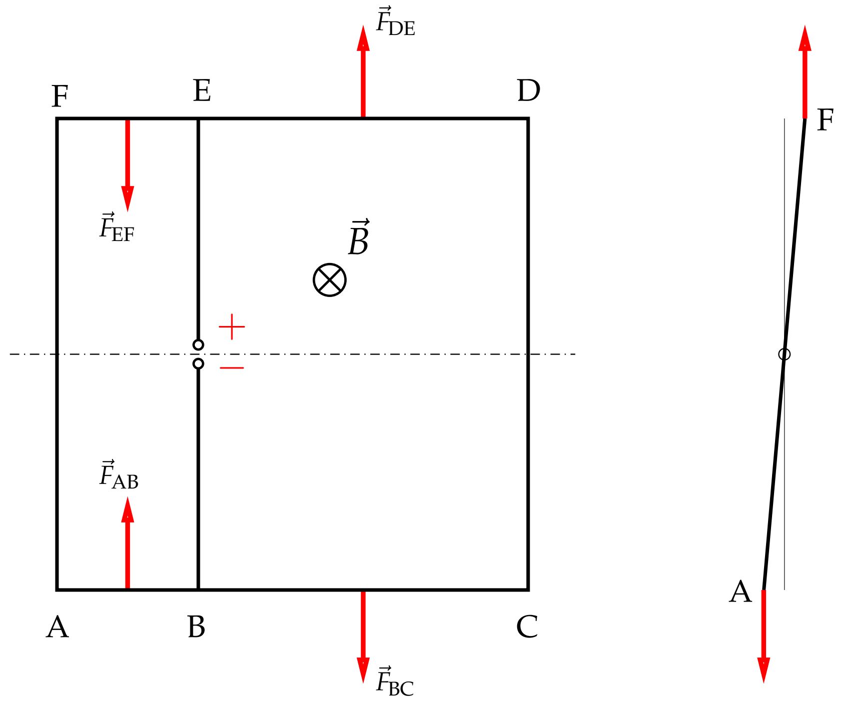
$$R = R_n + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = R_n + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}196\ \Omega.$$

Skozi izvir teče tok $I = U/R = 15{,}3$ A, ki se razveji v tokova $I_1 \equiv I_{BCDE}$ in $I_2 \equiv I_{BAFE}$ v razmerju R_2 proti R_1:

$$I_1 \equiv I_{BC} = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2} = 6{,}1\ \mathrm{A}\,, \qquad I_2 \equiv I_{AB} = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = 9{,}2\ \mathrm{A}\,.$$

[3 t.]

b)



Na desni skici je prikazan stranski pogled na okvir, ko je le-ta zasukan za majhen kot iz ravnovesne lege. Lega je stabilna, saj prikazana dvojica sil zasuče okvir nazaj v mirovno lego. Če bi obrnili smer obeh sil, bi se okvir zavrtel za 180°. Zato mora biti rezultanta sil na spodnjo stranico usmerjena navzdol, kar pomeni, da mora biti sila na stranico BC, ki je večja od sile na stranico AB, tudi usmerjena navzdol. To pa pomeni, da teče tok v smeri od točke C proti B, od B proti E in od A proti B, torej je polariteta vira takšna, kot je prikazana na levi sliki.
[2 t.]

c) Velikosti sil, označenih na sliki, so:

$$F_{BC} = F_{DE} = I_1 l_{BC} B = 0{,}429\ \mathrm{N}\,, \qquad F_{AB} = F_{EF} = I_2 l_{AB} B = 0{,}276\ \mathrm{N}\,.$$

[2 t.]

d) Ročica je $\frac{1}{2}a$ in enaka za vse sile, izračunane pri c):

$$M = \tfrac{1}{2}a(F_{\mathrm{BC}} + F_{\mathrm{DE}} - (F_{\mathrm{AB}} + F_{\mathrm{EF}}))\sin\varphi = a(I_1 l_{\mathrm{BC}} - I_2 l_{\mathrm{AB}})B\sin\varphi = 7{,}6\cdot 10^{-3}\ \mathrm{Nm}\,.$$

[1 t.]

e) Za majhne kote φ lahko zapišemo

$$M = D\sin\varphi \approx D\varphi\,.$$

Dobili smo enako odvisnost navora od kota, kot pri sučnem nihalu. Direkcijsko konstanto izluščimo iz primera d):

$$D = a(I_1 l_{\mathrm{BC}} - I_2 l_{\mathrm{AB}})B = 0{,}015\ \mathrm{Nm}\,.$$

Za izračun frekvence nihanja potrebujemo še vztrajnostni moment okvira. Sestavljajo ga tri stranice (palice) z dolžino a in masami po $m = 10$ g, vrtljive okoli osi skozi središče, in dve stranici, vzporedni z osjo na razdalji $\frac{1}{2}a$ od osi.

$$J = 3\,\frac{1}{12}\,m\,a^2 + 2\,m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\,ma^2 = 7{,}5\cdot 10^{-5}\ \mathrm{kgm}^2\,.$$

Za frekvenco nihanja dobimo

$$\nu = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J}} = 2{,}3\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

[2 t.]