Brihtnež

Elektronska revija za mlade matematike

Letnik 0, številka 3

http://www.dmfa.si/Brihtnez/BrihtnezIndex.html

Vsebina

Kot smo zapisali že v prvi številki, se bodo lahko najboljši tekmovalci vključili v eno izmed skupin, ki se bosta udeleževali raziskovalnih dni ter zimskih in letnih šol oziroma priprav na mednarodno matematično olimpiado. Člane prve skupine tokrat vabimo, da nam pošljejo rešitve nalog 9, 10 in 11 iz prispevka *Veččleniki* in nalog 1, 2 in 3 iz prispevka *Neenakosti*. Člane druge skupine pa vabimo, da nam pošljejo rešitve nalog 6, 7 in 8 iz prispevka *Neenakosti* in nalog 1, 2 in 3 iz prispevka *Usmerjeni koti*. Rešitve (samo v pisni obliki) morajo prispeti na naslov **DMFA Slovenije, Uredništvo revije Brihtnež, Jadranska 19, 1000 Ljubljana**, najkasneje do 14. 1. 2003. Rešitev, prispelih po tem roku, ne bomo upoštevali, in sicer ne glede na vzrok zamude. Prav tako tudi ne bomo upoštevali rešitev, poslanih po elektronski pošti.

Veččleniki

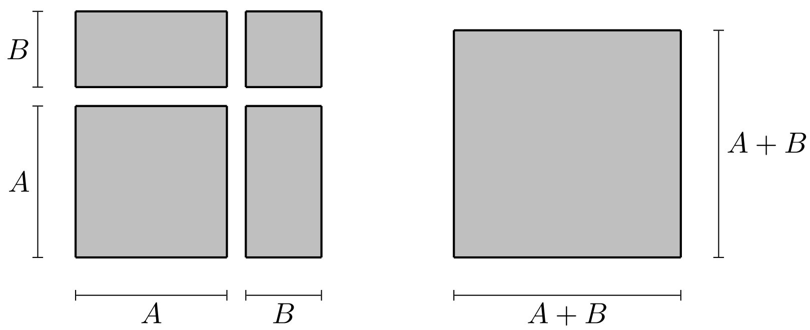
Znanje o veččlenikih (v matematiki jih pogosto imenujemo *polinomi*) lahko koristno uporabimo pri reševanju mnogih nalog: reševanju enačb, numeričnem računanju, računanju z ulomki, poenostavljanju izrazov, ipd.

Kvadrat dvočlenika

Kvadrat dvočlenika $A+B$ je $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$, kar lahko strnjeno zapišemo v obliki:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2. \tag{1}$$

Pomen te formule si lahko lepo geometrijsko predstavljamo. Na sliki spodaj je dolžina stranice kvadrata enaka $A+B$. Njegova ploščina meri $(A+B)^2$, dobimo jo kot vsoto ploščin dveh kvadratov (eden ima ploščino A^2, drugi pa B^2) in dveh pravokotnikov (oba imata ploščino AB).



S pomočjo enačbe (1) si lahko poenostavimo računanje v mnogih primerih.

Zgled 1. *Izračunaj* $(3x - 5y^2)^2$.

Rešitev. Dvočlenik $3x - 5y^2$ zapišimo takole $3x + (-5y^2)$ in označimo $A = 3x$ in $B = -5y^2$. Zato je $(3x + (-5y^2))^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot(-5y^2) + (-5y^2)^2 = 9x^2 - 30xy^2 + 25y^4$.

Zgled 2. *Izračunaj* $(-4xy - 15)^2$.

Rešitev. Ravnajmo kot v gornjem zgledu: pišimo $A = -4xy$ in $B = -15$. Zato je $(-4xy - 15)^2 = (-4xy)^2 + 2\cdot(-4xy)\cdot(-15) + (-15)^2 = 16x^2y^2 + 120xy + 225$.

Pridobljeno znanje lahko s pridom uporabimo pri kvadriranju števil na pamet.

Zgled 3. *Izračunaj* 68^2.

Rešitev. Najprej ugotovimo, da je $68 = 8 + 60$, zato je

	68^2
8^2	64
$2\cdot 8\cdot 60$	960
60^2	3600
	4624

oziroma

	68^2
8^2	64
$2\cdot 8\cdot 6$	96
6^2	36
	4624

Kvadriramo lahko nekatera velika števila, čemur žepno računalo ni kos.

Zgled 4. *Izračunaj* 150000000003^2.

Rešitev. Število 150000000003^2 zapišimo kot vsoto $150000000000 + 3$, in tako je

	150000000003^2
3^2	9
$2 \cdot 3 \cdot 150000000000$	900000000000
150000000000^2	22500000000000000000000
	22500000000900000000009

Včasih enačbo (1) uporabimo v obratni smeri.

Zgled 5. *Izraz* $4x^4 - 52x^2y + 169y^2$ *zapiši kot kvadrat dvočlenika.*

Rešitev. Naloga ima dve rešitvi. Zaradi $A^2 = 4x^4$, $B^2 = 169y^2$ in $2 \cdot A \cdot B = -52x^2y$ je $A = 2x^2$ in $B = -13y$ ali $A = -2x^2$ in $B = 13y$ in zato

$$4x^4 - 52x^2y + 169y^2 = (2x^2 - 13y)^2 = (-2x^2 + 13y)^2 .$$

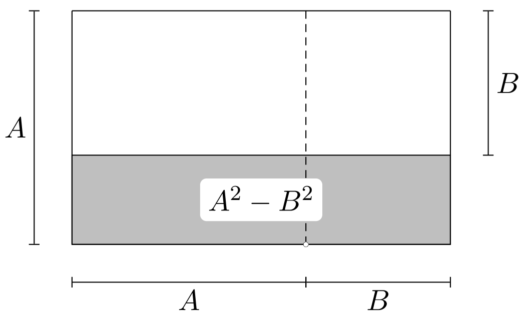
Razlika kvadratov

Z neposrednim množenjem se prepričamo, da velja enačba

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B) , \tag{2}$$

ki jo prav tako s pridom uporabljamo na mnogih področjih.

Tudi pomen te formule si lahko geometrijsko predstavljamo. Na sliki spodaj meri ploščina osenčenega dela $A(A + B) - B(A + B)$, kar je enako $A^2 - B^2$.



Zgled 6. *Izračunaj produkt* $(3a + 5)(3a - 5)$.

Rešitev. Ugotovimo $A = 3a$ in $B = 5$, zato je

$$(3a + 5)(3a - 5) = (3a)^2 - 5^2 = 9a^2 - 25.$$

Zgled 7. *Izraz* $4x^4 - 169y^2$ *zapiši kot produkt dvočlenikov.*

Rešitev. Naloga ima dve rešitvi. Zaradi $A^2 = 4x^4$ in $B^2 = 169y^2$ je $A = 2x^2$ in $B = 13y$ ali $A = -2x^2$ in $B = -13y$ in zato

$$4x^4 - 169y^2 = (2x^2 + 13y)(2x^2 - 13y) = (-2x^2 - 13y)(-2x^2 + 13y).$$

Zgled 8. *Spretno izračunaj produkt števil 78 in 82.*

Rešitev. Zapišimo $78 = 80 - 2$ in $82 = 80 + 2$, pa imamo

$$78 \cdot 82 = (80-2)(80+2) = 6400 - 4 = 6396.$$

Zgled 9. *Izračunaj produkt števil* 150000000003 *in* 149999999997.

Rešitev. Zapišimo $150000000003 = 150000000000 + 3$ in $149999999997 = 150000000000 - 3$. Tako je

$$150000000003 \cdot 149999999997 = (150000000000+3)(150000000000-3) =$$

$$= 22500000000000000000000 - 9 = 22499999999999999999991$$

Kub dvočlenika

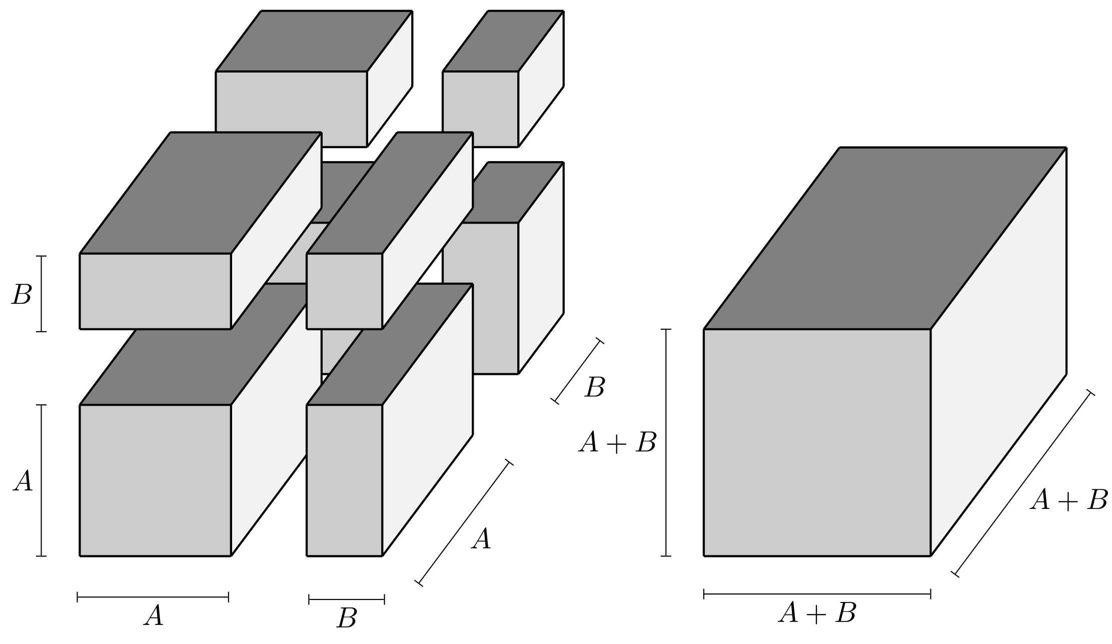
Zaradi $(A+B)^3 = (A+B)^2 \cdot (A+B)$ velja

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A^2+2AB+B^2)(A+B) = \\ &= A^3+2A^2B+AB^2+A^2B+2AB^2+B^3 = \\ &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3,\end{aligned}$$

kar zapišemo kot

$$(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3. \tag{3}$$

Tudi pomen te formule si lahko lepo geometrijsko predstavljamo. Na sliki spodaj je dolžina roba kocke enaka $A+B$. Njena prostornina meri $(A+B)^3$. Na levi sliki je kocka razdeljena na dve manjši kocki (ena ima prostornino A^3, druga B^3) in na šest kvadrov (trije imajo prostornino A^2B, trije pa AB^2).



S pomočjo enačbe (3) si prav tako lahko poenostavimo računanje v mnogih primerih.

Zgled 10. *Izračunaj* $(3x-5y^2)^3$.

Rešitev. Označimo $A = 3x$ in $B = -5y^2$. Tako je

$$\begin{aligned}(3x-5y^2)^3 &= (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\cdot(-5y^2) + 3\cdot 3x\cdot(-5y^2)^2 + (-5y^2)^3 = \\ &= 27x^3 - 135x^2y^2 + 225xy^4 - 125y^6.\end{aligned}$$

Zgled 11. *Izračunaj* 43^3.

Rešitev. Najprej ugotovimo, da je $43 = 3 + 40$, zato je

	43^3
3^3	27
$3\cdot 3^2\cdot 40$	1080
$3\cdot 3\cdot 40^2$	14400
40^3	64000
	79507

Produkt dvočlenikov

Pomnožimo dvočlenika $x+p$ in $x+q$, torej $(x+p)(x+q) = x^2+px+qx+pq = x^2+(p+q)x+pq$. Enačba

$$(x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq \tag{4}$$

je lahko odličen pripomoček pri računanju z ulomki in reševanju enačb višjih stopenj, kot bomo videli v nadaljevanju. Za zdaj navedimo le nekaj osnovnih zgledov uporabe

Zgled 12. *Izračunaj* $(x+5)(x+7)$.

Rešitev. Najprej ugotovimo, da je $p = 5$ in $q = 7$, zato je $p + q = 12$ in $pq = 35$, torej

$$(x+5)(x+7) = x^2 + 12x + 35.$$

Zgled 13. *Izračunaj* $(x+4)(x-9)$.

Rešitev. Vidimo, da je $p = 4$ in $q = -9$, zato je $p + q = -5$ in $pq = -36$, torej

$$(x+4)(x-9) = x^2 - 5x - 36.$$

Zgled 14. *Izračunaj* $(x-3)(x-8)$.

Rešitev. Tokrat je $p = -3$ in $q = -8$, zato je $p + q = -11$ in $pq = 24$, torej

$$(x-3)(x-8) = x^2 - 11x + 24.$$

Zgled 15. *Izraz* $x^2 + 3x - 18$ *zapiši kot produkt dvočlenikov.*

Rešitev. Najprej ugotovimo, da je $p + q = 3$ in $pq = -18$, zato je $p = 6$ in $q = -3$, torej

$$x^2 + 3x - 18 = (x+6)(x-3).$$

Ulomki

Enačbe (1), (2), (3) in (4) lahko uporabimo pri računanju z ulomki

Zgled 16. *Poenostavi izraz* $\frac{a^2-9a+20}{a^2+4a+4} \cdot \frac{a^2+2a}{a^2-16}$.

Rešitev. Najprej števca in imenovalca zapišemo v obliki produkta. Za razcep prvega števca uporabimo enačbo (4), za razcep prvega imenovalca enačbo (1), za razcep drugega imenovalca enačbo (2), v drugem števcu pa izpostavimo skupni faktor, nato pa krajšamo enake faktorje, torej

$$\frac{a^2-9a+20}{a^2+4a+4} \cdot \frac{a^2+2a}{a^2-16} = \frac{(a-5)\,(a-4)}{(a+2)^2} \cdot \frac{a\,(a+2)}{(a+4)\,(a-4)} = \frac{a\,(a-5)}{(a+2)\,(a+4)}.$$

Zgled 17. *Poenostavi izraz* $\frac{8}{9a^2+12a} - \frac{16}{9a^2-16} + \frac{2}{3a-4}$.

Rešitev. Najprej imenovalce zapišemo v obliki produkta, nato ulomke razširimo na skupni imenovalec, poenostavimo števec in ga zapišemo v obliki produkta ter končno krajšamo enake faktorje

$$\begin{aligned}
\frac{8}{9a^2+12a} - \frac{16}{9a^2-16} + \frac{2}{3a-4} &= \frac{8}{3a(3a+4)} - \frac{16}{(3a+4)(3a-4)} + \frac{2}{3a-4} = \\
&= \frac{8(3a-4) - 16 \cdot 3a + 2 \cdot 3a(3a+4)}{3a(3a+4)(3a-4)} = \\
&= \frac{24a - 32 - 48a + 18a^2 + 24a}{3a(3a+4)(3a-4)} = \\
&= \frac{18a^2 - 32}{3a(3a+4)(3a-4)} = \frac{2(9a^2-16)}{3a(3a+4)(3a-4)} = \\
&= \frac{2(3a-4)(3a+4)2}{3a(3a+4)(3a-4)} = \frac{2}{3a}.
\end{aligned}$$

Reševanje enačb

Postopki, ki smo jih uporabljali pri poenostavljanju izrazov z ulomki, nam pridejo prav tudi pri reševanju enačb, predvsem pri reševanju enačb višjih stopenj in enačb, v katerih natopajo ulomki. Vendar pa se moramo reševanja enačb lotiti pazljivo, saj lahko ob neprevidnem delu kakšno rešitev "izgubimo".

Zgled 18. *Reši enačbo* $2x^2 - 50 = 0$.

Rešitev. Na levi najprej izpostavimo skupni faktor in dobimo $2(x^2-25) = 0$, nato obe strani delimo z 2, pa dobimo $x^2 - 25 = 0$. Sedaj levo stran s pomočjo enačbe (2) preoblikujemo v $(x+5)(x-5) = 0$. Leva stran te enačbe je produkt dveh faktorjev. Ta je enak 0, če je vsaj en faktor enak 0. Tako lahko zapišemo $x+5=0$ in $x-5=0$. Enačba $2x^2-50=0$ ima torej dve rešitvi $R = \{-5, 5\}$.

Zgled 19. *Reši enačbo* $4x^3 + 12x^2 - 72x = 0$.

Rešitev. Na levi najprej izpostavimo skupni faktor in dobimo $4x(x^2+3x-18) = 0$, nato obe strani delimo s 4, pa dobimo $x(x^2+3x-18) = 0$. Tu moramo biti posebno pozorni, da ne bi obeh strani enačbe delili z x, saj bi na ta način "izgubili" eno rešitev, kot bomo videli. Sedaj levo stran s pomočjo enačbe (4) preoblikujemo v $x(x-3)(x+6) = 0$. Leva stran te enačbe je produkt treh faktorjev. Ta je enak 0, če je vsaj en faktor enak 0. Tako lahko zapišemo $x = 0$, $x - 3 = 0$ in $x + 6 = 0$. Enačba $4x^3 + 12x^2 - 72x = 0$ ima torej tri rešitve $R = \{-6, 0, 3\}$. Če bi prej delili z x, bi "izgubili" rešitev 0.

Zgled 20. *Reši enačbo* $\frac{x^2-x}{x^2+4x+3} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} = 0$.

Rešitev. Najprej prvi imenovalec zapišemo v obliki produkta in dobimo $\frac{x^2-x}{(x+1)(x+3)} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} = 0$. Razširimo na skupni imenovalec $\frac{x^2-x-(x+3)+(x+1)}{(x+1)(x+3)} = 0$ in poenostavimo števec $\frac{x^2-x-2}{(x+1)(x+3)} = 0$. Tu obeh strani enačbe ne smemo pomnožiti s skupnim imenovalcem, ker se v njem morda skriva faktor 0. Sedaj razstavimo števec in dobimo $\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+3)} = 0$. Ulomek je enak 0, če je njegov števec enak 0, njegov imenovalec pa od nič različen. Števec je enak nič, če je $x = -1$ ali $x = 2$. Toda pozor: pri $x = -1$ je tudi imenovalec enak 0. Zato ima enačba $\frac{x^2-x}{x^2+4x+3} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} = 0$ edino rešitev $x = 2$, torej $R = \{2\}$.

Naloge

1. S pomočjo enačbe (1) kvadriraj dvočlenike:
   (a) $(6x + 2y)^2$
   (b) $(8 - 5x)^2$
   (c) $(-4x^3 - 3xy)^2$

2. Kot v zgledu 3 izračunaj kvadrate števil
   (a) 32^2
   (b) 46^2
   (c) 112^2

3. Izračunaj 90000000005^2.

4. Izraze zapiši kot kvadrate dvočlenikov
   (a) $81x^4 + 198x^2 + 121$
   (b) $49x^2 - 42xy + 9y^2$
   (c) $324 - 72y^3 + 4y^6$

5. Izračunaj produkte
   (a) $(6x + 2y)(6x - 2y)$
   (b) $(17x^2 - 12)(17x^2 + 12)$
   (c) $(14x - 16y^3)(14x + 16y^3)$

6. Zapiši v obliki produkta dvočlenikov
   (a) $169 - 64x^2$
   (b) $256x^2y^2 - 36$
   (c) $49x^4 - 81y^2z^2$

7. Spretno izračunaj produkte
   (a) $63 \cdot 57$

(b) $96 \cdot 104$
(c) $112 \cdot 108$
(d) $7000000008 \cdot 6999999992$

8. Izračunaj kube dvočlenikov

(a) $(x - 2y)^3$
(b) $(3x^2 + 4)^3$
(c) $(2x - 5)^3$

9. Razstavi v produkt dvočlenikov

(a) $x^2 + 6x + 5$
(b) $x^2 - 13x + 40$
(c) $x^2 - 3x - 40$
(d) $x^2 - 12x - 28$

10. Poenostavi izraze

(a) $\frac{x}{x^2-2x} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x}$
(b) $\frac{a+21}{9-a^2} - \frac{a+1}{3-a} - \frac{a}{a+3}$
(c) $\frac{a^2-4}{a} : \frac{5a^2-10a}{a-5} \cdot \frac{10a^2}{a^2-10a+25}$

11. Reši enačbe

(a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+3} = 0$
(b) $\frac{2x+3}{x-1} - \frac{x+18}{x+6} - \frac{x^2+x}{x^2+5x-6} = 0$
(c) $\frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} = 0$

Literatura

1. F. Križanič: *Aritmetika, algebra in analiza, 2.del*, DZS, Ljubljana, 1971.
2. I. Štalec: *Zbirka vaj iz aritmetike, algebre in analize za 1. razred gimnazije*, DZS, Ljubljana, 1971.

Neenakosti

Urejenost realnih števil

Realna števila imajo pomembno lastnost, da so urejena po velikosti. Velikokrat moramo pri reševanju matematičnih problemov primerjati dve števili, ugotoviti moramo, če sta števili enaki oziroma katero od števil je večje in katero manjše. Če sta a in b realni števili, potem je število a večje od števila b, če je $a - b$ pozitivno število. Če je število a večje od števila b, je seveda število b manjše od števila a in obratno, kar zapišemo $a > b$ ali $b < a$. Poleg znakov $=$, $<$ in $>$ uporabljamo pri primerjanju števil tudi znaka $\leq$ in $\geq$. In sicer je $a \leq b$, če je $a < b$ ali $a = b$. Podobno je $a \geq b$, če je $a > b$ ali $a = b$.

Kadar obravnavamo neenakosti, moramo biti zelo pozorni, saj se nekatera pravila, ki veljajo za neenakosti, razlikujejo od pravil, ki veljajo za enakosti. Oglejmo si nekaj najpomembnejših lastnosti urejenosti realnih števil.

1. Če imamo poljubni realni števili a in b, potem je res natanko ena od naslednjih treh možnosti
$$a < b, \quad a = b \quad \text{ali} \quad a > b.$$

2. Če je $a < b$, potem je
$$a + x < b + x \quad \text{in} \quad a - x < b - x$$
za poljubno realno število x. Neenakost se torej ohrani, če na obeh straneh prištejemo ali odštejemo poljubno število.

3. Če je $a < b$ in je $x > 0$, je
$$ax < bx \quad \text{in} \quad \frac{a}{x} < \frac{b}{x}.$$
Neenakost se prav tako ohrani, če obe strani pomnožimo ali delimo s poljubnim pozitivnim številom.

4. Če je $a < b$ in je $x < 0$, je
$$ax > bx \quad \text{in} \quad \frac{a}{x} > \frac{b}{x}.$$
Če je $x = -1$, je torej $-a > -b$. Vidimo, da moramo biti še posebej pozorni pri množenju ali deljenju z negativnim številom, saj se v tem primeru **znak neenakosti obrne**.

5. Če je $a < b$ in $b < c$, potem je $a < c$. To lastnost imenujemo *tranzitivnost* ali *prehodnost*.

6. Če je $a < b$ in $c < d$, potem je
$$a + c < b + d.$$
Če torej manjšemu številu a prištejemo manjše število c, večjemu številu b pa večje število d, je seveda vsota manjših dveh števil $a + c$ manjša od vsote večjih dveh števil $b + d$.

   Na tem mestu velja opozoriti, da **obratno ne velja**. Če je $a + c < b + d$ in je $c < d$, potem ne velja vedno, da je $a < b$.

7. Če je $a < b$ in $c < d$ in so vsa števila a, b, c in d pozitivna, potem je

$$ac < bd.$$

8. Če je $ab > 0$, potem je res natanko ena od naslednjih dveh možnosti:

$$\text{ali je} \quad a > 0 \quad \text{in} \quad b > 0 \quad \text{ali pa} \quad a < 0 \quad \text{in} \quad b < 0.$$

9. Če je $ab < 0$, potem je res natanko ena od naslednjih dveh možnosti:

$$\text{ali je} \quad a > 0 \quad \text{in} \quad b < 0 \quad \text{ali pa} \quad a < 0 \quad \text{in} \quad b > 0.$$

10. Če je $a < b$ in sta a in b pozitivni števili, potem je

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}.$$

11. Za vsako realno število a velja $a^2 \geq 0$.

Na nekaj zgledih si sedaj oglejmo, kako uporabljamo naštete pravila pri reševanju nalog.

Zgled 1. *Poišči vsa naravna števila, ki zadoščajo neenakosti* $7 - 3(11x - 3) > 7 - 3(3x + 9)$.

Rešitev. Neenakost najprej poenostavimo. Na obeh straneh najprej odštejemo 7, nato pa obe strani delimo z -3. Pri tem se znak neenakosti obrne, tako da dobimo $11x - 3 < 3x + 9$. Na obeh straneh nato prištejemo 3 in odštejemo $3x$, tako da je $8x < 12$, zato je $x < \frac{12}{8}$. Ker je $1 < \frac{12}{8} < 2$, je edino naravno število, ki zadošča neenakosti, $x = 1$. ■

Zgled 2. *Čokoladni piškoti so zapakirani v škatle, v vsaki škatli je enako piškotov. Mama je Tevžu kupila 5 škatel piškotov. Tevž je 9 piškotov dal svoji sestri Mateji, nato je nekaj piškotov pojedel in ostali sta mu še 2 škatli piškotov. Ker sta Mateja in Tevž še isti dan pojedla vse piškote, je mama naslednji dan kupila Mateji 4 škatle piškotov, Tevžu pa 1 škatlo. Potem ko je Mateja dala Tevžu 7 piškotov, jih je imela manj kot Tevž. Koliko piškotov je v eni škatli?*

Rešitev. Označimo število piškotov v eni škatli z x. Tevž je imel na začetku $5x$ piškotov. Potem ko jih je dal Mateji 9, mu jih je ostalo še $5x - 9$. Nato jih je nekaj pojedel in ostalo mu je še $2x$ piškotov. Torej je $5x - 9 > 2x$.

Mateja je imela naslednji dan na začetku $4x$ piškotov, potem ko jih je 7 dala Tevžu, pa $4x - 7$. Tevž je imel na začetku x piškotov, potem ko jih je 7 dobil od Mateje, pa $x + 7$. Mateja je imela na koncu manj piškotov kot Tevž, torej je $4x - 7 < x + 7$.

Dobili smo dve neenakosti. Ko poenostavimo prvo, dobimo $3x > 9$, oziroma $x > 3$. Ko poenostavimo drugo, dobimo $3x < 14$, oziroma $x < \frac{14}{3}$. Torej je $3 < x < 5$ in v škatli so 4 piškoti. ■

Zgled 3. *Naj bodo a, b in c pozitivna števila. Dokaži: če je $a > b$, potem je*

$$\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}.$$

Rešitev. Ker je $a > b$ in je $c > 0$, je tudi $ac > bc$. Na obeh straneh nato prištejemo ab in dobimo $ab + ac > ab + bc$. Sledi $a(b + c) > b(a + c)$ in zato $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$, saj je $b > 0$ in $b + c > 0$. ■

Če primerjamo dve števili in hočemo ugotoviti, katero je večje, potem pri reševanju nalog največkrat poskusimo pokazati, da je razlika teh dveh števil enaka kvadratu nekega števila in zato pozitivna.

Zgled 4. *Dokaži, da za vsako realno število a velja*

$$\frac{a^2}{1+a^4} \le \frac{1}{2}.$$

Rešitev. Ker je $a^4 = (a^2)^2 \ge 0$ in zato $1 + a^4 > 0$, lahko neenakost pomnožimo s pozitivnim številom $2(1 + a^4)$ in dobimo $2a^2 \le 1 + a^4$. Ker pa je $a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2 \ge 0$ za vsako realno število a, je dokaz končan. ■

Naloge

1. Določi, kako so urejena števila a, b , c in d, za katera velja $b + 5a > c + 5d$, $3 - b > 3 - c$ in $2d - a > c$.
2. Naj bosta a in b pozitivni števili, za kateri velja $a + b = 1$. Dokaži, da je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge 4$.
3. Naj bosta a in b poljubni realni števili. Dokaži, da je $a^4 + b^4 \ge a^3b + ab^3$.
4. Pokaži, da je $2a^2 + 2ab + b^2 \ge 0$ za vsa realna števila a in b.
5. Naj bodo a, b in c realna števila. Dokaži, da velja $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$.

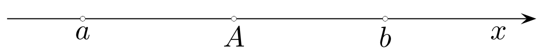
Sredine

V tem poglavju bomo najprej povedali, kaj so aritmetična, geometrijska, kvadratna in harmonična sredina dveh števil, nato pa si bomo ogledali, kako so te sredine urejene po velikosti. Kljub temu, da bomo sredine definirali le za dve števili, poudarimo, da lahko vsako od naštetih sredin definiramo tudi za več kot dve števili.

Aritmetična sredina

Aritmetična sredina A števil a in b je

$$A = \frac{a+b}{2}.$$



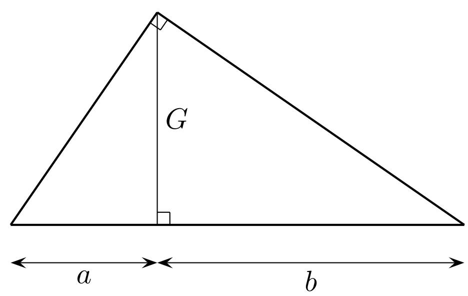
Torej je aritmetična sredina povprečna vrednost števil. Geometrijsko lahko predstavimo aritmetično sredino s točko, ki leži na razpolovišču med točkama a in b na številski osi.

Geometrijska sredina

Geometrijska sredina G pozitivnih števil a in b je

$$G = \sqrt{ab}.$$

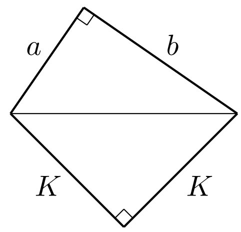
Geometrijsko lahko geometrijsko sredino predstavimo v pravokotnem trikotniku. In sicer je G dolžina višine na hipotenuzo, a in b pa sta dolžini odsekov na hipotenuzi, na katera višina razdeli hipotenuzo.



Kvadratna sredina

Kvadratna sredina K pozitivnih števil a in b je

$$K = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$



Tudi v tem primeru lahko kvadratno sredino predstavimo s pomočjo pravokotnih trikotnikov. Če sta a in b dolžini katet pravokotnega trikotnika, potem je K dolžina katete enakostraničnega pravokotnega trikotnika, katerega dolžina hipotenuze je enaka dolžini hipotenuze prvotnega pravokotnega trikotnika.

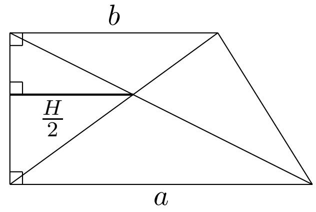
Harmonična sredina

Harmonična sredina H pozitivnih števil a in b je

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Harmonična sredina je pravzaprav obratna vrednost aritmetične sredine števil $\frac{1}{a}$ in $\frac{1}{b}$, torej

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$



Geometrijsko lahko harmonično sredino predstavimo s pomočjo pravokotnega trapeza. Če sta a in b dolžini osnovnic tega trapeza, je $\frac{H}{2}$ razdalja med presečiščem njegovih diagonal in pravokotnim krakom. Opozoriti velja, da lahko višino tega trapeza poljubno izberemo.

Opomba. V vsakem trapezu velja, da je dolžina njegove srednjice enaka aritmetični sredini dolžin osnovnic.

Oglejmo si, kako so naštete sredine urejene po velikosti. Pri tem velja omeniti, da je pri reševanju nalog največkrat potrebno uporabiti oceno, da je geometrijska sredina manjša ali enaka aritmetični sredini, o čemer govori naslednji izrek.

Izrek 1. *Naj bosta a in b pozitivni števili. Potem je $G \leq A$, torej*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Enakost velja natanko tedaj, ko je $a = b$.

Dokaz. Ker sta a in b pozitivni števili, obstajata taki pozitivni števili s in t, da je $a = s^2$ in $b = t^2$. Dokazali bomo, da je izraz $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ vedno večji ali enak nič. Velja

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{s^2+t^2}{2} - \sqrt{s^2t^2} = \frac{s^2+t^2-2st}{2} = \frac{(s-t)^2}{2} \geq 0.$$

Izraz $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ je torej enak nič natanko tedaj, ko je $s = t$, oziroma $a = b$. ∎

Zgled 5. *Naj bo a pozitivno število. Dokaži, da je*

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Rešitev. Ker je $A \geq G$, je

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1$$

in trditev je dokazana. ■

Izrek 2. *Naj bosta a in b pozitivni števili. Potem je $H \leq G$, torej*

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

Enakost velja natanko tedaj, ko je $a = b$.

Dokaz. Izrek hitro dokažemo s pomočjo prejšnjega izreka. Ker je $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ in sta števili na obeh straneh neenakosti pozitivni, je

$$\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

To neenakost pomnožimo z ab (ker je ab pozitivno število, se neenakost ohrani) in dobimo

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}.$$

Ker velja neenakost iz prejšnjega izreka natanko tedaj, ko je $a = b$, je izrek dokazan. ■

Izrek 3. *Naj bosta a in b pozitivni števili. Potem je $A \leq K$, torej*

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Enakost velja natanko tedaj, ko je $a = b$.

Dokaz. Ker je $(a-b)^2 \geq 0$, je $2ab \leq a^2+b^2$. Sledi

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+a^2+b^2+b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Seveda je $(a-b)^2 = 0$ natanko tedaj, ko je $a = b$, zato tudi enakost v izreku velja natanko tedaj, ko je $a = b$. ■

Povzemimo vse našteto v naslednjem izreku.

Izrek 4. *Naj bosta a in b pozitivni števili. Potem je*

$$\min\{a,b\} \leq H \leq G \leq A \leq K \leq \max\{a,b\},$$

torej

$$\min\{a,b\} \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max\{a,b\}. \tag{5}$$

Povsod veljajo enakosti natanko tedaj, ko je $a = b$.

Dokaz. Dokazati moramo še neenakosti $\min\{a,b\} \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ in $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max\{a,b\}$. Ker a in b povsod nastopata simetrično, lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $a \leq b$ (v nasprotnem primeru v dokazu samo zamenjamo vlogi a in b). Potem je

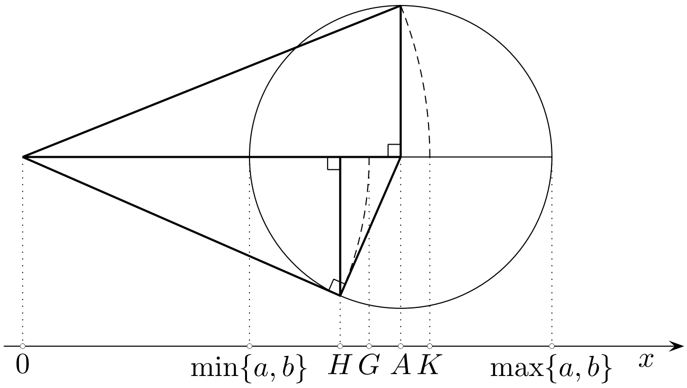
$$\min\{a,b\} = a = \frac{2}{2\frac{1}{a}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}},$$

pri čemer smo upoštevali, da je $a \leq b$, zato $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$ in $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$, ulomek pa se poveča, če se njegov imenovalec zmanjša. Podobno se prepričamo, da je

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{b^2+b^2}{2}} = b = \max\{a, b\}.$$

■

O veljavnosti neenakosti (5) se lahko prepričamo tudi geometrijsko, kot kaže spodnja skica.



Podoben izrek kot 4 velja tudi, če sredine definiramo za n pozitivnih števil. Zapišimo izrek še za splošni primer, dokaz tega izreka pa je predolg, da bi ga zapisali na tem mestu.

Izrek 5. *Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivna števila. Označimo $m = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$ in $M = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$. Potem je*

$$m \leq H \leq G \leq A \leq K \leq M.$$

torej

$$m \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \leq M.$$

Naloge

6. Naj bodo a, b in c nenegativna realna števila. Dokaži, da je $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$.
7. Naj bosta a in b pozitivni števili. Dokaži, da je $(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) \geq 4$.
8. Naj bosta a in b pozitivni števili. Označimo z A njuno aritmetično sredino, z G geometrijsko sredino in s H njuno harmonično sredino. Dokaži, da je $A + H \geq 2G$.

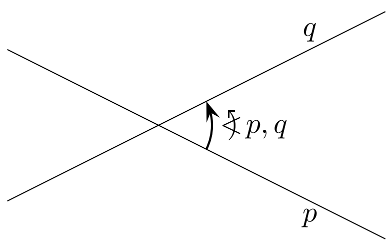
Usmerjeni koti

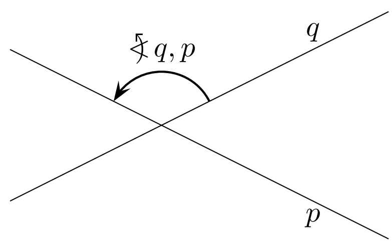
Za razumevanje tega prispevka je potrebno solidno znanje o kotih med premicami, o obodnih in središčnih kotih ter kotih v tetivnem štirikotniku.

V prejšnji številki Brihtneža smo spoznali osnovni izrek o koncikličnosti, s pomočjo katerega lahko preverimo, ali so štiri različne točke v ravnini konciklične. Pri uporabi tega izreka potrebujemo osnovno informacijo o legi posameznih točk. V nadaljevanju si bomo ogledali, kako lahko informacijo o legi točk podamo hkrati z velikostjo ustreznih kotov in tako pogosto enotno obravnavamo več sicer bistveno različnih možnosti.

Naj bosta p in q premici v ravnini. *Usmerjeni kot* $\measuredangle p, q$ *med premicama* p *in* q je najmanjši kot, za katerega je potrebno v pozitivni smeri zavrteti premico p, da postane vzporedna premici q. V definiciji usmerjenega kota je torej **nadvse pomemben** vrstni red posameznih premic.

smer vrteža



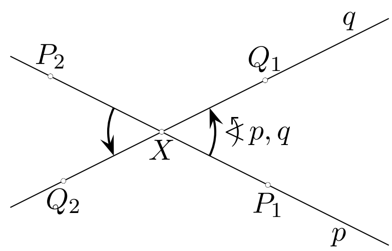


Pogosto podamo usmerjene kote s pomočjo točk. Če sta točki A in C različni od točke B, označimo z $\measuredangle ABC$ usmerjeni kot med premicama AB in BC. Neposredno iz defnicije usmerjenih kotov s pomočjo točk na premicah tako sledi

Izrek 1. *Označimo z X presečišče premic p in q. Potem za poljubno od točke X različno točko P na premici p in poljubno od točke X različno točko Q na premici q velja $\measuredangle PXQ = \measuredangle p, q$.* ■

Opomba. Na sliki desno torej velja

$$\begin{aligned} \measuredangle p, q &= \measuredangle P_1XQ_1 = \measuredangle P_2XQ_2 = \\ &= \measuredangle P_1XQ_2 = \measuredangle P_2XQ_1. \end{aligned}$$



Da držita prvi dve enakosti, je očitno, za veljavnost drugih dveh pa se moramo le natančno držati definicije usmerjenega kota: to je *pozitivno usmerjen kot med premicama*, ki sta v tem primeru podani s paroma točk.

Izrek 2. *Za poljubni premici p in q je $\measuredangle p, q + \measuredangle q, p = 0$ ali $\measuredangle p, q + \measuredangle q, p = \pi$.*

Dokaz. Če sta premici vzporedni, je seveda $\measuredangle p, q = \measuredangle q, p = 0$, v nasprotnem pa sta kota $\measuredangle p, q$ in $\measuredangle q, p$ suplementarna. ■

Po defniciji je usmerjeni kot med premicama najmanjši kot vrteža, za katerega je potrebno v pozitivni smeri zavrteti eno premico, da postane vzporedna drugi. Algebraično gledano je usmerjeni kot realno število na intervalu $[0, \pi)$.

Za poljubne tri premice p, q in r pomeni $\measuredangle p,q + \measuredangle q,r$ kot, za katerega je potrebno zavrteti premico p, da postane vzporedna r. Najmanjši tak kot pa je $\measuredangle p,r$, zato velja

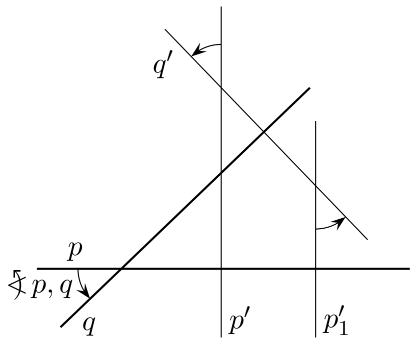
$$\measuredangle p,r \equiv \measuredangle p,q + \measuredangle q,r \pmod{\pi}.$$

(Zgornjo kongruenco moramo pravilno razumeti. Pravimo, da sta realni števili a in b kongruentni po modulu $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ in označimo $a \equiv b \pmod{m}$, če obstaja celo število k, da je $b-a = km$.)

Izrek 3. (Izrek o kotih z vzporednimi kraki) *Naj bosta p in q poljubni premici. Za vsako premico p', $p' \parallel p$, in vsako premico q', $q' \parallel q$, velja $\measuredangle p,q = \measuredangle p',q'$.*

Dokaz. Tu pravzaprav ni kaj dokazovati, saj v definiciji usmerjenih kotov ne razlikujemo med vzporednimi premicami. ∎

Izrek 4. (Izrek o kotih s pravokotnimi kraki) *Naj bosta p in q poljubni premici. Za vsako premico p', $p' \perp p$, in vsako premico q', $q' \perp q$, velja $\measuredangle p,q = \measuredangle p',q'$.*



Dokaz. Ker je $p' \perp p$ in $q' \perp q$, velja $\measuredangle p',p = \measuredangle q,q' = \frac{\pi}{2}$. Sledi

$$\begin{aligned}\measuredangle p,q &\equiv \measuredangle p,q + \pi \equiv \measuredangle p',p + \measuredangle p,q + \measuredangle q,q' \equiv \\ &\equiv \measuredangle p',q + \measuredangle q,q' \equiv \measuredangle p',q' \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Torej je

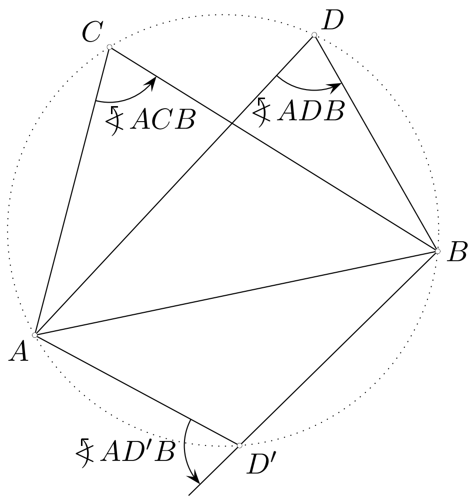
$$\measuredangle p,q \equiv \measuredangle p',q' \pmod{\pi}.$$

Ker pa ležita obe števili $\measuredangle p,q$ in $\measuredangle p',q'$ na intervalu $[0,\pi)$, tako velja $\measuredangle p,q = \measuredangle p',q'$. ∎

Opomba. Slika na desni kaže dva možna položaja premice p' in kateri usmerjeni koti so v vsakem od primerov enaki.

Prednost usmerjenih kotov je predvsem v tem, da lahko zelo strnjeno zapišemo mnoge trditve, pri katerih je sicer potrebno obravnavati več možnosti. Najpomembnejši je izrek o konciklićnosti, pri katerem informacijo o vrstnem redu točk na krožnici skrijemo v usmerjene kote.

Izrek 5. (Izrek o konciklićnosti) *Naj nobene tri izmed točk A, B, C in D ne ležijo na isti premici. Potem so točke A, B, C in D konciklične natanko tedaj, ko je $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$.*



Dokaz. Glede na lego točke D ločimo dva primera.

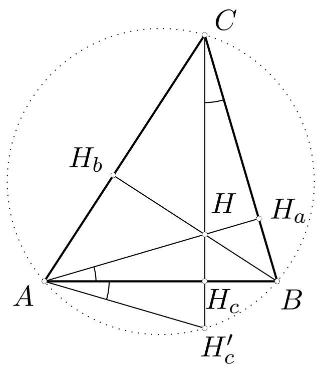
Če ležita točki C in D na istem bregu premice AB, so točke A, B, C in D konciklične natanko tedaj, ko je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Ker ležita točki C in D na istem bregu premice AB, je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ natanko tedaj, ko je $\measuredangle ACB = \measuredangle ADB$.

V drugem primeru pa naj ležita točki C in D' na različnih bregovih premice AB. Potem so točke A, B, C in D' konciklične natanko tedaj, ko je $\sphericalangle ACB + \sphericalangle AD'B = \pi$ oziroma $\sphericalangle ACB = \pi - \sphericalangle AD'B$. Ker ležita točki C in D' na različnih bregovih remice AB, je $\sphericalangle ACB = \pi - \sphericalangle AD'B$ natanko tedaj, ko je $\measuredangle ACB = \measuredangle AD'B$. ∎

Kot se spomnino iz prejšnje številke Brihtneža, velja

Izrek 6. *V vsakem trikotniku je nosilka poljubne stranice simetrala daljice med višinsko točko H in od oglišča različnim presečiščem nosilke višine na to stranico z očrtano krožnico.*

Dokaz. Označimo nožišča višin in višinsko točko trikotnika ABC na običajen način. S H_c' označimo od C različno točko, kjer premica CH_c seka trikotniku ABC očrtano krožnico $\mathcal{K}$. Ker je $CH_c \perp AH_c$ in $CH_a \perp AH_a$, je $\measuredangle H_cCH_a = \measuredangle H_cAH_a$. (Izrek o kotih s pravokotnimi kraki.) Sedaj pa upoštevamo, da so A, B in H_c kolinearne, A, H in H_a kolinearne, C, B in H_a kolinearne ter C, H, H_c in H_c' kolinearne, in dobimo



$$\measuredangle H_c'CB = \measuredangle H_cCH_a = \measuredangle H_cAH_a = \measuredangle H_cAH. \qquad (6)$$

Zaradi koncikličnosti točk A, B, C in H_c' velja

$$\measuredangle H_c'CB = \measuredangle H_c'AB. \qquad (7)$$

Zaradi kolinearnosti točk A, B in H_c velja

$$\measuredangle H_c'AB = \measuredangle H_c'AH_c. \qquad (8)$$

Upoštevamo (6), (7) ter (8) in dobimo

$$\measuredangle H_c'AH_c = \measuredangle H_cAH,$$

zato sta pravokotna trikotnika $AH_c'H_c$ in AHH_c skladna. Torej je res $|HH_c| = |H_cH_c'|$. ■

Pozoren bralec bo opazil, da smo ta dokaz zapisali tako, da smo v (delu) dokaza iz prve številke Brihtneža vse simbole $\sphericalangle$ nadomestili s simbolom $\measuredangle$. Ali lahko to vedno naredimo? Odgovor je seveda **ne**, saj orientacija pri običajno zapisanih kotih ni pomembna. Če zapišemo, da v trikotniku ABC velja $\sphericalangle ABC = 60°$, bo vsakdo takoj zapisal, da je tudi $\sphericalangle CBA = 60°$. **Seveda pa ni vseeno, ali obravnavamo usmerjeni kot $\measuredangle ABC$ ali pa usmerjeni kot $\measuredangle CBA$.**

V prejšnji številki Brihtneža smo zapisali, da je kot med tetivo in tangento, ki se dotika dane krožnice v krajišču tetive, enak nepriležnemu obodnemu kotu nad to tetivo. Z uporabo usmerjenih kotov lahko ta izrek povemo nekoliko drugače.

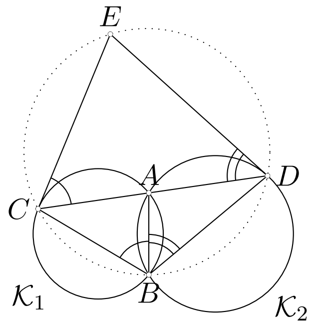
Izrek 7. (Izrek o kotu med tetivo in tangento) *Naj premica s seka krožnico $\mathcal{K}$ v različnih točkah A in B. Označimo s t tangento na krožnico $\mathcal{K}$ v točki A. Potem za vsako od krajišč tetive AB različno točko C na krožnici $\mathcal{K}$ velja $\measuredangle s,t = \measuredangle BCA$.*

Dokaz. Tu pravzaprav ni kaj dokazovati, saj smo se z uporabo usmerjenih kotov v običajnem izreku o kotu med tetivo in tangento le izognili težavi, ki nastane, če $\sphericalangle BCA$ ni prileżni kot. ■

Oglejmo si dve nalogi iz prejšnje številke Brihtneža še enkrat.

Zgled 1. *Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ naj se sekata v različnih točkah A in B. Premica skozi A seka krožnico $\mathcal{K}_1$ ponovno v točki C, $C \neq B$, krožnico $\mathcal{K}_2$ pa seka ponovno v točki D, $D \neq B$. Tangenta na krožnico $\mathcal{K}_1$ v točki C in tangenta na krožnico $\mathcal{K}_2$ v točki D se sekata v točki E. Dokaži, da so točke B, C, D in E koneiklične.*

Rešitev. Po izreku o kotu med tetivo AC in tangento CE je $\measuredangle ACE = \measuredangle ABC$. Po izreku o kotu med tetivo AD in tangento DE je $\measuredangle EDA = \measuredangle DBA$. Torej je



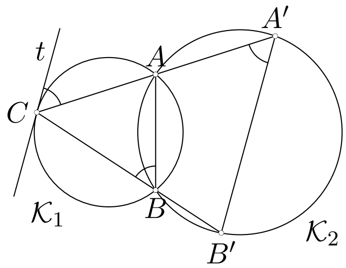
$$\measuredangle DBC = \measuredangle DBA + \measuredangle ABC = \measuredangle DCE + \measuredangle EDC = -\measuredangle CED,$$

saj v (vsakem) trikotniku CDE velja $\measuredangle DCE + \measuredangle EDC + \measuredangle CED = 0$. Torej je $\measuredangle DBC = -\measuredangle CED = \measuredangle DEC$, kar pomeni, da so točke C, B, D in E koncikli̇čne.

Bralca vabimo, da naj se o veljavnosti tega dokaza prepriča tudi v primeru, ko ležita točki E in D na istem bregu premice AC ali pa ko točka A ne leži med C in D. ■

Zgled 2. *Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ naj se sekata v različnih točkah A in B. Na krožnici $\mathcal{K}_1$ izberemo poljubno od točk A in B različno točko C. Premici CA in CB sekata krožnico $\mathcal{K}_2$ ponovno v točkah A' in B'. Dokaži, da je premica $A'B'$ vzporedna tangenti na krožnico $\mathcal{K}_1$ v točki C.*

Rešitev. Usmerjeni kot $\measuredangle AC, t$ med tetivo AC in tangento t je enak kotu $\measuredangle ABC$ nad tetivo CA. Ker so točke C, B in B' kolinearne, je $\measuredangle ABC = \measuredangle ABB'$. Ker so točke A, B, B', in A' koncikli̇čne, je $\measuredangle ABB' = \measuredangle AA'B'$. Ker so točke C, A in A' kolinearne, je $\measuredangle AA'B' = \measuredangle CA'B'$. Podobno je tudi $\measuredangle AC, t = \measuredangle A'C, t$. Sedaj pa združimo vse enakosti in zapišimo



$$\measuredangle A'C, t = \measuredangle CA'B',$$

kar pomeni, da je $t \parallel A'B'$. ■

Bralca sedaj vabimo, da poseže po svojih rešitvah geometrijskih nalog, ki jih je že pred časom reševal, in se vpraša: "Ali so bili vsi koti vedno zapisani s pravilno oziroma enako orientacijo?" Bralec se mora namreč zavedati, da je skrbno pisanje kotov z upoštevanjem pravilnih orientacij osnovni pogoj za uporabo usmerjenih kotov.

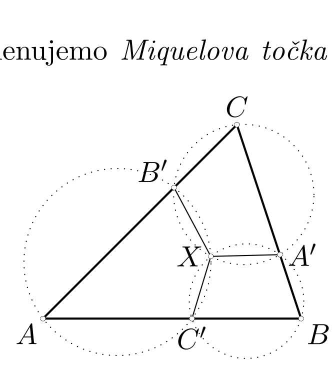
Povzemimo. Pri uporabi usmerjenih kotov pri reševanju geometrijskih problemov moramo rešitev **izjemno skrbno in natančno zapisati**, zato jih uporabljamo le, če je to v rešitvi zaradi obravnavanja različnih primerov zares smiselno. Na usmerjene kote običajno pomislimo, ko želimo uporabiti izrek o koncikličnosti, pa ne vemo za vrstni red točk na krožnici, ali pa želimo uporabiti izrek o kotih s pravokotnimi kraki, pa lege premic ne poznamo dovolj natančno.

Oglejmo si primer dokaza, pri katerem pa se uporabi usmerjenih kotov takorekoč ni možno izogniti. (V izreku spodaj $\mathcal{K}_{XYZ}$ označuje krožnico skozi (nekolinearne) točke X, Y in Z.)

Izrek 8. (Miquelov izrek) *Naj bo ABC poljuben trikotnik ter A', B' in C' od oglišč trikotnika različne točke na premicah BC, CA in AB. Potem se krožnice $\mathcal{K}_{AC'B'}$, $\mathcal{K}_{BA'C'}$ in $\mathcal{K}_{CB'A'}$ sekajo v isti točki.*

Opomba. Skupno presečišče krožnic $\mathcal{K}_{AC'B'}$, $\mathcal{K}_{BA'C'}$ in $\mathcal{K}_{CB'A'}$ imenujemo *Miquelova točka trikotnika ABC ter izbranih točk A', B' in C'*

Dokaz. Kot se pri vsaki geometrijski nalogi spodobi, najprej narišemo skico. Glede na to, da lega točk A', B' in C' na posameznih premicah ni natančno določena, ni možno narisati "splošnega primera". (Pa še trikotnik ABC je lahko neostrokoten .) Primer na sliki je morda tisti, na katerega najprej pomislimo. Ko zelo preudarno zapišemo dokaz (z običajnimi koti) za ta primer, vidimo, da lahko idejo dokaza uporabimo v splošnem, le usmerjene kote moramo uporabiti.



Označimo presečišče krožnic $\mathcal{K}_{AC'B'}$ in $\mathcal{K}_{BA'C'}$ z X. Ker so točke A, B', C' in X konciklične, velja $\measuredangle XC'A = \measuredangle XB'A$. Ker so točke A, B' in C kolinearne, velja $\measuredangle XB'A = \measuredangle XB'C$. Ker so točke A', B, C' in X konciklične, velja $\measuredangle XC'B = \measuredangle XA'B$. Ker so točke A, C' in B kolinearne, velja $\measuredangle XC'A = \measuredangle XC'B$. Ker so točke B, A' in C kolinearne, velja $\measuredangle XA'B = \measuredangle XA'C$. Torej je $\measuredangle XB'C = \measuredangle XA'C$ in so točke A', B', C in X konciklične. Točka X tako res leži tudi na krožnici $\mathcal{K}_{CB'A'}$. ■

Bralec naj sam nariše čimveč bistveno različnih primerov in naj za vsakega izmed njih napiše dokaz z (običajnimi) koti ter ga primerja z gornjim dokazom. Še posebej pozorno je potrebno pogledati vsako enakost usmerjenih kotov, saj pri prehodu na običajne kote to pomeni, da sta ustrezna kota enaka ali pa suplementarna.

Dokaz Miquelovega izreka je primer ekstremne uporabe usmerjenih kotov. Običajno pa je rdeča nit dokaza drugje in uporabljamo usmerjene kote le za enovito obravnavo oziroma poenostavitev kakšnega koraka pri daljših dokazih. Bralca zato vabimo, da si ob rešitvah tistih nalog, pri katerih uporablja izrek o konciklični, za vajo zapiše še rešitev z uporabo usmerjenih kotov. Z vajo mu bo tak način razmišljanja postal domač in bo lahko po njem posegel takrat, ko bo to zares potrebno. Prav tako bralca tudi vabimo, da pri pisanju kotov dosledno označuje kote tako, da oznake nakazujejo pozitivno orientirane kote.

Naloge

1. Naj bo ABC nepravokotni trikotnik in O središče njemu očrtane krožnice. Označimo krožnico skozi B, C in O s $\mathcal{K}$. Premici AB in AC sekata krožnico $\mathcal{K}$ ponovno v P in Q. Dokaži, da je $AO \perp PQ$.

2. Dokaži: Različne točke A, B in C so kolinearne natanko tedaj, ko je $\measuredangle ABC = 0$.

3. Dokaži: Za poljubne štiri različne točke A, B, C in D je

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CDA \equiv \measuredangle BAD + \measuredangle DCB \pmod{\pi}.$$

Sredozemsko matematično tekmovanje 2002

V aprilu je bilo organizirano peto sredozemsko matematično tekmovanje. Verjetno se boste sami prepričali, da naloge na tem tekmovanju niso prav lahke. Zaradi tega vabimo k sodelovanju le dijake, ki so v okviru priprav na mednarodno matematično olimpiado med najboljšimi. V letošnjem letu našim dijakom ni uspelo osvojiti medalje, so pa štirje prejeli pohvalo, in sicer Klemen Šivic in Tone Gradišek z Gimnazije Bežigrad, Aleksandra Franc s Prve gimnazije v Celju ter Erik Štrumbelj z Gimnazije Kočevje.

Naloge

1. Poišči vsa naravna števila x in y, za katera velja, da y deli x^2+1 in x^2 deli y^3+1.
2. Naj bodo x, y in a realna števila, za katera velja $x+y=x^3+y^3=x^5+y^5=a$. Določi vse možne vrednosti števila a.
3. Dan je ostrokoten trikotnik ABC. Naj bo M notranja točka stranice AC, N notranja točka stranice BC in K razpolovišče daljice MN. Očrtani krožnici trikotnikoma CAN in BCM se drugič sekata v točki D.

   Dokaži: premica CD gre skozi središče O trikotniku ABC očrtane krožnice natanko tedaj, ko gre simetrala stranice AB skozi K.
4. Dokaži: če so a, b in c taka nenegativna realna števila, da je $a^2+b^2+c^2=1$, potem velja

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2 .$$

Rešitve nalog

1. Če postavimo $x=y$, dobimo rešitev $x=y=1$. Iz $y=1$ sledi le $x=1$, če pa vzamemo $y=2$, dobimo $x=1$ ali $x=3$. Tako imamo tri rešitve: $(1,1)$, $(1,2)$ in $(3,2)$.

   Denimo, da je (x,y) rešitev, pri kateri je $x\neq y$ in $y>2$. Tedaj sta števili $\frac{x^2+1}{y}$ in $\frac{y^3+1}{x^2}$ naravni in je tudi njun produkt $\frac{x^2+1}{y}\cdot\frac{y^3+1}{x^2}$ naravno število. Ker lahko produkt preoblikujemo v $y^2+\frac{x^2+y^3+1}{x^2y}$, je tudi $\frac{x^2+y^3+1}{x^2y}$ naravno število. Zato je

$$\begin{aligned} x^2+y^3+1\geq x^2y \quad&\Leftrightarrow\quad x^2(y-1)\leq y^3+1 \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\quad x^2\leq\frac{y^3+1}{y-1}=y^2+y+1+\frac{2}{y-1}\leq y^2+y+1+1<(y+1)^2, \end{aligned}$$

   od koder sledi $x<y+1$, zaradi $x\neq y$ pa še $x<y$. Če je torej (x,y) rešitev in $y>2$, je $x<y$.

Ker y deli x^2+1, velja

$$x^2+1=yy_1, \tag{9}$$

kjer je y_1 naravno število. Očitno je $x>1$. Če bi privzeli $y_1 \geq x$, bi dobili $yy_1 \geq (x+1)x = x^2+x > x^2+1$, kar ni mogoče, zato je $y_1 < x$. Iz $x^2+1=yy_1$ sklepamo, da y_1 deli x^2+1, izrazimo pa $y=\frac{x^2+1}{y_1}$. Nato imamo $y^3+1=\frac{(x^2+1)^3}{y_1^3}+1=\frac{(x^2+1)^3+y_1^3}{y_1^3}$. Ker x^2 deli y^3+1, deli tudi $\frac{(x^2+1)^3+y_1^3}{y_1^3}$, $(x^2+1)^3+y_1^3$ in y_1^3+1. Vemo torej, da

$$y_1 \mid x^2+1\ , \tag{10}$$
$$x^2 \mid y_1^3+1 \tag{11}$$

in da je $y_1 < x$. Po tem, kar smo ugotovili v prejšnjem odstavku, je $y_1 \leq 2$.

- Naj bo $y_1=1$. Tedaj iz (11) sledi, da je $x=1$, iz (9) pa izpeljemo $y=2$. Toda s tem ne pridemo do nove rešitve.
- Naj bo $y_1=2$. Tedaj iz (11) sledi, da je $x=1$ ali $x=3$. Če je $x=1$, iz (9) izpeljemo $y=1$. Tudi to rešitev že poznamo. Če pa je $x=3$, iz (9) izpeljemo $y=5$, kar nam da še četrto rešitev zastavljene naloge.

Vse rešitve naloge so: $(1,1)$, $(1,2)$, $(3,2)$ in $(3,5)$.

2. Če je $x=-y$, dobimo $a=0$. Poiščimo še od 0 različne vrednosti števila a.

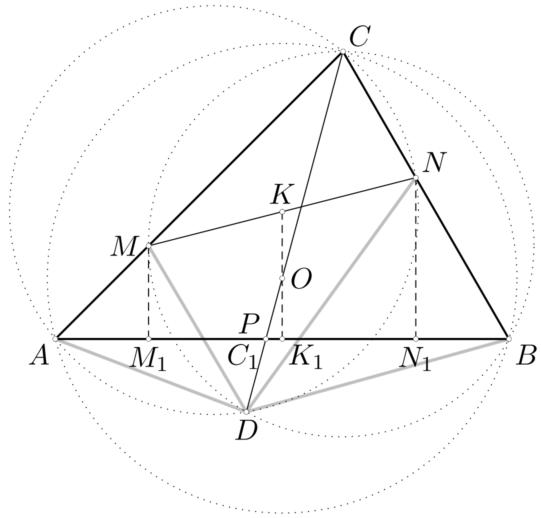
   Oglejmo si kvadratno enačbo $z^2-az+p=0$ in naj bosta x in y njena korena. Tedaj po vrsti izračunamo

$$\begin{aligned}
x+y &= a\\
x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy=a^2-2p\\
x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y)=a^3-3ap\\
x^4+y^4 &= (x+y)(x^3+y^3)-xy(x^2+y^2)=a^4-4a^2p+2p^2\\
x^5+y^5 &= (x+7)^5-5xy(x^3+y^3)-10x^2y^2(x+y)=a^5-5a^3p+5ap^2
\end{aligned}$$

Iz $x^3+y^3=a$ in $x^3+y^3=a^3-3ap$ dobimo $a^3-3ap=a$ oziroma $p=\frac{a^2-1}{3}$ (saj je $a\neq 0$). Podobno iz enačb za vsoto petih potenc sledi $a=a^5-5a^3p+5ap^2$ oziroma $a^4-5a^2p+5p^2=1$. V zadnji enačbi zamenjamo p z izračunanim izrazom, pa imamo $a^4-5a^2\cdot\frac{a^2-1}{3}+5\left(\frac{a^2-1}{3}\right)^2=1$, kar se poenostavi v $a^4-5a^2+4=0$ in razstavi $(a^2-1)(a^2-4)=0$. Od tod ni težko prebrati rešitev -2, -1, 1, 2.

Vse **dopustne** vrednosti števila a so tako -2, -1, 0, 1 in 2. Ta števila pa so tudi zares **možna**, saj je npr.

$$\begin{aligned}
-2 &= (-1)+(-1)=(-1)^3+(-1)^3=(-1)^5+(-1)^5,\\
-1 &= (-1)+0=(-1)^3+0^3=(-1)^5+0^5,\\
0 &= 1+(-1)=1^3+(-1)^3=1^5+(-1)^5,\\
1 &= 1+0=1^3+0^3=1^5+0^5 \text{ in}\\
2 &= 1+1=1^3+1^3=1^5+1^5.
\end{aligned}$$



3. Naj bo C_1 presečišče CO in AB. Potem velja $\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$. Presečišče CD in AB naj bo P. Dokazali bomo, da gre simetrala stranice AB skozi K natanko tedaj, ko $\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$ in tako rešili nalogo.

   Naj bodo M_1, K_1 in N_1 pravokotne projekcije točk M, K in N na AB. Simetrala stranice AB gre skozi K natanko tedaj, ko $|AM_1| = |BN_1|$, kar je ekvivalentno z $\frac{|AM|}{|BN|} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$. Trikotnika AMD in BND sta si podobna, saj velja $\sphericalangle MAD = \sphericalangle BND$ in $\sphericalangle AMD = \sphericalangle NBD$, zato velja tudi $\frac{|AM|}{|BN|} = \frac{|MD|}{|BD|}$. Po sinusnem izreku je $\frac{|MD|}{|BD|} = \frac{\sin\sphericalangle ACD}{\sin\sphericalangle BCD}$. Če uporabimo sinusni izrek v trikotniku APC, dobimo $\frac{|AP|}{\sin\sphericalangle ACP} = \frac{|CP|}{\sin\alpha}$, če pa ga uporabimo v trikotniku BPC, dobimo $\frac{|BP|}{\sin\sphericalangle BCP} = \frac{|CP|}{\sin\beta}$. Tako pridemo do $\frac{|AP|}{|BP|} = \frac{\sin\sphericalangle ACP\cdot\sin\beta}{\sin\sphericalangle BCP\cdot\sin\alpha} = \frac{|MD|\sin\beta}{|BD|\sin\alpha} = \frac{|AM|\sin\beta}{|BN|\sin\alpha} = \frac{\cos\beta\sin\beta}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$ in dokaz je končan.

4. V Cauchyjevo neenakost $(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) \ge (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$ vstavimo $x_1 = \sqrt{a^2(b^2+1)}$, $x_2 = \sqrt{b^2(c^2+1)}$, $x_3 = \sqrt{c^2(a^2+1)}$, $y_1 = \sqrt{\frac{a}{b^2+1}}$, $y_2 = \sqrt{\frac{b}{c^2+1}}$ in $y_3 = \sqrt{\frac{c}{a^2+1}}$, pa dobimo

$$\left(a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)\right)\left(\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\right) \ge \left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2 .$$

   Dokaz bo končan, ko bomo pokazali, da velja

$$\frac{4}{3} \ge a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1)\,. \tag{12}$$

   Ker je $a^2+b^2+c^2=1$, imamo

$$\begin{aligned} a^2(b^2+1)+b^2(c^2+1)+c^2(a^2+1) &= a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = \\ &= 1+\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{3} \le \\ &\le 1+\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^4+b^4+c^4)}{3} = \\ &= 1+\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3} = \frac{4}{3}\,. \end{aligned}$$

   Sedaj je namreč

$$\frac{4}{3}\left(\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\right) \ge \left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$$

   oziroma

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1} \ge \frac{3}{4}\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2 .$$

   Enakost velja natanko tedaj, ko je $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Da bi namreč v Cauchyjevi neenakosti veljala enakost, morata biti vektorja (x_1,x_2,x_3) in (y_1,y_2,y_3) linearno odvisna. V našem primeru to pomeni, da je

$$\sqrt{a^2(b^2+1)} = k\sqrt{\frac{a}{b^2+1}},\ \sqrt{b^2(c^2+1)} = k\sqrt{\frac{b}{c^2+1}}\ \text{ in }\ \sqrt{c^2(a^2+1)} = k\sqrt{\frac{c}{a^2+1}}$$

za neki $k \in \mathbb{R}$. Ko gornji sistem enačb preoblikujemo, dobimo pogoj $a^2 = b^2 = c^2$, kar nam z upoštevnjem zveze $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ da $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Nazadnje preverimo, da pri tako izbranih a, b in c tudi v neenakosti (12) velja enakost.

Rešitve nalog iz prejšnje številke

K rešitvi naloge običajno vodi več poti in vse matematično veljavne rešitve so pravilne. V rešitvah, ki jih objavljamo, je izbrana tista pot, ki se najbolj ujema s prispevkom, v katerem je bila določena naloga zastavljena. Če se tvoja rešitev od navedene rešitve bistveno razlikuje, se o rešitvi pogovori s tvojim učiteljem matematike.

Teorija števil

1. To štirimestno število je oblike $x = \overline{abba}$, torej

$$x = \overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b).$$

Zato 11 deli x in je po pogoju naloge x enak $5 \cdot 7 \cdot 11$ ali $7 \cdot 11 \cdot 13$ ali $11 \cdot 13 \cdot 17$, torej $x = 385$ ali $x = 1001$ ali $x = 2431$. Edino izmed teh števil, ki zadošča vsem zahtevam, je 1001.

2. Ker n ni deljivo s 3, je $n = 3k + 1$ ali $n = 3k + 2$. V prvem primeru je

$$n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1,$$

v drugem pa

$$n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1.$$

Vsakič je ostanek n^2 pri deljenju s 3 enak 1.
Opomba. Nalogo lahko enostavno rešimo z uporabo kongruenc. Če je $p \equiv 1 \pmod 3$, je $p^2 \equiv 1^2 = 1 \pmod 3$. Če pa je $p \equiv 2 \pmod 3$, je $p^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$.

3. Spomnimo se: če 9 deli neko število, potem deli tudi vsoto števk tega števila. Potem mora biti $1 + 9 + 8 + 4 + x + y = 2 \cdot 9 + 4 + x + y$ deljivo z 9 in zato $4 + x + y$ deljivo z 9. Ker sta x in y manjša ali enaka 9, je $4 + x + y \leq 4 + 9 + 9 = 23$ in je lahko $4 + x + y$ enako le 9 ali 18. Prvi primer nam da $x + y = 5$, drugi pa $x + y = 14$.
Upoštevajmo še podatek, da 8 deli $\overline{1984xy}$. Če zapišemo $\overline{1984xy} = 198400 + 10x + y = 8 \cdot 24800 + 8x + 2x + y$, sledi, da $8 \mid 2x + y$. Ker je $2x + y \leq 2 \cdot 9 + 9 = 27$, je $2x + y$ enako 8, 16 ali 24.
Ločimo šest primerov:

- $x + y = 5$ in $2x + y = 8$, ki da rešitev $x = 3$ in $y = 2$;
- $x + y = 5$ in $2x + y = 16$, kar nam da $x = 16$ in $y = -11$;
- $x + y = 5$ in $2x + y = 24$, kjer je $y = -14$ negativno;
- $x + y = 14$ in $2x + y = 8$, kjer je $x = -6$ negativno;
- $x + y = 14$ in $2x + y = 16$, ki nam da $y = 12, x = 2$;
- $x + y = 14$ in $2x + y = 24$, kjer je $x = 10$ in $y = 4$.

Ker sta x in y pozitivni števki, je edina rešitev $x = 3$ in $y = 2$ in to je število 198432.

4. Število lahko zapišemo kot $\overline{abb} = 100a + 10b + b = (7 \cdot 14 + 2)a + (7 + 4)b = 7(14a + b) + 2a + 4b$. Ker je deljivo s 7, mora 7 deliti $2a + 4b = 2(a + 2b)$. Očitno potem $7 \mid a + 2b = a + b + b$, to pa je ravno vsota števk danega števila.

5. Prva tri praštevila so 2, 3 in 5, prva sestavljena števila pa 4, 6 in 8. Iskano število je ravno najmanjši skupni večkratnih teh števil, to pa je $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

6. Ker je to število n deljivo s $35 = 5 \cdot 7$ in $77 = 7 \cdot 11$, je deljivo tudi s 5, 7, 11 in vsemi njihovimi produkti. Ne smemo pozabiti, da je n deljivo tudi z 1. Poglejmo, za katera števila vemo, da so delitelji n. To so 1, 5, 7, 11, $5 \cdot 7 = 35$, $5 \cdot 11 = 55$, $7 \cdot 11 = 77$ in $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$. Teh deliteljev je natanko 8 in vsi delijo 385, torej je $n = 385$ iskano število.

7. Iskano število je najmanjši skupni večkratnik danih števil, torej število $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

8. Srečale se bodo spet, ko bo preteklo toliko dni, kolikor je najmanjši skupni večkratnik števil 4, 6, 8 in 12. Torej se bodo srečale čez $2^3 \cdot 3 = 24$ dni.

9. Svetilki skupaj posvetita vsakih $2^2 \cdot 3 = 12$ sekund. Ker je $60/12 = 5$, bosta v minuti skupaj posvetili petkrat.

10. $36288 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

11. Kot kaže račun

$$\begin{aligned} 12520 &= 4 \cdot 3104 + 104 \\ 3104 &= 29 \cdot 104 + 88 \\ 104 &= 1 \cdot 88 + 16 \\ 88 &= 5 \cdot 16 + 8 \\ 16 &= 2 \cdot 8 + 0, \end{aligned}$$

je največji skupni delitelj števil 12520 in 3104 enak 8. V drugem primeru pa velja

$$\begin{aligned} 99876 &= 28 \cdot 3529 + 3064 \\ 3529 &= 1 \cdot 3064 + 465 \\ 465 &= 1 \cdot 274 + 191 \\ 274 &= 1 \cdot 191 + 83 \\ 191 &= 2 \cdot 83 + 25 \\ 83 &= 3 \cdot 25 + 8 \\ 5 &= 3 \cdot 8 + 1 \\ 8 &= 1 \cdot 8 + 0, \end{aligned}$$

kar pomeni, da sta si števili 99876 in 3529 tuji.

12. Označimo iskano praštevilo s p. Veljati mora $p = a^2 - 1$ za neko naravno število a. Toda $p = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ je praštevilo in $a + 1 > 1$, zato mora biti $a - 1 = 1$ oziroma $a = 2$. Potem pa je $p = 2^2 - 1 = 3$ in to je edino praštevilo z iskano lastnostjo.

13. Veljati mora $2p + 1 = m^3$ za neko naravno število m. Ker je število $2p + 1$ liho, mora biti tudi m liho. Pišimo $m = 2n + 1$. Potem je $2p + 1 = (2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$, torej $p = 4n^3 + 6n^2 + 3n = n(4n^2 + 6n + 3)$. Vemo, da je p praštevilo in očitno je $4n^2 + 6n + 3 > 1$, zato mora biti $n = 1$. Potem pa je $p = 4 + 6 + 3 = 13$ res praštevilo in $2p + 1 = 27 = 3^3$ popoln kub. Edina rešitev je $p = 13$.

14. S poskušanjem kmalu najdemo rešitev $p = 3$, za katero je $8p^2 + 1 = 8 \cdot 3^2 + 1 = 73$ tudi praštevilo. Opazimo tudi, da je v vseh ostalih primerih $8p^2 + 1$ deljivo s 3. Dokažimo to. Naj bo p različno od 3. Potem p ni deljivo s 3 in v drugi nalogi smo pokazali, da je njegov

kvadrat p^2 oblike $3k+1$ za nek k (torej ostanek kvadrata pri deljenju s 3 je 1). Potem pa je $8p^2+1 = 8(3k+1)+1 = 24k+9 = 3(8k+3)$ sestavljeno.
Zadnji del bi lahko dokazali tudi s pomočjo kongruenc. Ker je $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, je $8p^2+1 \equiv 8+1 = 9 \equiv 0 \pmod 3$ in za $p \neq 3$ res $3 \mid 8p^2+1$.

15. Ulomke razširimo na skupni imenovalec $\frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6} = \frac{2m^3+3m^2+m}{6}$. To število bo celo natanko tedaj, ko bo števec deljiv s 6. Pišimo: $2m^3+3m^2+m = m(2m^3+3m+1) = m(2m+1)(m+1)$. Ker sta m in $m+1$ zaporedni celi števili, je natanko eno sodo. Pokažimo še, da tudi $3 \mid m(m+1)(2m+1)$. Če je m deljivo s 3, je to očitno res. Če je $m = 3k+1$, potem je $2m+1 = 6k+3 = 3(2k+1)$, pri $m = 3k+2$ pa je $m+1 = 3k+3 = 3(k+1)$. Vsakič je izraz res deljiv s tri. Torej je začetni izraz celo število za vsako celo število m.

16. Prva ideja, ki jo dobimo, je, da zapišemo n v obliki $n = 6k+r$ in preverimo, ali je n^3+11n res deljivo s 6, ko je $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Temu se lahko z malce spretnosti izognemo, če zapišemo $n^3+11n = n^3-n+12n = (n-1)n(n+1)+12n$. To število je deljivo s 6, saj so $n-1, n$ in $n+1$ tri zaporedna števila, od katerih je vsaj eno sodo in natanko eno deljivo s 3, $12n$ pa je tudi deljivo s šest.

17. Veljati mora $3(n^2+n)+7 \equiv 0 \pmod 5$, oziroma $3(n^2+n)-3 \equiv 0 \pmod 5$. Zato je $3(n^2+n-1) \equiv 0 \pmod 5$, od koder sledi, da $5 \mid n^2+n-1$. Če je

- $n \equiv 0 \pmod 5$, je $n^2+n-1 \equiv -1 \pmod 5$.
- $n \equiv 1 \pmod 5$, potem je $n^2+n-1 \equiv 1 \pmod 5$.
- $n \equiv 2 \pmod 5$, dobimo $n^2+n-1 \equiv 0 \pmod 5$.
- $n \equiv 3 \pmod 5$, je $n^2+n-1 \equiv 2 \pmod 5$.
- $n \equiv 4 \pmod 5$, je $n^2+n-1 \equiv -1 \pmod 5$.

Izraz je deljiv s 5, če je $n = 5k+2$, kjer je k celo število.
Opomba. Zadnji del lahko dokažemo tudi hitreje, če opazimo, da je

$$n^2+n-1 \equiv n^2+n-1+5n+10 = n^2+6n+9 = (n+3)^2 \pmod 5,$$

torej je izraz deljiv s 5 takrat, ko $5 \mid n+3$, oziroma pri $n = 5k+2$.
Opomba. Nalogo lahko rešimo tudi brez uporabe kongruenc, če v dani izraz vstavljamo $n = 5k+r$, kjer je $r \in \{0,1,2,3,4\}$.

18. Vidimo, da je $7777 \equiv 2 \pmod 5$, zato je $7777^{8888} \equiv 2^{8888} \pmod 5$. Potence dvojke dajo pri deljenju s 5 naslednje ostanke:

n	$2^n \pmod 5$
1	2
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$4 \cdot 2 = 8 \equiv 3$
4	$3 \cdot 2 = 6 \equiv 1$

Torej je $2^4 \equiv 1 \pmod 5$ in zato $2^{8888} = (2^4)^{2222} \equiv 1^{2222} = 1 \pmod 5$.

19. Poskušajmo izraz poenostaviti

$$5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k} = 5 \cdot 5^{5k} + 4^2 \cdot 4^{5k} + 3^{5k} = 5 \cdot (5^5)^k + 16 \cdot (4^5)^k + (3^5)^k.$$

Poglejmo sedaj ostanke potenc števil 3, 4, in 5 pri deljenju z 11.

$n \pmod{11}$	$3^n \pmod{11}$	$4^n \pmod{11}$	$5^n \pmod{11}$
1	3	4	5
2	$3 \cdot 3 = 9$	$4 \cdot 4 = 16 \equiv 5$	$5 \cdot 5 = 25 \equiv 3$
3	$9 \cdot 3 = 27 \equiv 5$	$5 \cdot 4 = 20 \equiv 9$	$3 \cdot 5 = 15 \equiv 4$
4	$5 \cdot 3 = 15 \equiv 4$	$9 \cdot 4 = 36 \equiv 3$	$4 \cdot 5 = 20 \equiv 9$
5	$4 \cdot 3 = 12 \equiv 1$	$3 \cdot 4 = 12 \equiv 1$	$9 \cdot 5 = 45 \equiv 1$

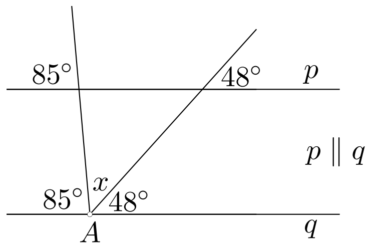
Ker je $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$, $4^5 \equiv 1 \pmod{11}$ in $5^5 \equiv 1 \pmod{11}$, dobimo

$$5 \cdot (5^5)^k + 16 \cdot (4^5)^k + (3^5)^k \equiv 5 \cdot (1)^k + 5 \cdot (1)^k + (1)^k = 5 + 5 + 1 = 11 \equiv 0 \pmod{11}$$

in naloga je dokazana.

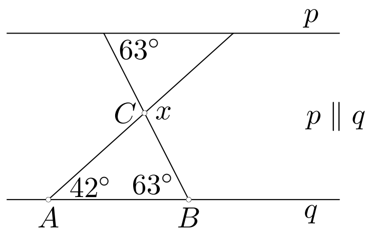
O kotih

1. (a) Ker je $p \parallel q$, lahko s pomočjo izreka o kotih z vzporednimi kraki določimo dva izmed treh ostrih kotov z vrhom A. Torej je



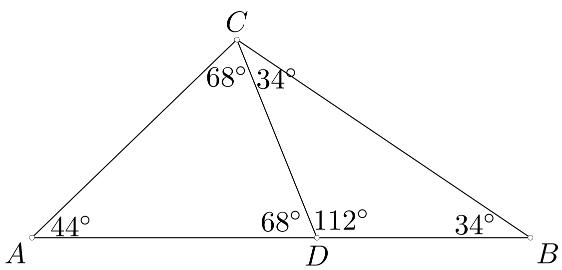
$$x = 180° - 85° - 48° = 47°.$$

(b) Ker je $p \parallel q$, lahko s pomočjo izreka o kotih z vzporednimi kraki določimo kot pri B v trikotniku ABC. Neznani kot x je zunanji kot pri C v trikotniku ABC, zato je



$$x = 42° + 63° = 105°.$$

2. Ker je trikotnik ADC enakokrak z vrhom pri A, velja



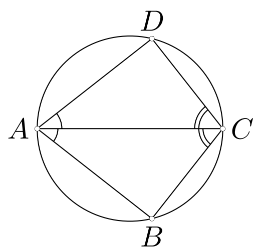
$$\sphericalangle CDA = \sphericalangle ACD = \tfrac{1}{2}(180° - 44°) = 68°.$$

Ker je tudi trikotnik DBC enakokrak, velja

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle DCB = \tfrac{1}{2} \sphericalangle CDA = 34°.$$

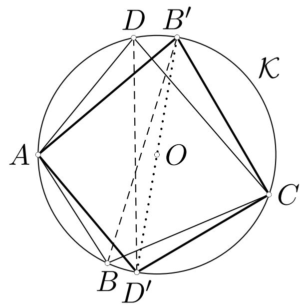
Torej je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = 68° + 34° = 102°$. Koti trikotnika ABC tako po vrsti merijo $44°$, $34°$ in $102°$.

3. Ker je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$ in $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCA$, je tudi $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC$. Ker pa sta $\sphericalangle CBA$ in $\sphericalangle ADC$ kota nad isto tetivo AC, njuna vrhova pa ležita na različnih bregovih premice AC, sta suplementarna. Torej je

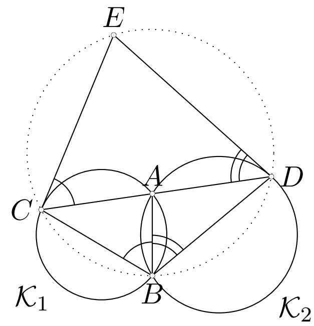


$$\sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC = 180°.$$

Sledi $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC = 90°$ in AC je premer štirikotniku $ABCD$ očrtane krožnice.



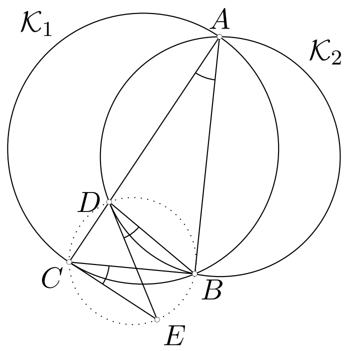
4. Ker je BB' simetrala kota CBA, je točka B' razpolovišče tistega loka $\widehat{CA}$ krožnice $\mathcal{K}$, ki ne vsebuje točke B. Podobno, ker je DD' simetrala kota ADC, je točka D' razpolovišče tistega loka $\widehat{AC}$ krožnice $\mathcal{K}$, ki ne vsebuje točke D.
Oglejmo si sedaj tetivni štirikotnik $AD'CB'$. Ker je $|AB'| = |B'C|$, sta obodna kota $\sphericalangle B'D'A$ in $\sphericalangle CD'B$ nad tetivama AB' in $B'C$ enaka. Torej je $D'B'$ simetrala kota $AD'C$. Podobno iz $|AD'| = |D'C|$ sklepamo, da je $B'D'$ simetrala kota $AB'C$. Sedaj pa uporabimo prejšnjo nalogo in sklepamo, da je $B'D'$ premer krožnice $\mathcal{K}$. Središče te krožnice pa je ravno razpolovišče daljice $B'D'$.



5. Narišimo natančno skico. Po izreku o kotu med tetivo AC in tangento CE je $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ABC$. Po izreku o kotu med tetivo AD in tangento DE je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DBA$. Torej je

$$\begin{aligned} \sphericalangle DBC &= \sphericalangle ABC + \sphericalangle DBA = \sphericalangle DCE + \sphericalangle EDC = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle CED. \end{aligned}$$

Ker ležita točki B in E na različnih bregovih premice CD, so točke C, B, D in E konciklične.

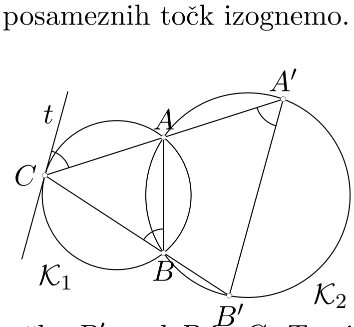


Ali je naloga rešena? Pravzaprav **NE**. Gornji dokaz je bil tesno povezan s skico, iz katere smo razbrali, da ležita točki B in E na različnih bregovih premice CD. Seveda je možno tudi, da ležita točki B in E na istem bregu premice AC, kar prikazuje skica na desni. Torej moramo za **popolno rešitev naloge** prepoznati in pravilno obravnavati **vse možnosti**. V primeru, ki ga prikazuje desna skica, po izreku o kotu med tetivo CB in tangento CE velja $\sphericalangle ECB = \sphericalangle CAB$. Podobno po izreku o kotu med tetivo DB in tangento DE velja $\sphericalangle EDB = \sphericalangle DAB$. Torej je

$$\sphericalangle ECB = \sphericalangle EDB.$$

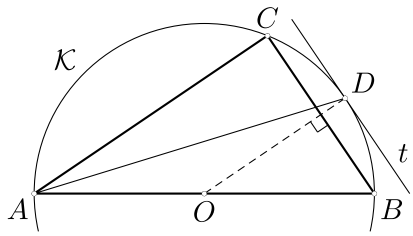
Ker ležita točki E in B na istem bregu premice CD, so tudi v tem primeru točke C, B, D in E konciklične.

Opomba. Pripomniti velja, da tudi z obravnavo drugega primera naloga še ni v celoti rešena, saj nismo dokazali, da ni možen še kakšen bistveno drugačen položaj tetiv in tangent. Pri obeh gornjih dokazih namreč uporabimo izrek o kotu med tetivo in tangento in izrek o konckličnosti, za ta dva izreka pa vemo, da veljata le pri zelo natančnih predpostavkah o legi posameznih točk. Bralca zato vabimo, da si prebere sestavek o usmerjenih kotih, kjer bo v rešitvi zgleda 1 videl, kako se lahko vsem zapletom z lego posameznih točk izognemo.



6. Kot med tetivo CA in tangento t je enak kotu $\sphericalangle ABC$ nad tetivo CA. Ker je štirikotnik $ABB'A'$ tetiven, je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AA'B'$. Torej sta si premici t in $A'B'$ res vzporedni.
Podobno kot pri prejšnji nalogi se tudi ob tej rešitvi vprašamo, ali smo kaj spregledali. **Vsekakor smo.** Iz narisane skice smo sklepali, da leži točka A med A' in C. Iz besedila naloge pa sledi le, da je $A \neq A'$. Kot bo bralec sam poiskal primer, lahko leži točka A' tudi med A in C. Podobno je možno tudi, da leži točka B' med B in C. Torej iz besedila naloge ne sledi, da so A, B, B' in A' zaporedne točke na krožnici, kar smo pri zgoraj zapisanem dokazu uporabili.

Bralca tudi pri tej nalogi vabimo, da si prebere sestavek o usmerjenih kotih, kjer bo v rešitvi zgleda 2 videl, kako se lahko vsem zapletom z lego posameznih točk izognemo.



7. Simetrala kota $\sphericalangle BAC$ trikotnika ABC seka krožnico $\mathcal{K}$ v razpolovišču tistega loka $\widehat{BC}$, ki ne vsebuje točke A. Označimo z O središče krožnice $\mathcal{K}$. Potem je OD polmer krožnice $\mathcal{K}$ in zaradi $|BD| = |CD|$ velja $OD \perp BC$. Po definiciji tangente pa je $t \perp OD$, zato je $t \parallel BC$.

http://www.dmfa.si/Brihtnez/BrihtnezIndex.html

Brihtnež, Letnik 0, številka 3
December 2002