Brihtnež

Elektronska revija za mlade matematike

Letnik 0, številka 5

© Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

http://www.dmfa.si/Brihtnez/BrihtnezIndex.html

Vsebina

Mednarodna matematična olimpiada 2003

Na *44. mednarodni matematični olimpiadi*, ki je bila od 7. do 19. julija v Tokiu (Japonska), so Slovenijo zastopali Rok Končina s Šolskega centra Celje - Splošne in strokovne gimnazije Lava, Ivo List in Mitja Trampuš z Gimnazije Bežigrad, Nik Stopar s Srednje šole Veno Pilon Ajdovščina, Janez Šter z Gimnazije Želimlje in Janoš Vidali z Gimnazije Koper.

Janez Šter je osvojil pohvalo.

Naloge

1. Naj bo A podmnožica množice $S = \{1, 2, 3, \ldots, 1000000\}$, ki vsebuje natančno 101 element. Dokaži, da obstajajo taka števila t_1, t_2, ..., t_{100} iz množice S, da so množice
$$A_j = \{x + t_j;\ x \in A\} \text{ za } j = 1, 2, \ldots, 100$$
paroma disjunktne.

2. Poišči vse pare (a, b) naravnih števil, za katere je $\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ naravno število.

3. Dan je konveksen šestkotnik, v katerem ima vsak par nasprotnih stranic naslednjo lastnost: razdalja med njunima središčima je $\sqrt{3}/2$-krat večja od vsote njunih dolžin. Dokaži, da so vsi notranji koti tega šestkotnika enaki.
(Konveksni šestkotnik $ABCDEF$ ima tri pare nasprotnih stranic: AB in DE, BC in EF ter CD in FA.)

4. Dan je tetivni štirikotnik $ABCD$. Naj bodo P, Q in R nožišča pravokotnic iz točke D na premice AB, BC in CA. Dokaži, da je $|RP| = |RQ|$ natanko tedaj, ko se simetrali kotov $\sphericalangle ABC$ and $\sphericalangle CDA$ sekata na premici AC.

5. Naj bo $n > 2$ naravno število in x_1, x_2, ..., x_n realna števila z lastnostjo $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$.

   (a) Dokaži, da je
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

   (b) Dokaži, da v gornji neenakosti velja enačaj natanko tedaj, ko je zaporedje x_1, x_2, ..., x_n aritmetično.

6. Dokaži, da za vsako praštevilo p obstaja tako praštevilo q, da število $n^p - p$ ni deljivo s q za nobeno naravno število n.

Rešitve nalog

1. Oglejmo si množico $D = \{x-y;\ x,y \in A\}$. Množica D ima $101 \cdot 100 + 1 = 10101$ elementov. Iz definicije množice D vidimo, da imata množici $\{x+t_i;\ x \in A\}$ in $\{x+t_j;\ x \in A\}$ neprazen presek natanko tedaj, ko je $t_i - t_j \in D$. Torej moramo izbrati 100 števil tako, da nobeni dve izmed njihovih razlik ne bosta ležali v D.

   Števila bomo poiskali induktivno. Prvo število izberemo poljubno. Recimo, da smo k, $k \le 99$, števil že izbrali. Če smo število x že izbrali, ne smemo izbrati nobenega števila iz množice $\{x+d;\ d \in D\}$. Ko smo torej že izbrali k števil, jih je največ $10101k \le 999999$ prepovedanih in lahko izberemo še $(k+1)$-vo število.

2. Naj bo (a,b) tak par naravnih števil, da je število $k = \frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ naravno. Ker je $k > 0$, je $2ab^2 - b^3 + 1 > 0$, kar nam da $a > \frac{b^3-1}{2b^2}$ in $a \ge \frac{b}{2}$. Ker je $k \ge 1$, je $a^2 \ge b^2(2a-b)+1$ in $a^2 > b^2(2a-b) \ge 0$. Torej je
$$a > b \quad \text{ali} \quad 2a = b. \tag{1}$$
   Enačbo $k = \frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ lahko preoblikujemo v kvadratno enačbo za a: $a^2 - 2kab^2 + k(b^3-1) = 0$. Ta enačba ima rešitvi a_1 in a_2, ki po Vietovih formulah zadoščata pogojema
$$a_1 + a_2 = 2kb^2 \quad \text{in} \quad a_1 a_2 = k(b^3-1).$$
   Iz pogoja $a_1 + a_2 = 2kb^2$ vidimo, da je a_1 celo število natanko tedaj, ko je a_2 celo število. Nadalje smemo privzeti, da je $a_1 \ge a_2$. Torej je $a_1 \ge kb^2 > 0$. Ker je $a_1 a_2 = k(b^3-1)$, sledi
$$0 \le a_2 = \frac{k(b^3-1)}{a_1} \le \frac{k(b^3-1)}{kb^2} < b.$$
   Skupaj z (1) to pomeni, da je lahko le $a_2 = 0$ ali $a_2 = \frac{b}{2}$ in b sodo število.

   Če je $a_2 = 0$, je $b^3 - 1 = 0$. Torej je $b = 1$ in $a_1 = 2k$.

   Če je $a_2 = \frac{b}{2}$, je $k = \frac{b^2}{4}$ in $a_1 = \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2}$.

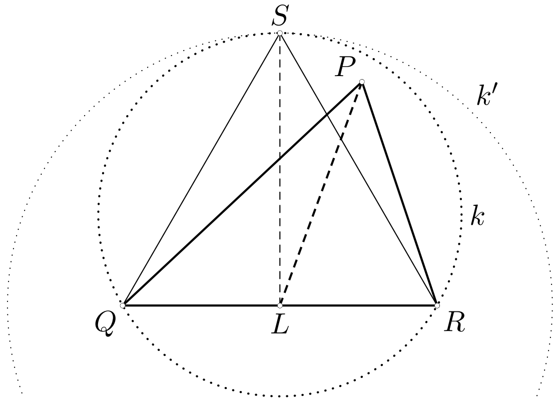
   Vse rešitve so torej pari oblike $(2l, 1)$, $(l, 2l)$ in $(8l^4 - l, 2l)$, kjer l preteče vsa naravna števila.

   Opomba. Zakaj je bilo potrebno komentirati, da je a_1 celo število natanko tedaj, ko je a_2 celo število? Po predpostavki je a (ena) celoštevilska rešitev kvadratne enačbe in v splošnem ni nujno, da je tudi druga rešitev celoštevilska.

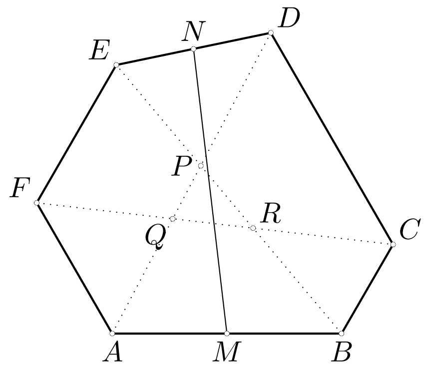
3. Dokažimo najprej lemo:

   Dan je trikotnik QRP s kotom $\sphericalangle QPR \ge 60°$. Naj bo L razpolovišče stranice QR. Potem je $|PL| \le \frac{\sqrt{3}}{2}|QR|$, kjer velja enakost natanko tedaj, ko je trikotnik PQR enakostraničen.

   Dokaz leme. Konstruirajmo enakostranični trikotnik QRS, ki leži na istem bregu premice kot trikotnik PQR in mu očrtajmo krožnico k. Potem leži krožnica k v celoti znotraj kroga k' s središčem v L in polmerom $|LS|$. Sledi
$$|PL| \le |SL| = \tfrac{\sqrt{3}}{2}|QR|.$$



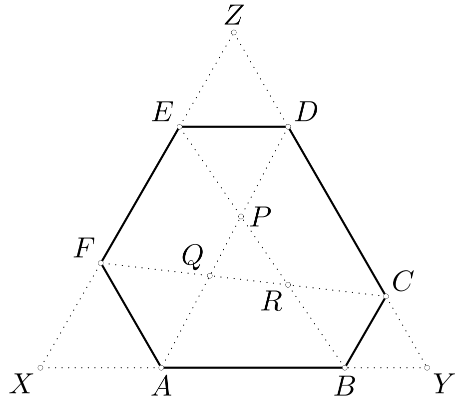
   Enakost velja natanko tedaj, ko je $P = S$; torej natanko tedaj, ko je trikotnik SQR enakostraničen.



Dokažimo sedaj trditev naloge. Glavne diagonale šestkotnika $ABCDEF$ se sekajo v treh (ne nujno različnih točkah) in vsaj dve med diagonalami tvorita kot, ki ni manjši od $60°$. Privzemimo torej, da se diagonali AD in BE sekata pod kotom, ki meri vsaj $60°$. Po lemi je $|PM| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$ in $|PN| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|DE|$. Po trikotniški neenakosti v trikotniku PMN velja $|MN| \leq |PM| + |PN|$ in odtod

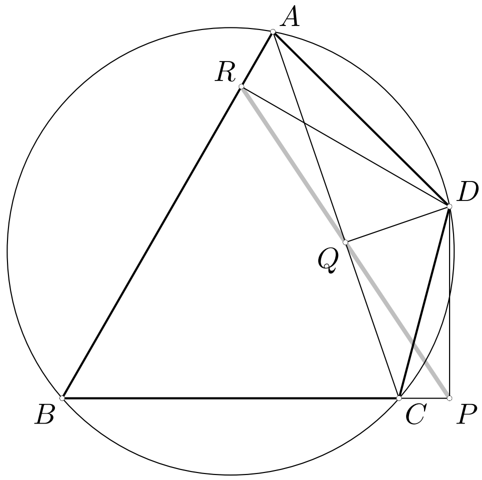
$$|MN| \leq |PM| + |PN| \leq \tfrac{\sqrt{3}}{2}(|AB| + |DE|) = |MN|,$$

kjer velja zadnji enačaj po predpostavki naloge. Torej je $|MN| = |PM| + |PN|$, kar pomeni, da je tudi $|PM| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$ in $|PN| = \frac{\sqrt{3}}{2}|DE|$. Torej sta trikotnika ABP in EDP enakostranična, diagonali AD in BE pa se sekata pod kotom $60°$.



Diagonala CF seka vsaj eno od diagonal AD in DE (recimo AD) pod kotom, ki ni manjši od $60°$. Po podobnem razmisleku kot zgoraj izpeljemo, da sta trikotnika AQF in DQC enakostranična, diagonali AD in CF pa se v točki R sekata pod kotom $60°$. Torej se tudi diagonali BE in CF sekata pod kotom $60°$. Še tretjič uporabimo lemo in nazadnje izpeljemo, da sta tudi trikotnika BCR in FRE enakostranična.

Torej smo pokazali, da so vsi notranji koti šestkotnika $ABCDEF$ enaki $120°$. Vse šestkotnike z opisano lastnostjo dobimo npr. tako, da ob ogliščih enakostraničnega trikotnika (recimo XYZ) odrežemo (ne nujno skladne) enakostranične trikotnike XAF, BYC in EDZ.



4. Po Simsonovem izreku so točke P, Q in R kolinearne. Ker sta kota $\sphericalangle DPC$ in $\sphericalangle CQD$ prava, je $CPDQ$ tetivni štirikotnik in $\sphericalangle DCQ = \sphericalangle DPQ$. Podobno je tudi $DQRA$ tetivni štirikotnik in $\sphericalangle QRD = \sphericalangle QAD$. Torej sta si trikotnika DCA in DPR podobna. Ker je $\sphericalangle DPQ = \sphericalangle DCQ = \sphericalangle DBA$ in $\sphericalangle QDP = \sphericalangle QCB = \sphericalangle ADB$, sta si podobna tudi trikotnika QPD in ABD. Iz enakosti $\sphericalangle QRD = \sphericalangle QAD = \sphericalangle CBD$ in $\sphericalangle QDR = \sphericalangle RAQ = \sphericalangle BDC$ pa sledi, da sta si trikotnika BCD in RQD podobna. Torej je

$$\frac{|DA|}{|DC|} = \frac{|DR|}{|DP|} = \frac{|DB|\frac{|QR|}{|BC|}}{|DB|\frac{|PQ|}{|BA|}} = \frac{|QR|}{|PQ|}\frac{|BA|}{|BC|},$$

kjer prvi enačaj velja zaradi podobnosti $\triangle DCA \sim \triangle DPR$, zvezi $|DR| = |DB|\frac{|QR|}{|CB|}$ in $|DP| = |DB|\frac{|PQ|}{|BA|}$ pa sledita iz podobnosti $\triangle BCD \sim \triangle RQD$ in $\triangle QPD \sim \triangle ABD$. Torej je $\frac{|PQ|}{|QR|} = 1$ natanko tedaj, ko je $\frac{|DA|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|BC|}$. Trditev je tako dokazana, saj simetrala kota $\sphericalangle CBA$ deli daljico AC v razmerju $\frac{|BA|}{|BC|}$, simetrala kota $\sphericalangle ADC$ pa deli daljico AC v razmerju $\frac{|DA|}{|DC|}$.

5. (a) Ker sta obe strani neenakosti

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2 \tag{2}$$

invariantni za translacijo (tj. zamenjavo x_i z $x_i-\delta$), smemo privzeti, da je $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. (Tu smo naredili translacijo za $\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.)
Najprej poenostavimo levo stran v neenakosti (2):

$$\sum_{i,j}^{n}|x_i-x_j| = 2\sum_{i<j}(x_i-x_j) = 2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i. \tag{3}$$

Po Cauchyevi neenakosti sledi

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}x_i^2, \tag{4}$$

kjer smo upoštevali, da je

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(4i^2-4i(n+1)+(n+1)^2\right) =\\ &= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n+1)+n\cdot(n+1)^2 =\\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.\end{aligned}$$

Po drugi strani pa je

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j + n\sum_{j=1}^{n}x_j^2 = 2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2. \tag{5}$$

Ko v oceni (4) uporabimo (5), dobimo želeno oceno (2).

(b) Če v Cauchyjevi neenakosti (4) velja enakost, je $x_i = a(2i-n-1)$ za neko realno število a. Torej je razlika $x_i - x_{i-1} = 2a$ konstantna in je (x_i) aritmetično zaporedje.

Za dokaz v drugo smer pa naj bo (x_i) aritmetično zaporedje z diferenco d. Torej je $x_i = x_1 + (i-1)d$. Če vsak člen x_i nadomestimo z $x_i - \delta$, kjer je $\delta = (x_1 + x_2)$, dobimo $x_i = d(2i-n-1)/2$ in $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Torej v (4) velja enakost.

6. Ker je $\frac{p^p-1}{p-1} = 1+p+p^2+\cdots+p^{p-1} \equiv p+1 \pmod{p^2}$, obstaja vsaj en praštevilski delitelj števila $\frac{p^p-1}{p-1}$, ki ni kongruenten 1 po modulu p^2. Označimo ta praštevilski delitelj s q in dokažimo, da je to iskano praštevilo.

Recimo, da obstaja celo število n, da je $n^p \equiv p \pmod{q}$. Potem je $n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 \pmod{q}$ po definiciji števila q. Po Fermatovem izreku je $n^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, saj je q praštevilo. Ker p^2 ne deli $q-1$, največji skupni delitelj števil p^2 in $q-1$ deli p. Torej obstajata celi števili α in β, da je $\alpha p^2 + \beta(q-1) = p$. Sledi $n^{\alpha p^2+\beta(q-1)} = n^p \equiv 1 \pmod{q}$ in od tod $p \equiv 1 \pmod{q}$. Slednje pomeni, da je $1+p+p^2+\cdots+p^{p-1} \equiv p \pmod{q}$. Po definiciji števila q potem sledi, da je $p \equiv 0 \pmod{q}$, kar je v nasprotju z že dokazanim.

Sredozemsko matematično tekmovanje 2003

Naloge

1. Dokaži, da enačba $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$ nima rešitev v množici racionalnih števil.

2. Za stranice trikotnika ABC velja $|BC| = |CA| + \frac{1}{2}|AB|$. Na stranici AB je taka točka P, da je $\dfrac{|BP|}{|PA|} = \dfrac{1}{3}$. Pokaži, da je $\sphericalangle CAP = 2 \cdot \sphericalangle CPA$.

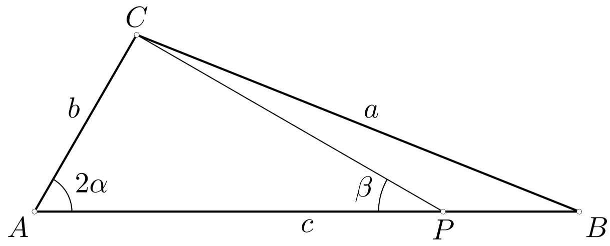
3. Naj bodo a, b in c taka nenegativna števila, da je $a + b + c = 3$. Dokaži, da velja
$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}\,.$$
Kdaj velja enačaj?

4. Dan je sistem, sestavljen iz neskončno mnogo kovinskih sfer s središči v vseh točkah $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Pravimo, da je sistem *stabilen*, če je temperatura vsake sfere enaka aritmetični sredini temperatur šestih njej najbližjih sfer.
Predpostavimo, da je temperatura vsake sfere med $0°C$ in $1°C$. Pokaži: če je sistem stabilen, imajo vse sfere enako temperaturo.

Rešitve nalog

1. Pišimo $x = \frac{a+1}{2}$, $y = \frac{b+1}{2}$ in $z = \frac{c+1}{2}$. Potem so števila x, y in z racionalna natanko tedaj, ko so a, b in c racionalna. Velja:
$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1 \iff a^2 + b^2 + c^2 = 7\,.$$
Zapišimo racionalna števila a, b in c z uporabo najmanjšega skupnega imenovalca d:
$$a = \frac{p}{d}, \quad b = \frac{q}{d}, \quad c = \frac{r}{d}\,.$$
Števila p, q in r so si tuja. Dokazati moramo, da enačba $p^2+q^2+r^2 = 7d^2$ nima celoštevilskih rešitev. Predpostavimo, da ima rešitev in si jo oglejmo po modulu 8. Ker ima kvadrat celega števila ostanek 0, 1 ali 4 pri deljenju z 8, ima število $7d^2$ ostanek 0, 7 ali 4. Vsota $p^2+q^2+r^2$ ima ostanek 0, 1, 2, 3, 4, 5 ali 6. To pomeni, da ima število $7d^2$ v našem primeru ostanek 0 ali 4. Ker bi morala biti števila p, q in r zaradi tega vsa soda, smo prišli v protislovje. Enačba $p^2 + q^2 + r^2 = 7d^2$ nima celoštevilskih rešitev, zato prvotna enačba ima racionalnih rešitev.

2. Naj veljajo standardne oznake za stranice ($a = |BC|$, $b = |AC|$ in $c = |AB|$) ter naj bo $\beta = \sphericalangle CPA$ in $2\alpha = \sphericalangle CAP$.



Po kosinusnem izreku v trikotniku ABC imamo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(2\alpha)$. Upoštevamo, da je $a = b + \frac{1}{2}c$, pa imamo

$$b^2 + \frac{c^2}{4} + bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos(2\alpha)$$

in odtod $\cos(2\alpha) = \frac{3c-4b}{8b}$. Potem je $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} = \frac{3(4b-c)}{16b}$ in $\sin^2(2\alpha) = 4\sin^2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = \frac{3(4b-c)(4b+3c)}{64b^2}$.
Po kosinusnem izreku v trikotniku APC je

$$|PC|^2 = b^2 + |AP|^2 - 2b\cdot|AP|\cos(2\alpha) \iff |PC|^2 = b^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2 - \frac{3}{2}\,b\,c\,\cos(2\alpha)\,.$$

Po sinusnem izreku v trikotniku APC velja

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{|PC|}{\sin(2\alpha)} \Longrightarrow \frac{b^2}{\sin^2\beta} = \frac{|PC|^2}{\sin^2(2\alpha)}$$

oziroma

$$\frac{b^2}{\sin^2\beta} = \frac{b^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2 - \frac{3}{2}\,b\,c\,\cos(2\alpha)}{\sin^2(2\alpha)}\,.$$

Sedaj zamenjajmo $\cos(2\alpha)$ in $\sin^2(2\alpha)$ z izrazoma, ki smo ju prej dobili, in poenostavimo:

$$\frac{b^2}{\sin^2\beta} = \frac{b^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2 - \frac{3}{2}\,b\,c\,\frac{3c-4b}{8b}}{\frac{3(4b-c)(4b+3c)}{64b^2}} = \frac{b(4b+3c)64b^2}{4(4b-c)(4b+3c)3}\,.$$

Odtod dobimo $\frac{1}{\sin^2\beta} = \frac{16b}{3(4b-c)}$ in vidimo, da je $\sin^2\beta = \sin^2\alpha$. Ker sta kota α in β ostra, velja tudi $\sin\beta = \sin\alpha$ in $\beta = \alpha$. Tako je seveda tudi $2\alpha = 2\beta$ oziroma $\sphericalangle CAP = 2\sphericalangle CPA$, kar je bilo treba pokazati.

3. Neenačbo zapišemo v obliki

$$2a(a^2+1)(c^2+1) + 2b(b^2+1)(a^2+1) + 2c(c^2+1)(b^2+1) \geq 3(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\,.$$

Ker za vsako realno število x velja $x^2 + 1 \geq 2x$, je dovolj, da dokažemo

$$4a^2(c^2+1) + 4b^2(a^2+1) + 4c^2(b^2+1) \geq 3(a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1)\,,$$

kar je ekvivalentno

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 3a^2b^2c^2 + 3\,.$$

Iz aritmetično-geometrijske neenakosti $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = 1$ sklepamo, da je $abc \leq 1$, zato je dovolj, da dokažemo

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 6\,.$$

Če zadnjo neenakost preuredimo v

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + (a+b+c)^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 6$$

oziroma v

$$(ab-1)^2 + (ac-1)^2 + (bc-1)^2 \geq 0\,,$$

vidimo, da res velja. Enačaj velja natanko tedaj, ko je $a = b = c = 1$.

4. Naj bo $f\colon \mathbb{Z}^3 \to [0,1]$ funkcija, ki sferi s središčem v $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ priredi njeno temperaturo $f(x,y,z)$. Če je sistem stabilen, velja

$$f(a) = \frac{1}{6}\left(\sum_{l=1}^{3}(f(a+e_l) + f(a-e_l))\right)$$

za vsak $a \in \mathbb{Z}^3$, kjer so e_l vektorji kanonične baze prostora $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Pokazali bomo, da je funkcija konstantna.
Predpostavimo nasprotno, to je, da funkcija f ni konstantna. Potem obstaja tak $d \in \mathbb{Z}^3$, da

$$g(x) = f(x+d) - f(x)$$

ni identično enako nič. Naj bo $A = \sup\limits_{x\in\mathbb{Z}^3} g(x)$. Gotovo je $1 > A > 0$ (sicer bi definirali $g(x) = f(x) - f(x+d)$. Še več: če je $g(y) > A - \varepsilon$, potem je $g(a \pm e_i) > A - 6$ za vsak i.
Naj bo $n = \left[\frac{2}{A}\right] + 1$ in $N = n \cdot \|d\|$, kjer oznaka $\|a\|$ pomeni $|a_1| + |a_2| + |a_3|$, če je $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3$.
Postavimo

$$A_0 = A\left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)\frac{N}{2}\right)$$

in naj bo $c \in \mathbb{Z}^3$ taka točka, da je $g(c) \geq A_0$. Potem pa je $g(c+\delta) \geq \frac{A}{2}$ za vsak $\delta \in \mathbb{Z}^3$, za katerega velja $\|\delta\| \leq N$. Posebej je

$$g(c + h\cdot d) \geq \frac{A}{2} \quad \text{za vsak} \quad h = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Potem pa imamo

$$f(c+n\cdot d) \geq f(c+n\cdot n) - f(c) = \sum_{h=0}^{n-1} g(c+h\cdot n) \geq \frac{A}{2}\cdot n = \frac{A}{2}\left(\left[\frac{2}{A}\right]+1\right) > 1\,,$$

kar je protislovje.

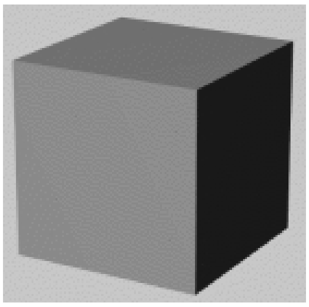
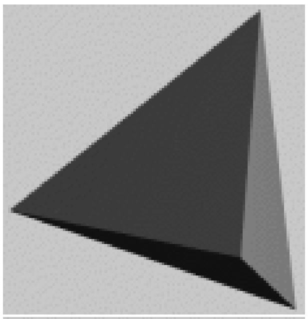
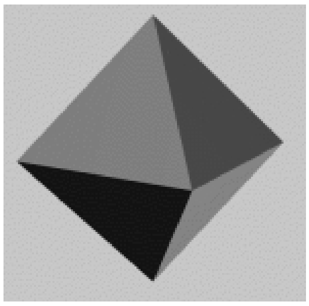
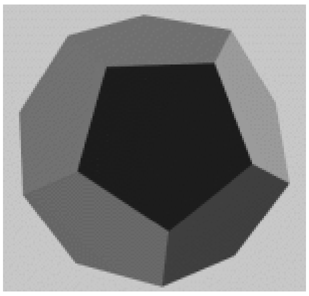
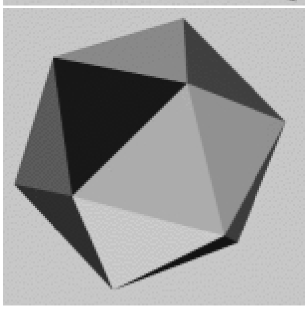
Rešitve nalog iz prejšnje številke

K rešitvi naloge običajno vodi več poti in vse matematično veljavne rešitve so pravilne. V rešitvah, ki jih objavljamo, je izbrana tista pot, ki se najbolj ujema s prispevkom, v katerem je bila določena naloga zastavljena. Če se tvoja rešitev od navedene rešitve bistveno razlikuje, se o rešitvi pogovori s tvojim učiteljem matematike.

Poliedri

1. Polieder lahko sestavimo. Ima 4 mejne ploskve.

2. Telesa so sestavljena videti takole:

3.
   - Oglišče je stičišče treh robov. Le dve ploskvi pa se ne moreta stikati v treh robovih.
   - Notranji kot enakostraničnega trikotnika meri 60°. Šest takih kotov skupaj pa tvori polni kot (360°).
   - Notranji kot kvadrata meri 90°. Štirje taki koti skupaj pa tvorijo polni kot (360°).
   - Notranji kot pravilnega petkotnika meri 108°. Pet takih kotov skupaj pa tvori polni kot (360°).
   - Notranji kot pravilnega šestkotnika meri 120°. Trije takih koti skupaj pa tvorijo polni kot (360°).

4.

Ime telesa	kocka	pravilni tetraeder	pravilni oktaeder	pravilni ikozaeder	pravilni dodekaeder
Oblika mejne ploskve	kvadrat	enako-stranični trikotnik	enako-stranični trikotnik	enako-stranični trikotnik	pravilni petkotnik
Število mejnih ploskev (p)	6	4	8	20	12
Število robov (r)	12	6	12	30	30
Število oglišč (o)	8	4	6	12	20
Število $o+p$	14	8	14	32	32
Število robov na vsaki ploskvi krat število ploskev deljeno z 2	$\frac{4\cdot 6}{2}=12$	6	12	30	30
Število $o+p-r$	$8+6-12=$ $=2$	2	2	2	2

5. b)

6. Uporabimo Eulerjevo pravilo $o+p-r=2$ in dobimo $o+14-24=2$, odtod pa $o=12$.

7. Polieder ima $\frac{6\cdot 4+8\cdot 6}{2}=36$ robov. Število oglišč nato izračunamo po Eulerjevem ravilu in vidimo, da ima 24 oglišč.

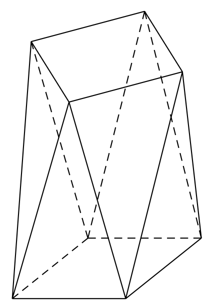
8. Trije trikotniki imajo skupaj liho število stranic, štirje kvadrati pa sodo. Ker po dve stranici določata en rob, mora biti skupno število stranic sodo.

9. **a)** 7

   b) $n+2$

10. $p=8$, $r=18$, $o=12$ in $12+8-18=2$, torej Eulerjevo pravilo velja.

11. Telo je videti takole:



12. **a)** 12

    b) $2n+2$

13. $p=14$, $r=24$, $o=12$ in $12+14-24=2$, torej Eulerjevo pravilo velja.

14. Ne, ker šest stranskih ploskev, stikajočih se v skupnem vrhu, tvori pravilni šestkotnik. Njena višina bi bila enaka 0:

15. pravilni četverec ali tetraeder

16. Prostornina piramide predstavlja tretjino prostornine kocke.

Kako rešujemo enačbe?

1. Najbolje, če x prenesemo na levo in -3 na desno, pa imamo $x=10$.

2. Enačbo pomnožimo s 6 in dobimo $2x-3=x$, od tod pa $x=3$.

3. Če $-4x$ prenesemo na desno, dobimo $x^2 = 6x$. Očitno je $x = 0$ rešitev enačbe. Ko iščemo še rešitve, ki niso enake 0, lahko enačbo delimo z x. Pridemo še do druge rešitve $x = 6$.

4. Denimo, da ima Tina x let. Tedaj velja $x + 14 = 3x$ oziroma $14 = 2x$ in $x = 7$. Tina ima 7 let.

5. Sestavimo enačbo: $x^2 + 3x = (x + 1)^2$. Preoblikujemo jo v $x^2 + 3x = x^2 + 2x + 1$. Če x^2 in $2x$ prenesemo z desne strani na levo, ostane $x = 1$, ki je rešitev enačbe.

6. Naj bosta števili x in $x+2$. Zapišemo $(x+2)^2-x^2 = 68$, od koder dobimo $x^2+4x+4-x^2 = 68$ oziroma $4x = 64$ in $x = 16$. Števili sta 16 in 18.

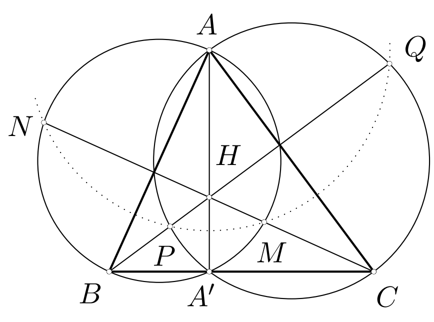
7. Tako kot v prejšnji nalogi lahko števili označimo z x in $x + 2$, le da pričakujemo kot rešitev liho število. Veljati mora $(x + 2)^2 - x^2 = 100$ oziroma $x^2 + 4x + 4 - x^2 = 100$. Od tod dobimo $4x = 96$ in $x = 24$. Toda 24 ni liho število, zato se kvadrata zaporednih lihih števil ne moreta razlikovati za 100.
   Te naloge bi se lahko lotili drugače. Zaporedni lihi števili bi označili z $2n + 1$ in $2n - 1$. Razlika njunih kvadratov je tedaj $(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 4n - 1 = 8n$, torej je deljiva z 8. Ker število 100 ni deljivo z 8, se kvadrata zaporednih lihih števil ne moreta razlikovati za 100.

Potenca točke na krožnico

1. Označimo višinsko točko trikotnika ABC s H, nožišče višine na BC pa z A'. Potem je

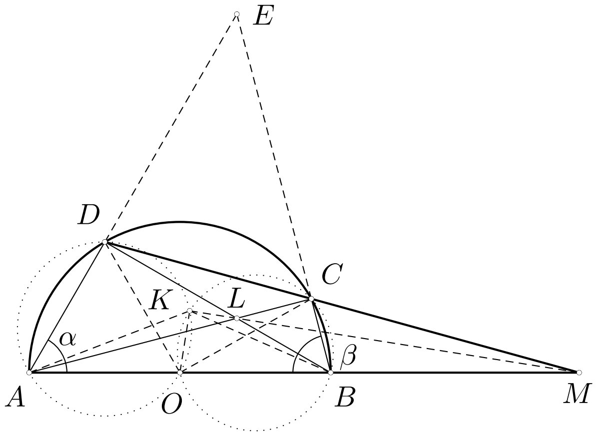
$$\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{HN} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{HQ},$$

   od koder po izreku o potenci točke na krožnico sledi, da je štirikotnik $NPMQ$ tetiven. Ker sta AB in AC simetrali daljic MN oziroma PQ, je točka A središče njemu očrtane krožnice.



2. Označimo $\sphericalangle BAD = \alpha$ in $\sphericalangle ABC = \beta$. Premici AD in BC se sekata in njuno presečišče označimo z E. Točka L je potem višinska točka trikotnika ABE. Sledi

$$\sphericalangle ALB = \sphericalangle CLD = \alpha + \beta. \quad (6)$$



Po Miquelovem izreku so točke $CEDK$ koncikliče, zato je

$$\sphericalangle CKD = \pi - \sphericalangle DEC = \alpha + \beta. \quad (7)$$

Ker sta AOD in COB enakokraka trikotnika z vrhom O, je

$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle AKO + \sphericalangle OKB = \sphericalangle ADO + \sphericalangle OCB = \alpha + \beta. \quad (8)$$

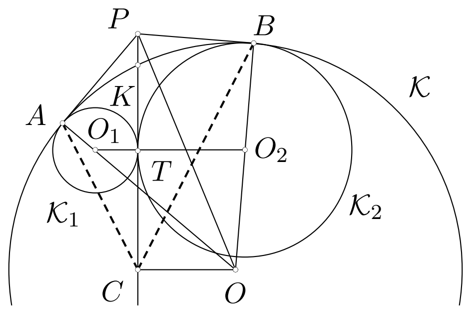
Iz enačb (6), (7) in (8) sledi, da sta $ABLK$ in $CDKL$ tetivna štirikotnika. Ker se potenčne premice krožnic skozi $ABCD$, $ABLK$ in $CDKL$ sekajo v eni točki (tj. točki M), so točke K, L in M kolinearne. Nazadnje izračunamo

$$\sphericalangle OKM = \sphericalangle AKL - \sphericalangle AKO = (\pi - \sphericalangle LBO) - \alpha = (\pi - (\tfrac{\pi}{2} - \alpha)) - \alpha = \tfrac{\pi}{2}.$$

3. Naj bo P potenčno središče krožnic $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$. Potem je $PA \perp AO$ in $PB \perp BO$. Ker je C razpolovišče tetive KL, je $PC \perp CO$. Torej je $ACOBP$ tetivni petkotnik in

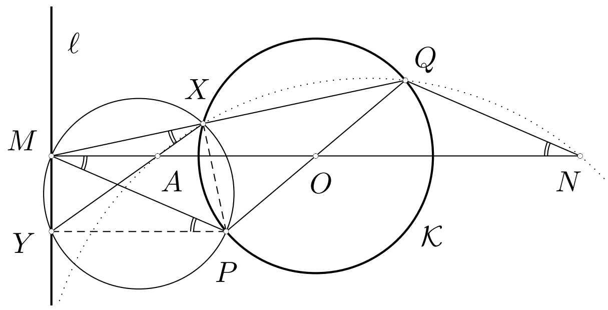
$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle AOB = \sphericalangle O_1OO_2.$$

Ker sta tangentna odseka PA in PB na krožnico $\mathcal{K}$ enako dolga, velja še $\sphericalangle BCP = \sphericalangle PCA$.



4. Prezrcalimo točki M in P čez središče O krožnice $\mathcal{K}$ v točki N in Q.

   Potem je PQ premer krožnice $\mathcal{K}$ in po Talesovem izreku v trikotnikih MPX in PXQ sta kota $\sphericalangle MXP$ in $\sphericalangle PXQ$ prava. Točke MXQ so torej kolinearne. Označimo presečišče daljic XY in MN z A in dokažimo, da je A iskana fiksna točka.

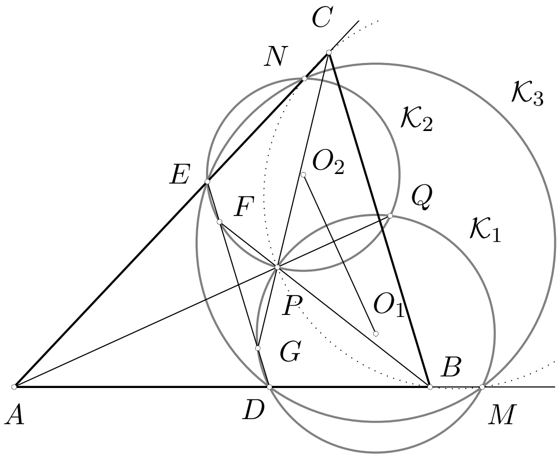


Trikotnika MPO in NQO sta skladna, zato je $\sphericalangle QNO = \sphericalangle PMO$. Ker je $MN \parallel YP$, je $\sphericalangle PMO = \sphericalangle MPY$. Ker pa je tudi $\sphericalangle MPY = \sphericalangle MXY$, smo tako dokazali, da je štirikotnik $ANQX$ tetiven. Zapišimo potenco točke M na njemu očrtano krožnico in na krožnico $\mathcal{K}$:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MX} \cdot \overrightarrow{MQ} = \mathcal{P}(M, \mathcal{K}).$$

Ker sta $|MN|$ in $\mathcal{P}(M, \mathcal{K})$ konstantni količini, je tudi $|MA|$ konstanta. Lega točke $A \in MN$ je torej neodvisna od izbire točke P.

5. Označimo drugo presečišče krožnice $\mathcal{K}_1$ skozi točke D, P in G s premico AB z M, drugo presečišče krožnice $\mathcal{K}_2$ skozi točke E, P in F s premico AC pa z N. Da bi se izognili analizi različnih možnosti, uporabimo usmerjene kote. Potem je



$$\measuredangle PMB = \measuredangle PMD \overset{\mathcal{K}_1}{=} \measuredangle PGD = \measuredangle PCB,$$

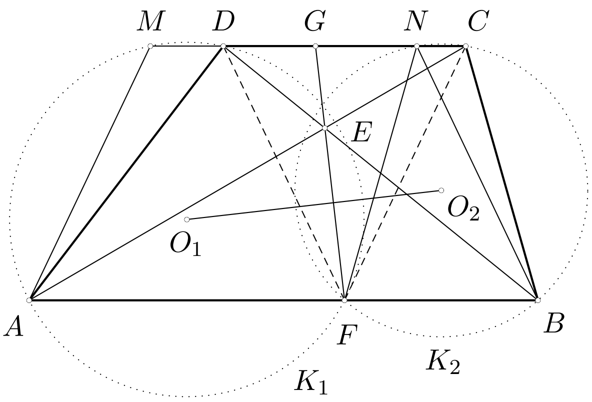
kjer smo v zadnji enakosti upoštevali $DG \parallel BC$. Torej so točke P, C, M in B koncikličné. Podobno so tudi točke P, C, N in B koncikličné. (Ležijo naj na krožnici $\mathcal{K}_2$.) Nadalje zaradi vzporednosti $DE \parallel BC$ velja $\measuredangle DEN = \measuredangle BCN$, zato lahko zapišemo

$$\measuredangle DEN = \measuredangle BCN = \measuredangle BMN = \measuredangle DMN.$$

Torej je $DMNE$ tetivni štirikotnik in njemu očrtano krožnico označimo s $\mathcal{K}_3$.

Točka A je potenčno središče krožnic $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ in $\mathcal{K}_2$, zato je AP potenčna premica krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$. Torej je res $AP \perp O_1O_2$.

6. Označimo s $\mathcal{K}_1$ trikotniku ADF očrtano krožnico in s $\mathcal{K}_2$ trikotniku BCF očrtano krožnico. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ naj sekata CD še v točkah M in N. Ker je $AB \parallel CD$, sta $AFDM$ in $FBCN$ enakokraka trapeza. Zaradi $|CF| = |DF|$ velja še $AM \parallel CF$ in $BN \parallel FD$. Presečišče premic FE in CD označimo z G. Zaradi podobnosti velja $\frac{AF}{BF} = \frac{CG}{DG}$ oziroma



$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CG}. \qquad (9)$$

Ker je $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$ in $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{GD}$, iz (9) sledi $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{NG} \cdot \overrightarrow{CG}$. Torej leži točka G (in seveda tudi E) na potenčni premici krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, zato je $EF \perp O_1O_2$.

Uredniški odbor:

Gregor Dolinar (*FE, Univerza v Ljubljani*),
Darjo Felda (*FE, Univerza v Ljubljani*),
Aleksander Potočnik (*OŠ Božidarja Jakca, Ljubljana*),
Matjaž Željko (*FMF, Univerza v Ljubljani*, odgovorni urednik).

© 2003 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

http://www.dmfa.si/Brihtnez/BrihtnezIndex.html

Brihtnež, Letnik 0, številka 5
September 2003