Brihtnež

Elektronska revija za mlade matematike

Letnik 0, številka 2

`http://www.dmfa.si/Brihtnez/BrihtnezIndex.html`

Vsebina

Kot smo zapisali že v prvi številki, se bodo lahko najboljši tekmovalci vključili v eno izmed skupin, ki se bosta udeleževali raziskovalnih dni ter zimskih in letnih šol oziroma priprav na mednarodno matematično olimpiado. Člane prve skupine tokrat vabimo, da nam pošljejo rešitve nalog 3, 4 in 6 iz prispevka *Teorija števil* in nalog 1, 2 in 3 iz prispevka *O kotih*. Člane druge skupine pa vabimo, da nam pošljejo rešitve nalog 13, 14 in 17 iz prispevka *Teorija števil* in nalog 4, 5 in 7 iz prispevka *O kotih*. Rešitve (samo v pisni obliki) morajo prispeti na naslov **DMFA Slovenije, Uredništvo revije Brihtnež, Jadranska 19, 1000 Ljubljana**, najkasneje do 14. 12. 2002. Rešitev, prispelih po tem roku, ne bomo upoštevali, in sicer ne glede na vzrok zamude. Prav tako tudi ne bomo upoštevali rešitev, poslanih po elektronski pošti.

Teorija števil

Deljivost

Teorija števil se v glavnem ukvarja s preučevanjem lastnosti celih števil

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Za začetek se bomo omejili samo na naravna števila $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. To so pozitivna cela števila.

Oglejmo si najprej pojem *delitelj*. Delitelji števila 6 so 1, 2, 3 in 6. Delitelji števila 21 so 1, 3, 7 in 21. Delitelja števila 11 sta 1 in 11.

Pravimo, da je naravno število a *delitelj* naravnega števila b, če obstaja takšno naravno število k, da je

$$b = ka.$$

Krajše zapišemo $a \mid b$, kar preberemo: a *deli* b. Dejstvo, da je a delitelj b, lahko povemo oziroma zapišemo na več načinov, na primer:

- a deli b.
- $a \mid b$.
- a je delitelj b.
- $b = ak$ za neko naravno število k.
- b/a je naravno število.
- b je deljiv z a.
- b je večkratnik a.

Paziti moramo, da ne zamenjamo znakov | in / med seboj (navpična črta označuje, da neko število deli drugo, poševna črta pa loči števec in imenovalec v ulomku).

Naslednji zgled je naloga s področnega tekmovanja (8. razred leta 2002).

Zgled 1. *Na papir sem napisal štirimestno število, ki je deljivo s tri, štiri in pet. Na zadnji dve števki je kapnilo črnilo in nista vidni. Vidi se le* 86.
Zadnji dve števki sta:

*(***A***)* 60 *(***B***)* 40 *(***C***)* 30 *(***D***)* 20 *(***E***)* 15

Rešitev. Zapišimo neznano število v obliki $\overline{86xy}$, kjer smo z x in y označili števki, ki ju je prekrilo črnilo. Ker je to število deljivo s 5, je y lahko le 0 ali 5. Toda število je deljivo tudi s 4, zato mora biti y sod in je lahko le 0. Da bo število deljivo s 4, mora biti $\overline{xy} = \overline{x0}$ deljivo s 4, torej mora biti tudi x sod. Upoštevajmo še, da je $\overline{86xy} = \overline{86x0}$ deljivo s 3. Število je deljivo s 3, če je vsota njegovih števk deljiva s 3, torej mora biti $8 + 6 + x + 0$ deljivo s 3. Če zapišemo $14 + x$ v obliki $12 + x + 2$, ugotovimo, da mora biti $x + 2$ deljiv s 3, pri čemer vemo, da je x soda števka. Edina možnost je $x = 4$, tako da sta zadnji števki 4 in 0.

Praštevila in sestavljena števila

Naravno število je *praštevilo*, če je večje od 1 in sta njegova edina delitelja 1 in število samo.

Zgled 2. *Števili* 2 *in* 3 *se razlikujeta za* 1 *in sta obe praštevili. Ali obstaja še kakšen par števil s to lastnostjo?*

Rešitev. Označimo iskani števili s p in $p+1$. Eno izmed dveh zaporednih števil je zagotovo sodo. Edino sodo praštevilo je število 2, zato mora biti eno izmed teh dveh praštevil enako 2. V primeru, ko je $p=2$, dobimo $p+1=3$. Če pa je $p+1=2$, je $p=1$. Ker 1 ni praštevilo, sta 2 in 3 edini zaporedni praštevili.

Zgled 3. *Dokaži, da so vsa praštevila, večja od* 3*, oblike* $6k-1$ *ali* $6k+1$*, kjer je* k *naravno število.*

Rešitev. Vsako naravno število lahko zapišemo v obliki $6k+r$, kjer je $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Pri tem smo pravzaprav zapisali, da je vsako število večkratnik števila 6 (tedaj je $r=0$) ali pa da pri deljenju s 6 neki ostanek (ostanek je lahko 1, 2, 3, 4 ali 5). Števila oblike $6k$, $6k+2$, $6k+3$ in $6k+4$ so sestavljena, saj so deljiva z 2 ali 3. Praštevila so torej res lahko oblike $6k+1$ ali $6k+5 = 6(k+1)-1$.

Zgled 4. *Za vsako praštevilo p, večje od 3, je produkt njegovih sosednjih števil deljiv s 24.*

Rešitev. Radi bi dokazali, da je produkt števil $p-1$ in $p+1$ deljiv s 24. V prejšnjem zgledu smo pokazali, da je vsako praštevilo, večje od 3, oblike $6k+1$ ali $6k+5$. Če je $p=6k+1$, je

$$(p-1)(p+1) = (6k+1-1)(6k+1+1) = 6k(6k+2) = 12k(3k+1).$$

Če je k sodo število, je ta izraz očitno deljiv s 24. Če je k liho, je $3k+1$ sodo in izraz je spet deljiv s 24.
Poglejmo še primer, ko je p oblike $6k+5$. Tedaj je

$$(p-1)(p+1) = (6k+5-1)(6k+5+1) = (6k+4)(6k+6) = 12(3k+2)(k+1).$$

Če je k liho število, je $k+1$ sodo, če pa je k sodo, je tudi $3k+2$ sodo, v vsakem primeru torej velja $24 \mid (p-1)(p+1)$.

Zgled 5. *Poišči vsa takšna praštevila p, da sta tudi števili* $p+10$ *in* $p+14$ *praštevili.*

Rešitev. Naloge takega tipa se ponavadi lotimo tako, da naredimo preglednico za prvih nekaj praštevil in na podlagi rezultatov uganemo kakšno lastnost, ki jo nato še dokažemo.

p	2	3	5	7	11	13
$p+10$	$12=2^2\cdot 3$	13	$15=3\cdot 5$	17	$21=3\cdot 7$	23
$p+14$	$16=2^4$	17	19	$21=3\cdot 7$	$25=5^2$	$27=3^3$

Našli smo eno rešitev, in sicer $p=3$. Vidimo tudi, da je v vseh ostalih primerih eno izmed števil $p+10$ oziroma $p+14$ deljivo 3. Pokažimo, da je za vsako praštevilo p, različno od 3, eno izmed števil $p+10$ in $p+14$ deljivo s 3.
Ker p ni deljivo s 3, je $p=3k+1$ ali $p=3k+2$. V prvem primeru je s 3 deljivo število $p+14 = 3k+1+14 = 3(k+5)$, v drugem pa $p+10 = 3p+2+10 = 3(p+4)$ in zato ti števili ne moreta biti praštevili. Edina rešitev je torej $p=3$.
Opomba. Zgled lahko rešimo še na mnogo drugih načinov. Lahko bi za praštevila, večja od

3, uporabili že znano lastnost, da so ta praštevila oblike $6k+1$ oziroma $6k-1$. V razdelku o kongruencah bomo to nalogo rešili še enkrat, seveda z uporabo kongruenc.

Naravno število, ki ni niti 1 niti praštevilo, je *sestavljeno*. Razlog, zakaj so praštevila tako pomembna, je v tem, da lahko vsako naravno število (različno od 1) zapišemo na samo en način kot produkt praštevilskih deliteljev, če se ne oziramo na vrstni red faktorjev. Na primer

$$74844 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Tako faktorizacijo imenujemo *praštevilski razcep.* V tem primeru vidimo, da 2 deli 74844 natanko dvakrat (in ne trikrat) in da 13 ne deli števila 74844.

Praštevilski razcep naravnega števila n je oblike

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k},$$

kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_k$ različna praštevila in $a_1, a_2, \ldots, a_k$ naravna števila. Če predpostavimo še, da je $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n$, je ta razcep enolično določen, torej je en sam.

Poglejmo si nekaj praštevilskih razcepov.

$$\begin{aligned} 72 &= 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2 \\ 77 &= 7 \cdot 11 \\ 2002 &= 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \\ 61 &= 61 \end{aligned}$$

V zadnjem primeru nastopa praštevilo, ki ima v razcepu le samo sebe (v resnici ne gre za produkt).

Zgled 6. *Vzemimo poljubno trimestno število. Zapišimo ga dvakrat zapored, da dobimo šestmestno število. Pokaži, da so* 7, 11 *in* 13 *delitelji tega šestmestnega števila.*

Rešitev. Označimo izbrano trimestno število z $\overline{abc}$. Če ga zapišemo dvakrat, dobimo število $\overline{abcabc}$, ki ga lahko faktoriziramo

$$\begin{aligned} \overline{abcabc} &= 100000a + 10000ab + 1000c + 100a + 10b + c = \\ &= (100000+100)a + (10000+10)b + (1000+1)c = 100100a + 10010b + 1001c = \\ &= 1001(100a + 10b + c) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (100a + 10b + c). \end{aligned}$$

Dobljeno šestmestno število je torej res deljivo s 7, 11 in 13.

Najmanjši skupni večkratnik

Najmanjši skupni večkratnik naravnih števil m in n je najmanjše naravno število, ki je večkratnik m in hkrati večkratnik n.
Tako je število 12 najmanjši skupni večkratnik števil 3 in 4, število 24 pa najmanjši skupni večkratnik števil 6 in 8.

Zgled 7. *Poišči najmanjši skupni večkratnik števil* 60 *in* 3150.

Rešitev. Zapišemo praštevilska razcepa: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ in $3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Najmanjši skupni večkratnik teh dveh števil je število $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6300$. Dobili smo ga tako, da smo zmnožili vse potence z različnimi praštevilskimi osnovami iz razcepov. Izmed potenc z isto osnovo v obeh razcepih smo izbrali tisto z višjim eksponentom.

Včasih nas zanima najmanjši skupni večkratnik treh ali več števil. To je takšno najmanjše naravno število, ki je večkratnik vseh opazovanih števil.

Zgled 8. *Poišči najmanjši skupni večkratnik prvih desetih naravnih števil.*

Rešitev. Ta števila in njihovi praštevilski razcepi so

$$2 = 2,\ 3 = 3,\ 4 = 2^2,\ 5 = 5,\ 6 = 2 \cdot 3,\ 7 = 7,\ 8 = 2^3,\ 9 = 3^2,\ 10 = 2 \cdot 5.$$

Torej je njihov najmanjši večkratnik enak $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.

Na tekmovanju *Evropski matematični kenguru* je bila leta 2001 tale naloga:

Zgled 9. *Nejc in Anže tečeta po krožni atletski stezi. Nejc za en krog potrebuje* 3 *minute, Anže pa* 4*. S tekom sta pričela hkrati. Čez koliko minut bosta prvič spet skupaj pretekla štartno črto?*

(**A**) *6* (**B**) *8* (**C**) *10*

(**D**) *12* (**E**) *Odvisno od dolžine atletske steze.*

Rešitev. Iskano število je najmanjši skupni večkratnik števil 3 in 4, se pravi 12.

Naslednji zgled je naloga, ki je bila na področnem tekmovanju za 6. razred leta 2001.

Zgled 10. *Mateja ima šahovski krožek vsak šesti dan pouka. Pouk se prične na ponedeljek in Mateja ima šahovski krožek že prvi šolski dan. Kolikokrat bo v tem šolskem letu Mateja imela šahovski krožek na ponedeljek? (Upoštevaj, da pouk poteka od ponedeljka do petka, 36 tednov zaporedoma.)*

(**A**) *4-krat* (**B**) *5-krat* (**C**) *6-krat* (**D**) *7-krat* (**E**) *8-krat*

Rešitev. Mateja ima šahovski krožek vsak šesti dan pouka, ponedeljek pa je vsak peti dan pouka. Šahovski krožek je torej na ponedeljek vsakih 30 dni pouka (najmanjši skupni večkratnik števil 5 in 6). Pouk poteka 36 tednov po 5 dni, torej 180 dni, zato bo šahovski krožek v ponedeljek $\frac{180}{30} = 6$-krat.

Največji skupni delitelj

Skupni delitelj dveh naravnih števil a in b je naravno število, ki je hkrati delitelj števila a in števila b. Tako je, na primer, 6 skupni delitelj števil 24 in 54, 3 pa skupni delitelj števil 81 in 333.

Največji skupni delitelj dveh števil a in b je, kakor nam pove že ime samo, največje število, ki deli tako a kot b. Označili ga bomo z $D(a, b)$. Največji skupni delitelj števil 140 in 110 je 10, torej $D(140, 110) = 10$.

Največji skupni delitelj dveh števil dobimo tako, da zmnožimo vse tiste potence z različnimi praštevilskimi osnovami, ki nastopajo v razcepih obeh števil, in sicer z nižjim eksponentom.

Zgled 11. *Poišči največji skupni delitelj števil* 72 *in* 270.

Rešitev. Števili razcepimo na prafaktorje.

$$72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

Največji skupni delitelj je $2 \cdot 3^2 = 18$.

Drugi postopek za iskanje največjega skupnega delitelja je Evklidov algoritem.

Evklidov algoritem

Imejmo dve števili n in q in naj bo $n > q$. Potem lahko n zapišemo v obliki $n = aq + r$, kjer je a celo število, r pa ostanek $(0 \leq r < q)$. Primer: za $n = 19$ in $q = 5$ je $19 = 3 \cdot 5 + 4$. Opazimo, da je $D(19, 5) = D(5, 4)$, torej je največji skupni delitelj števil 19 in 5 enak največjemu skupnemu delitelju 5 in 4. To pa je podlaga za *Evklidov algoritem.*

Zgled 12. *Poišči največji skupni delitelj števil* 936 *in* 338 *z Evklidovim algoritmom.*

Rešitev. Delimo 936 s 338

$$936 = 2 \cdot 338 + 260,$$

nato delimo 338 z ostankom 260

$$338 = 1 \cdot 260 + 78,$$

potem delimo 260 z ostankom 78

$$260 = 3 \cdot 78 + 26$$

in nazadnje še 78 s 26

$$78 = 3 \cdot 26 + 0.$$

Z deljenjem prenehamo, ko pridemo do ostanka 0. Največji skupni delitelj števil 936 in 338 je 26.

Zapišimo Evklidov algoritem še bolj splošno. Naj bosta a in b naravni števili. Z zaporednim deljenjem dobimo:

$$\begin{array}{lcll}
a & = & q_1 b + r_1, & 0 \leq r_1 < b, \\
b & = & q_2 r_1 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1, \\
r_1 & = & q_3 r_2 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2, \\
 & \vdots & & \\
r_{n-2} & = & q_n r_{n-1} + r_n, & 0 \leq r_n < r_{n-1}, \\
r_{n-1} & = & q_{n+1} r_n. &
\end{array}$$

Ker za ostanke velja $b > r_1 > r_2 > \ldots$, se postopek res konča. Zadnji neničelni ostanek deljenja (torej število r_n) je največji skupni delitelj števil a in b, saj je

$$D(a, b) = D(b, r_1) = D(r_2, r_2) = \ldots = D(r_{n-2}, r_{n-1}) = D(r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

Zgled 13. *Z Evklidovim algoritmom poišči največji skupni delitelj števil* 588 *in* 317.

Rešitev.

$$\begin{aligned}588 &= 1 \cdot 317 + 271\\ 317 &= 1 \cdot 271 + 46\\ 271 &= 5 \cdot 46 + 41\\ 46 &= 1 \cdot 41 + 5\\ 41 &= 8 \cdot 5 + 1\\ 5 &= 5 \cdot 1 + 0\end{aligned}$$

Največji skupni delitelj je 1.

Števili, katerih največji skupni delitelj je 1, sta *tuji.*

Deljivost v množici celih števil

Cela števila, ki delijo 6, so $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6$ in -6. Ta števila delijo tudi -6. Število 5 deli 0, toda 0 ne deli 5.

Celo število a je *delitelj* celega števila b, če obstaja takšno celo število k, da je

$$b = ka.$$

Zgled 14. *Če $d \mid a$ in $d \mid b$, potem $d \mid a + b$.*

Rešitev. Ker $d \mid a$, obstaja celo število z_1, da je $a = z_1 \cdot d$. Prav tako iz $d \mid b$ sledi, da obstaja celo število z_2, da je $b = z_2 \cdot d$. Potem pa je $a + b = z_1 \cdot d + z_2 \cdot d = (z_1 + z_2)d$, in ker je $z_1 + z_2$ celo, res velja, da $d \mid a + b$.

Zgornji zgled velja še malo bolj splošno.

Zgled 15. *Dokaži: če $d \mid a$ in $d \mid b$, potem $d \mid xa + yb$ za poljubni celi števili x in y.*

Rešitev. Kakor v prejšnjem zgledu zapišimo $a = z_1 \cdot d$ in $b = z_2 \cdot d$. Potem je

$$xa + yb = x \cdot z_1 \cdot d + y \cdot z_2 \cdot d = (x \cdot z_1 + y \cdot z_2)d,$$

število $x \cdot z_1 + y \cdot z_2$ je celo, torej res $d \mid xa + yb$.

Zgled 16. *Dokaži, da ulomka $\frac{21\,n+4}{14\,n+3}$ ni možno okrajšati za nobeno naravno število n.*

Rešitev. Uporabimo ugotovitev iz prejšnjega zgleda: če neko število d deli števili $21\,n + 4$ in $14\,n + 3$, deli tudi število $3 \cdot (14\,n + 3) - 2 \cdot (21\,n + 4) = 1$. To pomeni, da $d \mid 1$, torej $d = 1$ in števili sta tuji. Ulomka ne moremo okrajšati za noben n.

Seveda lahko tudi v celih številih iščemo največji skupni delitelj ali najmanjši skupni večkratnik. Toda kaj je $D(15, -25)$? Je to 5 ali -5? Dogovorimo se, da največji skupni delitelj pozitivno število. Torej je $D(15, -25) = D(15, 25) = 5$. Prav tako lahko Evklidov algoritem uporabimo za iskanje največjega skupnega delitelja dveh celih števil. Če iščemo na primer $D(-45, -85)$ s pomočjo Evklidovega algoritma, lahko poiščemo z Evklidovim algoritmom kar $D(45, 85)$. Podobno velja za iskanje najmanjšega skupnega večkratnika števil 81 in -45: poiščemo kar najmanjši skupni večkratnik števil 81 in 45.

Kongruence

Pojem in oznako kongruence je uvedel že Gauss, uporabljamo pa jo za poenostavljeno računanje s celimi števili, ko nas zanima deljivost z nekim naravnim številom d.
Da bomo laže razumeli definicijo, si najprej poglejmo ostanke, ki jih dobimo pri deljenju celih števil s 5.

$0 = 0 \cdot 5 + 0$	$7 = 1 \cdot 5 + 2$	$-1 = (-1) \cdot 5 + 4$
$1 = 0 \cdot 5 + 1$	$8 = 1 \cdot 5 + 3$	$-2 = (-1) \cdot 5 + 3$
$2 = 0 \cdot 5 + 2$	$9 = 1 \cdot 5 + 4$	$-3 = (-1) \cdot 5 + 2$
$3 = 0 \cdot 5 + 3$	$10 = 2 \cdot 5 + 0$	$-4 = (-1) \cdot 5 + 1$
$4 = 0 \cdot 5 + 4$	$11 = 2 \cdot 5 + 1$	$-5 = (-1) \cdot 5 + 0$
$5 = 1 \cdot 5 + 0$	$12 = 2 \cdot 5 + 2$	$-6 = (-2) \cdot 5 + 4$
$6 = 1 \cdot 5 + 1$	...	...

Ostanek pri deljenju celega števila s 5 je eno izmed števil $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Rečemo, da sta dve celi števili a in b *kongruentni* po modulu 5, če dasta pri deljenju s 5 enak ostanek. Tako so $2, 7, 12, 17, 22, \dots, -3, -8, -13, -18 \dots$ vsa kongruentna po modulu 5, ker dajo ostanek 2.

V splošnem rečemo, da sta celi števili a in b *kongruentni* po modulu d (d je izbrano naravno število), če dasta a in b pri deljenju z d isti ostanek. Obstaja torej celo število n, da je $a - b = n \cdot d$. Tako sta števili 27 in 15 kongruentni po modulu 4, ker je $27 = 6 \cdot 4 + 3$ in $15 = 3 \cdot 4 + 3$.

Pojem kongruence je tako pomemben, da imamo zanj kratek način zapisa. Zapis

$$a \equiv b \pmod{d},$$

preberemo: a je kongruentno b po modulu d. Če a ni kongruentno b po modulu d, pišemo $a \not\equiv b \pmod{d}$.

Če dasta celi števili a in b isti ostanek pri deljenju z d, lahko to povemo na več načinov:

- a je kongruentno b po modulu d,
- $a = b + nd$ za neko celo število n,
- d deli $a - b$.

Prednost Gaussovega označevanja kongruence je v tem, da ima kongruenca pri izbranem modulu veliko lastnosti navadne enakosti. Pa si poglejmo, katere. Če je $a \equiv a' \pmod{d}$ in $b \equiv b' \pmod{d}$, potem

- $a + b \equiv a' + b' \pmod{d}$,
- $a - b \equiv a' - b' \pmod{d}$,
- $ab \equiv a'b' \pmod{d}$.

Dokaz, da zgornje trditve veljajo, je preprost. Izraz $a \equiv a' \pmod{d}$ pomeni, da je $a = a' + rd$, $b \equiv b' \pmod{d}$ pa pove, da je $b = b' + sd$, kjer sta r in s celi števili. Potem je

$$a + b = a' + rd + b' + sd = a' + b' + (r + s)d,$$

to pa s kongruencami zapišemo $a + b \equiv a' + b' \pmod{d}$. Na podoben način je $a - b = a' - b' + (r - s)d$ in $ab = (a' + rd)(b' + sd) = a'b' + a'sd + b'rd + rsd^2 = a'b' + (a's + b'r + rsd)d$. V jeziku kongruenc ti dve enačbi nista nič drugega kot $a - b \equiv a' - b' \pmod{d}$ in $ab \equiv a'b' \pmod{d}$.

Kadar seštevamo ali množimo kongruence pri izbranem modulu, recimo pri $d = 5$, lahko preprečimo, da postanejo števila, ki se pojavijo, prevelika, če zamenjamo katerokoli število z enim od števil $0, 1, 2, 3, 4$, s katerim je le-to kongruentno.

Zgled 17. *Poišči vse takšne x, da je izraz $81x + 53$ deljiv s 5.*

Rešitev. Iščemo vse take x, da je $81x + 53 \equiv 0 \pmod 5$. Števili 81 in 53 lahko zamenjamo z ostankoma, ki jih dobimo pri deljenju s 5 in enačba se poenostavi v $1 \cdot x + 3 \equiv 0 \pmod 5$. Na obeh straneh odštejemo 3 in dobimo $x \equiv -3 \pmod 5$, oziroma $x \equiv 2 \pmod 5$. Torej so vsi iskani x oblike $x = 5y + 2$, kjer je y celo število.

Zgled 18. *Pokaži, da $13 \mid 29^n + 16^{n+1} + 42^{n+2}$ za vsa naravna števila n.*

Rešitev. Poglejmo, kaj nam da izraz $29^n + 16^{n+1} + 42^{n+2}$, če ga pogledamo po modulu 13:

$$\begin{aligned} 29^n + 16^{n+1} + 42^{n+2} &\equiv 3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} \pmod{13} \\ &= 3^n(1 + 3 + 3^2) = 3^n \cdot 13 \equiv 0 \pmod{13} \end{aligned}$$

in res je število deljivo s 13.

V zgledu je razvidno, da ni potrebno ves čas uporabljati znaka $\equiv$. Kadar sta dva izraza enaka, lahko uporabimo kar navaden enačaj $=$.

Ugotovili smo že, da pri računanju s kongruencami lahko števila menjamo s števili, ki so jim kongruentna po danem modulu. Števila v eksponentu pa NE SMEMO zamenjati s kongruentnim številom.

Zgled 19. $2^4 \not\equiv 2^1 \pmod 3$, *pa čeprav je* $4 \equiv 1 \pmod 3$.

Rešitev. Prepričamo se, da je $2^4 = 16 \equiv 1 \pmod 3$ in $2^1 = 2 \equiv 2 \pmod 3$.

Poglejmo še nekaj zgledov računanja s kongruencami.

Zgled 20. *Poišči vsa takšna praštevila p, da sta tudi števili $p + 10$ in $p + 14$ praštevili.*

Rešitev. Naloge se lotimo tako, da pogledamo kakšni sta števili $p+10$ in $p+14$ za prvih nekaj praštevil. Hitro uganemo, da je za $p \neq 3$ eno izmed teh dveh števil deljivo s 3. Pokažimo, da je $p = 3$ edina rešitev.
Poglejmo števili $p+10$ in $p+14$ po modulu 3: $p+10 \equiv p+1 \pmod 3$ in $p+14 \equiv p+2 \pmod 3$. Ker je natanko eno izmed števil p, $p+1$ in $p+2$ deljivo s 3, je natanko eno izmed števil p, $p+10$ in $p + 14$ deljivo s 3 in ker so vsa praštevila, je to lahko le p, torej $p = 3$.

Zgled 21. *Kakšne so lahko enice števila, ki je popolni kvadrat?*

Rešitev. Naloga nas sprašuje, kakšne ostanke ima lahko popolni kvadrat pri deljenju z 10. Recimo, da je $n \equiv r \pmod{10}$, potem je $n^2 \equiv r^2 \pmod{10}$. To pomeni, da ostanek popolnega kvadrata n^2 dobimo tako, da kvadriramo ostanek števila n. Napišimo ostanke r pri deljenju z 10 in kvadrate teh ostankov kar v preglednico.

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
$r^2 \pmod{10}$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

V prvo vrstico smo zapisali vse možne ostanke pri deljenju z 10, v drugo kvadrate teh ostankov in v tretjo ostanke druge vrstice pri deljenju z 10. Števila v tretji vrstici so vsi možni ostanki popolnih kvadratov pri deljenju z 10. Torej so enice popolnega kvadrata lahko $0, 1, 4, 5, 6$ in 9.

Zgled 22. *Dokaži, da število $3^n + 2 \cdot 17^n$ ni popoln kvadrat za nobeno naravno število n.*

Rešitev. V pomoč pri reševanju te naloge nam bo prejšnji zgled. Zadnja števka v popolnem kvadratu je lahko le $0, 1, 4, 5, 6$ ali 9. Če pokažemo, da so enice v številu $3^n + 2 \cdot 17^n$ vedno različne od teh števk, bo naloga rešena. Se pravi, da bomo gledali ostanke po modulu 10.
Najprej lahko izraz poenostavimo, saj je $3^n + 2 \cdot 17^n \equiv 3^n + 2 \cdot 7^n \pmod{10}$. Nato ga izračunamo za prvih nekaj n (gledano po modulu 10).

n	3^n	7^n	$3^n + 2 \cdot 17^n$
1	3	7	$3 + 2 \cdot 7 \equiv 7$
2	9	9	$9 + 2 \cdot 9 \equiv 7$
3	7	3	$7 + 2 \cdot 3 \equiv 3$
4	1	1	$1 + 2 \cdot 1 = 3$
5	3	7	$3 + 2 \cdot 7 \equiv 7$
6	9	9	$9 + 2 \cdot 9 \equiv 7$
7	7	3	$7 + 2 \cdot 3 \equiv 3$
8	1	1	$1 + 2 \cdot 1 = 3$

Da bo jasno, kako smo prišli do števil v preglednici, poglejmo, kako smo izračunali stolpec pod 7^n. Pri $n = 1$ smo vpisali število $7^1 = 7$ in pri $n = 2$ število 9, saj je $7^2 = 49 \equiv 9 \pmod{10}$. Za $n = 3$ pa smo smo si pomagali z že izračunanim. Ker je $7^3 = 7^2 \cdot 7 \equiv 9 \cdot 7 \equiv 3 \pmod{10}$, lahko zadnjo števko števila 7^3 izračunamo tako, da ostanek, ki smo ga dobili pri 7^2 pomnožimo s 7 in pogledamo po modulu 10. Podobno izračunamo zadnjo števko števila 7^4. Ostanek, ki smo ga dobili pri 7^3 pomnožimo s 7 in pogledamo po modulu 10. Ta postopek ponavljamo.
Iz preglednice je razvidno, da se ostanki pri 3^n in 7^n ponavljajo in to bomo tudi dokazali. Vidimo tudi, da je $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ ter $7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, zato najprej pokažimo, da je $3^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$ za vsak k.

$$3^{4k} = (3^4)^k \equiv 1^k = 1 \pmod{10}$$

Podobno je

$$7^{4k} = (7^4)^n \equiv 1^k = 1 \pmod{10}.$$

Potem pa je

$$3^{4k+1} = 3 \cdot 3^{4k} \equiv 3 \cdot 1 = 3 \pmod{10},$$

$$3^{4k+2} = 3^2 \cdot 3^{4k} \equiv 9 \cdot 1 = 9 \pmod{10}$$

in

$$3^{4k+3} = 3^3 \cdot 3^{4k} \equiv 7 \cdot 1 = 7 \pmod{10}.$$

Prav tako dobimo

$$7^{4k+1} = 7 \cdot 7^{4k} \equiv 7 \cdot 1 = 7 \pmod{10},$$

$$7^{4k+2} = 7^2 \cdot 7^{4k} \equiv 9 \cdot 1 = 9 \pmod{10}$$

in

$$7^{4k+3} = 7^3 \cdot 7^{4k} \equiv 3 \cdot 1 = 3 \pmod{10}.$$

Sedaj pa združimo zadnje ugotovitve. Če je n oblike $n = 4k$, je

$$3^{4k} + 2 \cdot 7^{4k} \equiv 1 + 2 \cdot 1 = 3 \pmod{10},$$

pri $n = 4k + 1$ je

$$3^{4k+1} + 2 \cdot 7^{4k+1} \equiv 3 + 2 \cdot 7 \equiv 7 \pmod{10},$$

pri $n = 4k + 2$ dobimo

$$3^{4k+2} + 2 \cdot 7^{4k+2} \equiv 9 + 2 \cdot 9 \equiv 7 \pmod{10}$$

in za $n = 4k + 3$

$$3^{4k+3} + 2 \cdot 7^{4k+3} \equiv 7 + 2 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Ostanka, ki jih da izraz $3^n + 2 \cdot 17^n$ pri deljenju z 10 sta 3 in 7, torej to število ne more biti popolni kvadrat.

Zgled 23. *Naj bo n naravno število. Dokaži, da je število n deljivo s 40, če sta števili $2n + 1$ in $3n + 1$ popolna kvadrata.*

Rešitev. Dokažimo najprej deljivost s 5. Popoln kvadrat ima lahko ostanek le 0, 1 ali 4 pri deljenju s 5. Podobno kot v prejšnjih zgledih si pomagajmo s preglednico, v katero zapišimo, kakšne ostanke imata pri deljenju s 5 števili $2n + 1$ in $3n + 1$.

$n \pmod 5$	0	1	2	3	4
$2n + 1 \pmod 5$	1	3	0	2	4
$3n + 1 \pmod 5$	1	4	2	0	3

Iz preglednice vidimo, da sta lahko števili $2n + 1$ in $3n + 1$ hkrati popolna kvadrata le, če je $n \equiv 0 \pmod 5$. Podobno lahko iz preglednice

$n \pmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$2n + 1 \pmod 8$	1	3	5	7	1	3	5	7
$3n + 1 \pmod 8$	1	4	7	2	5	0	3	6

sklepamo, da sta števili $2n+1$ in $3n+1$ popolna kvadrata le, če je $n \equiv 0 \pmod 8$, kajti popolni kvadrat da po modulu 8 ostanek 0 ali 1. Naloga je tako rešena.

Zanimivo je opaziti, da je le rahlo drugačna naloga bistveno težja:

Zgled 24. *Naj bo n naravno število. Dokaži, da je število n deljivo s 56, če sta števili $3n + 1$ in $4n + 1$ popolna kvadrata.*

Rešitev. Deljivost z 8 uženemo enako kot v prejšnjem zgledu. Pri deljivosti s 7 pa se nam pri zgornji metodi zatakne. Popolni kvadrat ima lahko pri deljenju s 7 ostanek 0, 1, 2 ali 4.

$n \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$3n + 1 \pmod 7$	1	4	0	3	6	2	5
$4n + 1 \pmod 7$	1	5	2	6	3	0	4

Iz preglednice vidimo, da bi lahko bili števili $3n + 1$ in $4n + 1$ popolna kvadrata po modulu 7 tudi, če je $n \equiv \pm 2 \pmod 7$. In kaj zdaj? Dokaz, da je n deljivo s 7 ni preprost in ga bomo naredili v eni izmed prihodnjih številk *Brihtneza*, ko bomo obravnavali Pellovo enačbo.

Naloge

1. Neko štirimestno število ima naslednje lastnosti:

   - prva in zadnja števka sta enaki;
   - druga in tretja števka sta enaki;
   - število je enako produktu treh zaporednih praštevil.

   Katero je to število?

2. Naj bo n naravno število, ki ni deljivo s 3. Pokaži, da dobimo ostanek 1, če n^2 delimo s 3.

3. Določi vsa števila x in y, da bo število $\overline{1984xy}$ deljivo z 8 in z 9.

4. Če sta v trimestnem številu, deljivim s 7, zadnji dve števki enaki, je vsota števk tega števila deljiva s 7. Dokaži.

5. Katero je najmanjše trimestno število, ki ima za delitelje prva tri praštevila in prva tri sestavljena števila?

6. Neko število ima natanko 8 deliteljev. Dva izmed teh deliteljev sta 35 in 77. Poišči to število.

7. Poišči najmanjše število, katerega deljitelji so 2, 3, 7, 10, 15, 20, 21 in 28.

8. Rok ima štiri prijateljice, ki ga redno obiskujejo. Ana pride na obisk vsake 4 dni, Maja vsakih 6 dni, Petra vsakih 8 dni in Špela vsakih 12 dni. Danes so bile na obisku vse skupaj. Čez koliko dni se bodo spet srečale pri Roku?

9. Neonski svetilki prižgemo istočasno. Prva posveti vsake 4 sekunde, druga pa vsakih 6 sekund. Kolikokrat v minuti posvetita skupaj?

10. Razcepi 362880 na prafaktorje.

11. Z uporabo Evklidovega algoritma poišči največji skupni delitelj števil
    - 3104 in 12520,
    - 3529 in 99876.

12. Poišči praštevilo, ki je za 1 manjše od popolnega kvadrata. Ali obstaja še kakšno takšno praštevilo?

13. Poišči vsa takšna praštevila p, da je $2p + 1$ popoln kub.

14. Poišči vsa praštevila p, da je tudi $8p^2 + 1$ praštevilo.

15. Dokaži, da je število $\frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6}$ celo za vsako celo število m.

16. Dokaži, da je število $n^3 + 11n$ deljivo s 6 za vsako naravno število n.

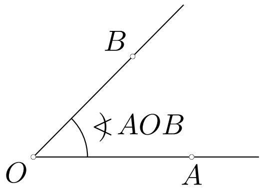
17. Poišči vsa cela števila n, za katera $5 \mid (3(n^2 + n) + 7)$.

18. Število 7777^{8888} deli s 5. Kolikšen je ostanek?

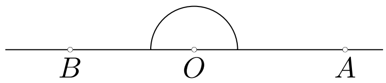
19. Dokaži, da je $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ deljivo z 11 za vsak $k \in \mathbb{N}$.

O kotih

Koti med premicami



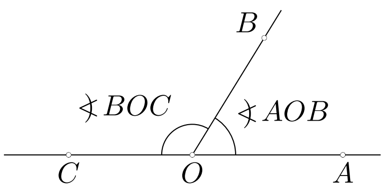
Spomnimo se, da je *kot* množica točk med dvema poltrakoma, ki izhajata iz iste točke, ki jo imenujemo *vrh kota.* Ker dva poltraka razdelita ravnino na dve množici točk, za kot med poltrakoma proglasimo *izbočeno množico* oziroma *konveksno množico.* (Lahko se zgodi, da sta obe množici izbočeni, vendar sta v tem primeru kota skladna, in lahko za kot med poltrakoma proglasimo katerega koli od teh dveh.)

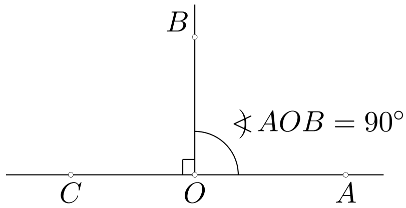


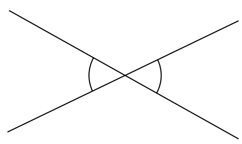
Če poltraka OA in OB skupaj tvorita premico, pravimo, da sta poltraka *komplementarna* ali *dopolnilna* in oblikujeta *iztegnjeni kot.* Iztegnjeni kot meri $180°$ (beri: 180 stopinj) oziroma π radianov, kar označimo $\sphericalangle AOB = 180°$ oziroma $\sphericalangle AOB = \pi$.

Med najpomembnejše lastnosti kotov zagotovo sodi izrek, da je **vsota notranjih kotov v trikotniku iztegnjeni kot**. Zakaj izrek? Ko v matematiki vpeljujemo nove pojme in kasneje iz njih izpeljujemo različne trditve, moramo nekje začeti. Osnovnim dejstvom rečemo *aksiomi* in jih ne dokazujemo, iz njih pa z logičnim sklepanjem izpeljemo različne trditve, ki jim rečemo *izreki.* Izrek, da je vsota notranjih kotov v trikotniku enaka $180°$, sodi med ključne izreke *evklidske geometrije.*

Če kota $\sphericalangle AOB$ in $\sphericalangle BOC$ skupaj oblikujeta iztegnjeni kot $\sphericalangle AOC$, pravimo, da sta kota $\sphericalangle AOB$ in $\sphericalangle BOC$ *suplementarna* ali *sokota.* Če kot meri enako kot njegov suplementarni kot, pravimo, da je kot *pravi* in označimo $\sphericalangle AOB = 90°$. (Na skicah tak kot pogosto označimo s parom pravokotno se sekajočih daljic, kot prikazuje desna skica spodaj.) Rečemo lahko tudi, da se poltraka AO in OB sekata *pravokotno*, kar označimo $OA \perp OB$.

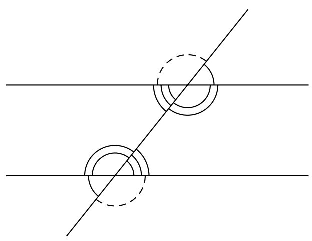






Kota, ki imata za kraka paroma komplementarna poltraka, imenujemo *sovršna kota.* Na skici desno je označen par sovršnih kotov.

Izrek 1. *Sovršna kota sta skladna (torej merita enako).*



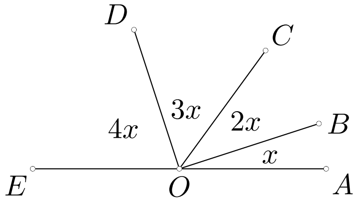
Premica, ki seka dani vzporedni premici, z njo oblikuje 4 pare *izmeničnih kotov.* Na skici desno so označeni vsi 4 pari izmeničnih kotov.

Izrek 2. *Izmenična kota sta skladna (torej merita enako).*

Če k temu dodamo še ugotovitev, da sta sovršna kota skladna, imamo na desni skici dve četverici skladnih kotov.

Lotimo se sedaj nalog. Pri vsaki nalogi nariši skico in na njej zaporedoma označi izračunane kote.

Zgled 1. *Iz točke O izhajajo poltraki OA, OB, OC, OD in OE. Vemo, da je $\sphericalangle DOE = 2\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle AOB$ in $\sphericalangle COD = 3\sphericalangle AOB$. Koliko meri kot $\sphericalangle BOD$, če je kot $\sphericalangle AOE$ iztegnjeni.*

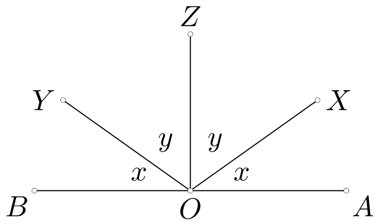


Rešitev. Narišimo skico in označimo neznani kot $\sphericalangle AOB$ z x. Potem je

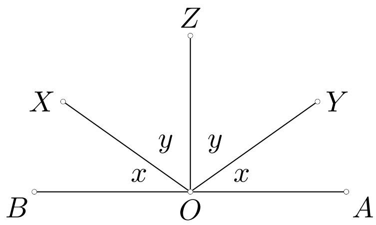
$$\begin{aligned}\sphericalangle BOC &= 2\sphericalangle AOB = 2x,\\ \sphericalangle COD &= 3\sphericalangle AOB = 3x,\\ \sphericalangle DOE &= 2\sphericalangle BOC = 4x.\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo, da je kot $\sphericalangle AOE$ iztegnjeni in zapišemo $x + 2x + 3x + 4x = 180°$. Torej je $10x = 180°$ in $x = 18°$. Kot $\sphericalangle DOB$ torej meri $\sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 5x = 90°$.

Zgled 2. *Iz točke O izhajajo poltraki OA, OB, OX, OY in OZ. Vemo, da je $\sphericalangle AOB$ iztegnjeni kot in da je $\sphericalangle AOX = \sphericalangle YOB$. Dokaži, da je $OZ \perp AB$, če OZ razpolavlja kot $\sphericalangle XOY$.*



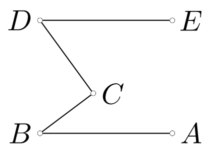
Rešitev. Pri vsaki geometrijski nalogi najprej narišemo skico in na njej upoštevamo podatke. Enaka kota $\sphericalangle AOX$ in $\sphericalangle YOB$ smo označili z x. Ker je OZ simetrala kota $\sphericalangle XOY$, sta tudi kota $\sphericalangle XOZ$ in $\sphericalangle ZOY$ enaka. Označimo ju z y. Tedaj s skice razberemo, da je $x+y+y+x = 180°$, kar nam da $2(x+y) = 180°$ oziroma $x + y = 90°$.



Ali je naloga v celoti rešena? Sploh **NE**. Zapisani dokaz je bil tesno povezan s skico, gornja skica pa glede na podatke naloge **ni edina možna**. Nalogo smo rešili le v primeru, ko je $\sphericalangle AOX$ ostri kot, torej $\sphericalangle AOX < 90°$. Če pa je $\sphericalangle AOX > 90°$, je skica drugačna. Ker je OZ simetrala kota $\sphericalangle XOY$, sta kota $\sphericalangle XOZ$ in $\sphericalangle ZOY$ enaka. Podobno kot zgoraj ju označimo z y. Če sedaj upoštevamo, da je $\sphericalangle AOX = \sphericalangle YOB$, vidimo, da sta kota $\sphericalangle AOY$ in $\sphericalangle XOB$ enaka in ju označimo z x. Dokaz sklenemo enako kot v prejšnjem primeru. Iz $x + y + y + x = 180°$ sledi $x + y = 90°$.

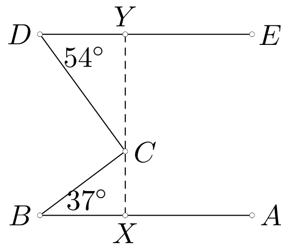
Preostane nam še tretji primer, ko je $\sphericalangle AOX = 90°$. Tedaj je tudi $\sphericalangle YOB = 90°$ in OZ sovpada z OX in OY. Torej je tudi v tem primeru $OZ \perp AB$.

Pomni. **Rešitev geometrijskega problema ne sme biti odvisna od skice, ki smo jo narisali v pomoč pri reševanju.** Če je kakšen sklep tesno povezan s položajem točk ali premic na sliki, razmisli, ali je narisan položaj res **edini možni**. Praviloma temu ni tako in ravno v raznolikosti možnosti se skrivajo najglobje pasti pri reševanju geometrijskih nalog.



Zgled 3. *Na sliki desno velja $\sphericalangle ABC = 37°$, $\sphericalangle CDE = 54°$ in $AB \parallel DE$. Koliko meri kot $\sphericalangle BCD$?*

Rešitev. Bližnjica je na dlani: na sliki **izmerimo**, da je $\sphericalangle BCD = 91°$. Ali je to rešitev naloge? Seveda ni, saj je še tako natančno narisana slika zgolj približna. Kot $\sphericalangle BCD$ je potrebno **izračunati**!



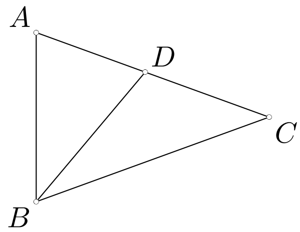
V rešitvi te naloge se skriva eden najpogostejših prijemov pri reševanju geometrijskih nalog: **nekaj je potrebno dorisati**. V tem primeru bomo potegnili pravokotnico skozi točko C ter označili točke X in Y kot kaže skica. V pravokotnem trikotniku XBC velja $\sphericalangle BCX = 180° - \sphericalangle CXB - \sphericalangle XBC = 180° - 90° - 37° = 53°$. V pravokotnem trikotniku CDY velja $\sphericalangle YCD = 180° - \sphericalangle DYC - \sphericalangle CDY = 180° - 90° - 54° = 36°$. Ker je kot $\sphericalangle XCY$ iztegnjeni, velja $\sphericalangle BCD = 180° - \sphericalangle BCX - \sphericalangle YCD = 180° - 53° - 36° = 91°$.

Opomba. Nalogo lahko rešimo še na vsaj dva načina: Namesto premice XY označimo z X točko, kjer premica skozi D in C seka AB, in opazujemo kote v trikotniku BXC ali pa označimo z Y točko, kjer premica skozi B in C seka DE, in opazujemo kote v trikotniku CYD. Zapiši oba dokaza!

Pravimo, da je trikotnik *enakokrak*, če sta dve njegovi stranici enako dolgi. Enako dolgi stranici imenujemo *kraka*, tretjo stranico pa *osnovnica* enakokrakega trikotnika. Oglišče trikotnika nasproti osnovnice imenujemo *vrh trikotnika.* Trikotnik je *enakostraničen*, če so vse njegove stranice enako dolge.

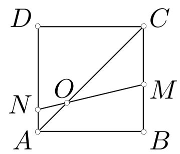
Izrek 3. *Kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika sta enaka.* ∎

Zgled 4. *V enakokrakem trikotniku ABC z osnovnico AB je $\sphericalangle ACB = 40°$. Na stranici AC leži taka točka D, da je ABD enakokrak trikotnik z vrhom B. Izračunaj kota $\sphericalangle BAD$ in $\sphericalangle CBD$.*



Rešitev. Kot $\sphericalangle BAD$ je kot ob osnovnici AB enakokrakega trikotnika ABC s kotom 40° pri vrhu C, zato je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle ACB) = \frac{1}{2}(180° - 40°) = 70°$. Torej meri 70° tudi drugi kot ob osnovnici AD enakokrakega trikotnika ABD. Sledi $\sphericalangle DBA = 180° - 2 \cdot 70° = 40°$. Nazadnje izračunamo $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBA - \sphericalangle DBA = 70° - 40° = 30°$.

Na tekmovanju Kenguru smo lani zasledili naslednjo nalogo.



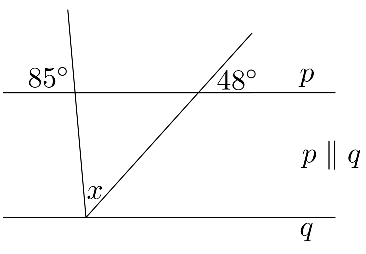
Zgled 5. *Lik $ABCD$ je kvadrat. Koliko meri kot $\sphericalangle COM$, če je $\sphericalangle OND = 60°$?*

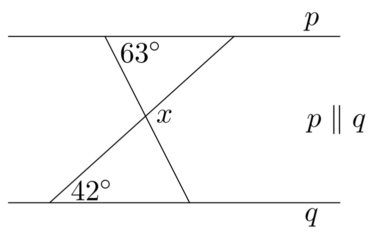
(**A**) 10° (**B**) 15° (**C**) 20° (**D**) 30° (**E**) 35°

Rešitev. Ker je $\sphericalangle OND = 60°$, je $\sphericalangle ANO = 120°$. Daljica AC je diagonala kvadrata, zato je $\sphericalangle OAN = 45°$ in $\sphericalangle AON = 180° - \sphericalangle ANO - \sphericalangle OAN = 180° - 120° - 45° = 15°$. Kota $\sphericalangle AON$ in $\sphericalangle COM$ sta sovršna, zato je $\sphericalangle COM = 15°$.

Nalogi

1. Določi neznani kot x.

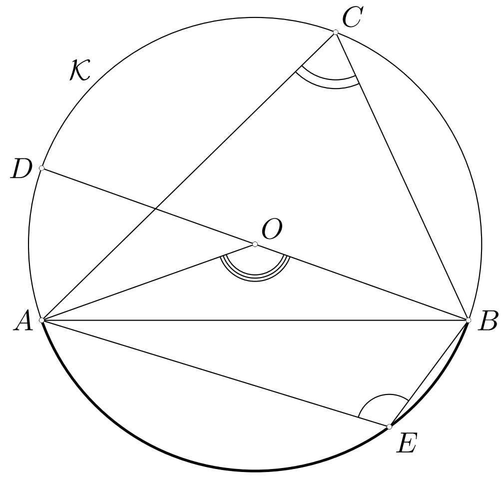
a) 

b) 

2. Na stranici AB trikotnika ABC leži takšna točka D, da je ADC enakokrak trikotnik s kotom 44° ob vrhu A. Koliko meri $\sphericalangle ABC$, če je DBC enakokrak trikotnik z vrhom D?

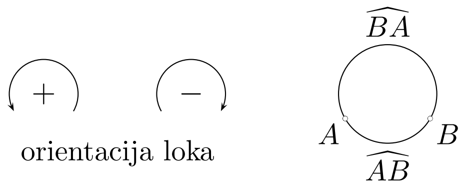
Koti v krogu

Naj bo O poljubna točka v ravnini $\mathcal{R}$. *Krožnica* $\mathcal{K}$ je množica točk v ravnini $\mathcal{R}$, ki so enako oddaljene od izbrane točke O. Točko O imenujemo *središče krožnice* $\mathcal{K}$. *Krožni lok* je del krožnice, ki ga omejujeta dve različni točki na krožnici. *Tetiva krožnice* je vsaka daljica, ki ima krajišči na krožnici. *Polmer krožnice* je vsaka daljica, ki ime eno krajišče v središču krožnice, drugo pa na krožnici. *Premer krožnice* je vsaka tetiva krožnice, ki poteka skozi njeno središče. *Obodni kot nad lokom* je kot z vrhom na krožnici, ki ne leži na danem loku, in krakoma, ki vsebujeta krajišči loka. *Obodni kot nad tetivo* je kot z vrhom na krožnici in krakoma, ki vsebujeta krajišči tetive. (Krajišči tetive morata ležati na različnih krakih kota.) *Središčni kot nad lokom* je kot z vrhom v središču krožnice in krakoma, ki vsebujeta krajišči loka. *Središčni kot nad tetivo* je kot z vrhom v središču krožnice in krakoma, ki vsebujeta krajišči tetive.



Oglejmo si gornje pojme na primeru. Na sliki je narisana krožnica $\mathcal{K}$ s središčem v točki O. Daljice OA, OB, OC (ni narisana) in OD so polmeri krožnice $\mathcal{K}$, daljica BD pa je njen premer. Točki A in B sta krajišči daljice AB, ki je hkrati tetiva krožnice $\mathcal{K}$. Točke A, E, B in C razdelijo krožnico na nekaj krožnih lokov; na sliki je debelo označen krožni lok $\widehat{AB}$. Nad tem krožnim lokom sta označena obodni kot $\sphericalangle ACB$ in središčni kot $\sphericalangle AOB$. Na sliki je označen tudi kot $\sphericalangle BEA$ nad tetivo AB. Ker leži točka E na loku $\widehat{AB}$, ta kot ni kot nad lokom $\widehat{AB}$.

Pomni. Vrh obodnega kota nad tetivo lahko leži na enem ali drugem bregu nosilke tetive - torej premice, na kateri leži ta tetiva. Vrh obodnega kota nad lokom pa ne sme ležati na tem loku.



Opomba. Z oznako $\widehat{AB}$ smo označili lok krožnice $\mathcal{K}$ med točkama A in B. Ker različni točki A in B razdelita krožnico $\mathcal{K}$ na dva krožna loka, z $\widehat{AB}$ pogosto označimo *pozitivno orientiran lok med točkama A in B*. Bralca pa velja opozoriti, da je kljub temu dogovoru pri uporabi simbola $\widehat{AB}$ dobro vedno eksplicitno pojasniti, katerega izmed dveh lokov med točkama A in B smo imeli v mislih.

Najpomembnejša lastnost obodnih kotov je:

Izrek 4. (Izrek o obodnih kotih) *Vsi obodni koti nad istim lokom so enaki.* ■

Pri tej formulaciji izreka smo se izognili zapletu z lego vrha kota, ki nastane, če namesto obodnih kotov nad danim lokom opazujemo obodne kote nad dano tetivo. Če torej opazujemo obodne kote nad dano tetivo, moramo zapisati

Izrek 5. *Vsi obodni koti nad dano tetivo, katerih vrhovi ležijo na istem bregu te tetive, so enaki. Obodna kota nad dano tetivo, katerih vrhova ležita na različnih bregovih te tetive, sta suplementarna.* ■

Opomba. Kota sta suplementarna, če je njuna vsota iztegnjeni kot – torej kot, ki meri $180°$ oziroma π radianov.

Središčni in obodni kot nad istim lokom sta med seboj povezana, saj velja:

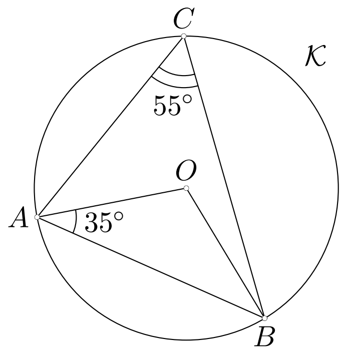
Izrek 6. *Središčni kot nad lokom je enak dvakratniku obodnega kota nad tem lokom.* ■

Če ležita krajišči tega loka na premeru krožnice, je središčni kot iztegnjeni kot, zato lahko zapišemo:

Izrek 7. (Talesov izrek o obodnem kotu) *Obodni kot nad premerom krožnice je pravi.* ■

Zgoraj navedeni izreki o obodnih in središčnih kotih so najpomembnejši izreki o kotih v krogu. Poglejmo si, kako jih uporabljamo.

Zgled 6. *Na krožnici s središčem v O ležijo točke A, B in C. Točki O in C ležita na istem bregu premice AB. Koliko meri kot $\sphericalangle ACB$, če je $\sphericalangle BAO = 35°$?*



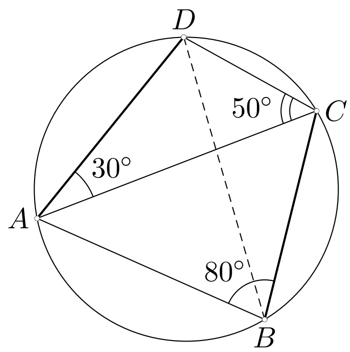
Rešitev. Narišimo skico ter na njej označimo znani kot $\sphericalangle BAO$ in iskani kot $\sphericalangle ACB$. Trikotnik ABO je enakokrak s kotom $35°$ ob osnovnici AB. Torej je

$$\sphericalangle AOB = 180° - \sphericalangle BAO - \sphericalangle OBA = 180° - 2 \cdot 35° = 110°.$$

Središčni kot nad tetivo AB tako meri $110°$. Ker ležita točki O in C na **istem** bregu premice AB, meri obodni kot $\sphericalangle ACB$ polovico središčnega kota $\sphericalangle AOB$. Sledi $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = 55°$.

Razmisli sam: Če ležita točki O in C na različnih bregovih premice AB, je $\sphericalangle ACB = 125°$. Zakaj?

Zgled 7. *Naj bodo A, B, C in D take zaporedne točke na krožnici, da velja $\sphericalangle CAD = 30°$ in $\sphericalangle CBA = 80°$. Koliko meri kot $\sphericalangle DCA$?*



Rešitev. Narišimo skico in na njej označimo znana kota $\sphericalangle CAD$ in $\sphericalangle CBA$ ter iskani kot $\sphericalangle DCA$. (Da bi lahko te kote označili, je bilo potrebno narisati daljice AB, AC, AD, BC in CD.) Kako bi sedaj izračunali kot $\sphericalangle DCA$? Če narišemo še daljico BD, vidimo, da sta $\sphericalangle DCA$ in $\sphericalangle DBA$ obodna kota nad isto tetivo. (Tu je bilo pomembno, da ležita točki B in C na istem bregu premice AD.) Torej je $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA$. Podobno sklepamo, da je tudi $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 30°$. Torej je

$$\sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA = \sphericalangle CBA - \sphericalangle CBD = 80° - 30° = 50°.$$

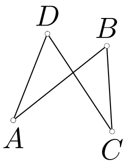
Ponovimo ključne korake v reševanju gornje naloge:

1. Narišemo skico in na njej označimo vse podatke.
2. Na skico narišemo dodatno daljico.
   To je zelo značilen korak pri reševanju geometrijskih nalog: na skico je potrebno nekaj dorisati. Ne ustraši se tega koraka, pusti domišljiji prosto pot! Nariši novo daljico, nariši novo krožnico, označi kakšno točko, ki je še brez oznake, ...
3. Izračunamo kote s pomočjo izreka o obodnih kotih. Ker običajno opazujemo obodne kote nad tetivo, je potrebno še posebej paziti, da vrhovi res ležijo na istem bregu te tetive.

Koncikličnost

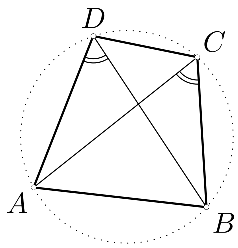
Točkam, ki ležijo na isti krožnici, pravimo, da so *koncikliène*. Pravimo, da je štirikotnik $ABCD$ *tetiven*, če so njegova oglišča konciklične točke. Povedano drugače, štirikotnik je tetiven, če vsa njegova oglišča ležijo na neki krožnici.

Poudariti velja, da med štirikotnike **ne štejemo** like, pri katerih se stranice sekajo v notranjosti stranic. Lik na desni torej **ni štirikotnik**. (Če povežemo točke med seboj drugače, pa seveda dobimo štirikotnik. Točke A, B, C in D nam tako določajo štirikotnik $ACBD$.)



Izrek 8. *Štirikotnik $ABCD$ je tetiven natanko tedaj, ko je $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$.* ■

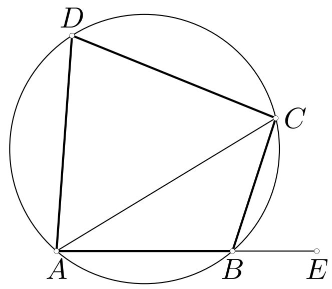
Opomba. Pri tem izreku je **bistvenega pomena** podatek, da imamo **štirikotnik** $ABCD$. Namesto tega bi lahko tudi zahtevali, da ležita točki C in D na istem bregu premice AB ali pa, da ležita točki B in D na različnih bregovih premice AC. Prav tako tudi ne zadošča reči, da iz konciklčnosti točk A, B, C in D sledi, da je $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$. Tu moramo vedeti, da so točke A, B, C in D zaporedne točke na krožnici.



Zgled 8. *Naj bodo A, B, C in D zaporedne točke na krožnici. Na premici AB izberemo tako točko E, da leži točka B med točkama A in E. Koliko meri kot EBC, če je $\sphericalangle ADC = 72°$?*

Rešitev. Narišimo skico. Ker ležita točki B in D na **različnih** bregovih premice AC, obodna kota $\sphericalangle CBA$ in $\sphericalangle ADC$ nad tetivo AC **nista enaka**, ampak **sta suplementarna**. Torej je

$$\sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC = 180°. \tag{1}$$



Ker ležijo točke A, B in E na isti premici, je kot $\sphericalangle EBA$ iztegnjeni. Sledi

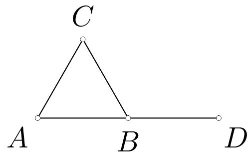
$$\sphericalangle EBC + \sphericalangle CBA = \sphericalangle EBA = 180°. \tag{2}$$

Iz enačb (1) in (2) tako sledi, da je $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ADC = 72°$.

Na tekmovanju Kenguru smo lani zasledili nalogo

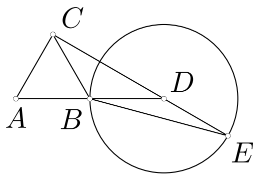
Zgled 9. *Naj bo ABC enakostranični trikotnik, točka B pa razpolovišče daljice AD. V isti ravnini narišemo točko E tako, da velja $|DE| = |AB|$, razdalja med C in E pa je največja možna. Koliko meri kot BED?*

(**A**) 45° (**B**) 30° (**C**) 20° (**D**) 15° (**E**) 10°

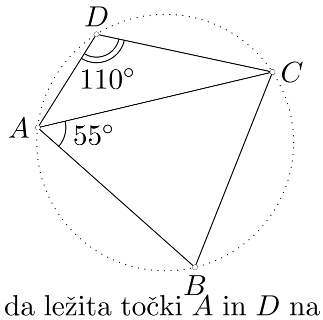


Opomba. Oznaka $|AB| = |BC|$ pomeni, da sta daljici AB in BC enako dolgi.

Rešitev. Ker je $|AB| = |BD|$, leži točka E na krožnici s središčem v D in polmerom BD. Da pa bo razdalja med C in E največja, leži točka E na premici, ki gre skozi točki C in D. Trikotnik ABC je enakostraničen, zato je $\sphericalangle ABC = 60°$ in $\sphericalangle DBC = 120°$. Sledi, da je $\sphericalangle BDC = 30°$, saj je trikotnik BDC enakokrak s krakoma BD in BC. Upoštevamo še, da je $\sphericalangle BDC$ središčni kot, $\sphericalangle BEC$ pa obodni kot nad istim lokom, zato je $\sphericalangle BED = 15°$.



Zgled 10. *V štirikotniku $ABCD$ velja $\sphericalangle ADC = 110°$, $\sphericalangle BAC = 55°$ in $|AB| = |BC|$. Dokaži, da premica BD razpolavlja kot ADC.*



Rešitev. Narišimo skico. Trikotnik ABC je (do velikosti) natančno določen, saj je enakokrak (zaradi $|AB| = |BC|$) in poznamo kot ob njegovi osnovnici. Lega točke D pa ni povsem natančno določena. Vemo le, da je $\sphericalangle ADC = 110°$.
Kot smo že zapisali, je trikotnik ABC enakokrak. Torej je $\sphericalangle CBA = 180° - 2 \cdot \sphericalangle BAC = 180° - 2 \cdot 55° = 70°$. Na tem mestu **opazimo**, da sta kota $\sphericalangle CBA$ in $\sphericalangle ADC$ suplementarna (torej $\sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC = 110° + 70° = 180°$). Ker ležita točki B in D na **različnih** bregovih premice AC, je zato $ABCD$ tetivni štirikotnik. Sedaj pa upoštevamo, da ležita točki A in D na **istem** bregu premice BC, zato je $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB = 55°$. Sledi $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC - \sphericalangle BDC = 110° - 55° = 55°$. Torej premica BD res razpolavlja kot ADC.

Opomba. Ker lega točke D ni natančno določena, narišemo neko točko D, ki zadošča pogojem naloge. Čeprav lega točke D ni določena, pa si naloge **ne smemo poenostaviti** tako, da kote v trikotniku ADC vnaprej izberemo (npr. predpostavimo, da je trikotnik ADC enakokrak z vrhom pri D) in nalogo rešimo za ta **poseben primer**. Nalogo je potrebno rešiti v splošnem, rešitev sama pa mora biti taka, da velja tudi za poseben primer.

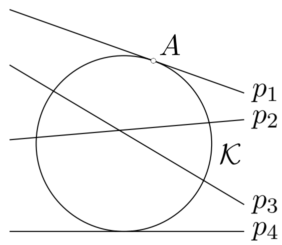
Pomni. Z besedo "opazimo" se moramo pri rešitvah geometrijskih nalog sprijazniti. Na začetku vedno narišemo skico, potem pa moramo prej ali slej nekaj opaziti. In pravo stvar lahko hitro opazimo le z mnogo vaje.

Nalogi

3. Naj bo $ABCD$ tak tetivni štirikotnik, v katerem daljica AC razpolavlja kota $\sphericalangle BAD$ in $\sphericalangle BCD$. Dokaži, da je AC premer temu štirikotniku očrtane krožnice.

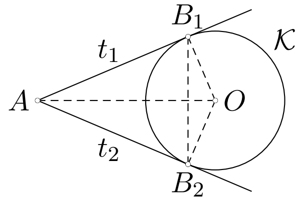
4. Označimo s $\mathcal{K}$ tetivnemu štirikotniku $ABCD$ očrtano krožnico. Simetrali kotov $\sphericalangle ABC$ in $\sphericalangle CDA$ sekata krožnico $\mathcal{K}$ ponovno v točkah B' in D'. Dokaži, da leži središče krožnice $\mathcal{K}$ na daljici $B'D'$.

Tangente in sekante



V ravnini ležita premica p in krožnica $\mathcal{K}$. Če premica p seka krožnico v dveh (različnih) točkah, pravimo, da je p *sekanta krožnice* $\mathcal{K}$. Če premica p seka krožnico v eni točki, pravimo, da je p *tangenta krožnice* $\mathcal{K}$. Presečni točki rečemo tudi *dotikališče premice* p *s krožnico* $\mathcal{K}$. Na sliki desno sta premici p_1 in p_4 tangenti na krožnico $\mathcal{K}$, premici p_2 in p_3 pa sekanti krožnice $\mathcal{K}$. Dotikališče premice p_1 s krožnico $\mathcal{K}$ je na sliki označeno z A.

Izrek 9. *Kot med tangento in polmerom iz dotikališča tangente je pravi.* ■



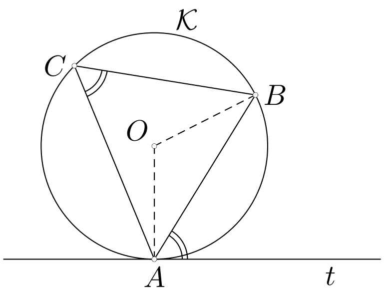
Naj bo A točka izven kroga, ki ga omejuje krožnica $\mathcal{K}$. Potem lahko iz točke A potegnemo dve različni tangenti na krožnico $\mathcal{K}$. Dotikališči tangent označimo z B_1 in B_2. Daljico AB_1 (oziroma AB_2) imenujemo *tangentni odsek* tangente t_1 (oziroma t_2) iz točke A.

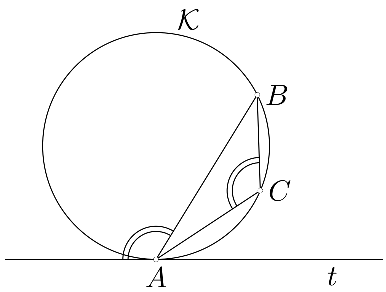
Izrek 10. *Tangentna odseka iz iste točke sta enako dolga.*

Dokaz. Trikotnika AOB_1 in AOB_2 sta skladna, saj sta pravokotna s pravima kotoma pri B_1 oziroma B_2 in se ujemata v dveh stranicah: $|OB_1| = |OB_2|$ in skupna stranica AO. Torej je tudi $|AB_1| = |AB_2|$. ■

Izrek 11. *Kot med tetivo in tangento, ki se dotika dane krožnice v krajišču tetive, je enak nepriležnemu obodnemu kotu nad to tetivo.*

Opomba. Na obeh slikah je narisana tetiva AB in tangenta t, ki se krožnice $\mathcal{K}$ dotika v točki A. V izreku je lahko opazovani kot med tetivo in tangento tudi topi, kar prikazuje desna skica.





Dokaz. Dokaz bomo napravili le za primer ostrega kota med tetivo in tangento. Dokaza primerov, ko je kot med tetivo in tangento topi ali pravi, prepustimo bralcu.

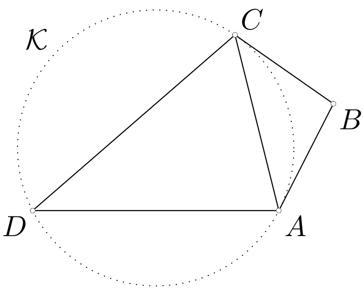
Označimo s φ kot med tetivo AB in tangento t. Potem je $\sphericalangle BAO = 90° - \varphi$. Ker je trikotnik ABO enakokrak s kotom $\sphericalangle BAO = 90° - \varphi$ ob osnovnici AB, je kot ob vrhu enak

$$\sphericalangle AOB = 180° - 2 \cdot (90° - \varphi) = 2\varphi.$$

Torej je obodni kot $\sphericalangle ACB$ res enak φ. ■

Zgled 11. *Na krožnici $\mathcal{K}$ ležijo take točke A, C in D, da je $\sphericalangle CAD = 76°$ in $\sphericalangle DCA = 63°$. Tangenti na krožnico $\mathcal{K}$ v točkah A in C se sekata v točki B. Koliko merijo koti $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ACB$ in $\sphericalangle ABC$?*

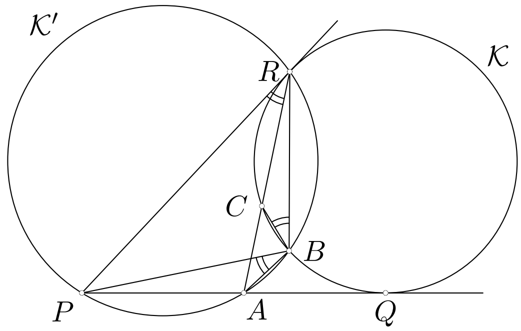
Rešitev. Narišimo skico. V trikotniku ACD poznamo velikosti dveh kotov, zato je $\sphericalangle ADC = 180° - \sphericalangle CAD - \sphericalangle DCA = 180° - 76° - 63° = 41°$. Po izreku o kotu med tetivo in tangento sledi, da je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC = 41°$. Torej je tudi $\sphericalangle BAC = 41°$. Nazadnje izračunamo



$$\sphericalangle CBA = 180° - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ACB = 180° - 2 \cdot 41° = 98°.$$

Zgled 12. *Tangenti na krožnico $\mathcal{K}$ v različnih točkah Q in R se sekata v točki P. Izberimo poljubno točko A na daljici PQ in označimo s $\mathcal{K}'$ očrtano krožnico trikotnika PAR. Označimo drugo presečišče krožnic $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'$ z B, premica AR pa naj seka krožnico $\mathcal{K}$ v točki C. Dokaži, da je $\sphericalangle PAR = \sphericalangle ABC$.*

Rešitev. Ker je kot med tetivo RC in tangento PR krožnice $\mathcal{K}$ enak nepriležnemu kotu nad to tetivo, je $\sphericalangle CBR = \sphericalangle CRP$. Ker ležijo točke A, C in R na isti premici, velja $\sphericalangle CRP = \sphericalangle ARP$. Zaradi koncikličnosti točk P, A, B in R velja $\sphericalangle ARP = \sphericalangle ABP$. Torej je $\sphericalangle CBR = \sphericalangle ABP$. Ker je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABP + \sphericalangle PBC$ in $\sphericalangle PBR = \sphericalangle PBC + \sphericalangle CBR$, sledi od tod $\sphericalangle ABC = \sphericalangle PBR$. Nazadnje zaradi koncikličnosti točk P, A, B in R sklepamo, da je $\sphericalangle PAR = \sphericalangle PBR$, kar nam da želeno enakost $\sphericalangle ABC = \sphericalangle PAR$.



Naloge

5. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ naj se sekata v različnih točkah A in B. Premica skozi A seka krožnico $\mathcal{K}_1$ ponovno v točki C, $C \neq B$, krožnico $\mathcal{K}_2$ pa seka ponovno v točki D, $D \neq B$. Tangenta na krožnico $\mathcal{K}_1$ v točki C in tangenta na krožnico $\mathcal{K}_2$ v točki D se sekata v točki E. Dokaži, da so točke B, C, D in E konciklične.

6. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ naj se sekata v različnih točkah A in B. Na krožnici $\mathcal{K}_1$ izberemo poljubno od točk A in B različno točko C. Premici CA in CB sekata krožnico $\mathcal{K}_2$ ponovno v točkah A' in B'. Dokaži, da je premica $A'B'$ vzporedna tangenti na krožnico $\mathcal{K}_1$ v točki C.

7. Simetrala kota $\sphericalangle BAC$ pravokotnega trikotnika ABC s hipotenuzo AB seka njemu očrtano krožnico $\mathcal{K}$ ponovno v točki D. Dokaži, da je tangenta na krožnico $\mathcal{K}$ v točki D vzporedna premici BC.

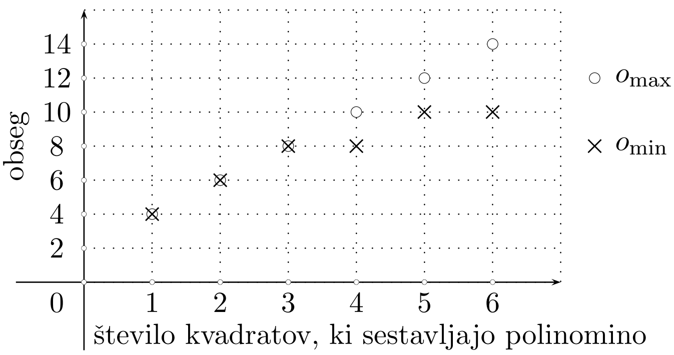
Rešitve nalog iz prejšnje številke

K rešitvi naloge običajno vodi več poti in vse matematično veljavne rešitve so pravilne. V rešitvah je izbrana tista pot, ki se najbolj ujema s prispevkom, v katerem je bila določena naloga zastavljena. Če se tvoja rešitev od uradne rešitve bistveno razlikuje, se o rešitvi pogovori s tvojim učiteljem matematike.

Polinomine

V preglednici sta prikazana najmanjši in največji možen obseg nekaterih polinomin.

polinomina	$o_{\min}$	$o_{\max}$
monomina	4	4
domina	6	6
trinomina	8	8
tetromina	8	10
pentomina	10	12
heksomina	10	14

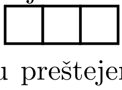


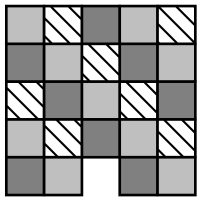
Naloge

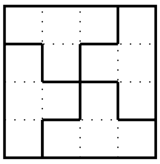
1. Verjetno se je marsikdo kar nekaj časa ukvarjal s prekrivanjem tega lika, a mu ni uspelo. **Domneval** je, da rešitve ni. Ali je s tem naloga rešena? Seveda ne. Če lika ne uspemo prekriti, še ne pomeni, da tega ni bi mogel narediti nekdo drug, bolj spreten ali bolj vztrajen.

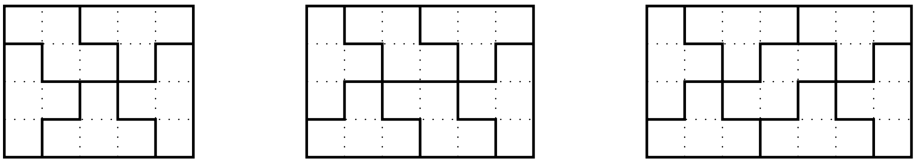
   Za dokaz, da lika ni možno prekriti na predpisan način, tudi ni dovolj na lik narisati nekaj trinomin in reči, da se ostanka lika ne da prekriti. S tem pokažemo le, da se lika ne da prekriti, če prvih nekaj trinomin položimo na ravno določen način. Kaj pa, če jih položimo drugače?

   Za **dokaz**, da se lika ne da prekriti na predpisan način, je potrebno ubrati povsem drugačno pot. Običajno si pri tovrstnih nalogah pomagamo z barvanjem.

   Obarvajmo lik s tremi barvami, kot kaže slika. Kakor koli položimo trinomino  na lik, bo vedno pokril po eno polje vsake barve. Če sedaj v liku preštejemo kvadratke vsake barve, vidimo, da števila niso enaka. Zato lika ni mogoče brez prekrivanja in vrzeli prekriti s trinominami.

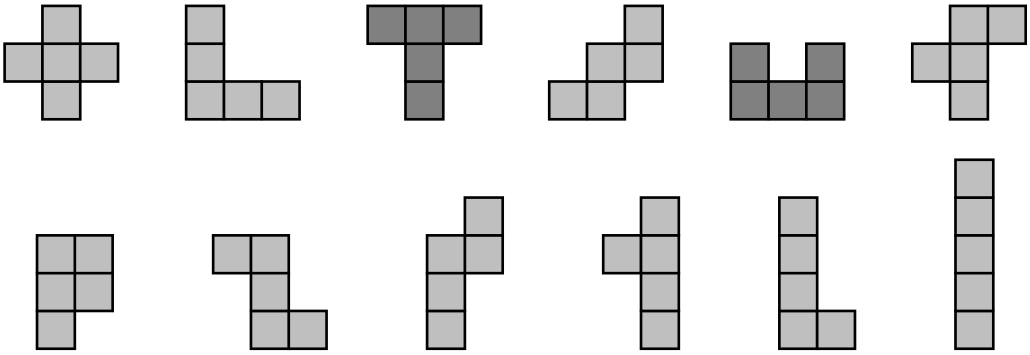


2. (a) 

(b) npr.: 

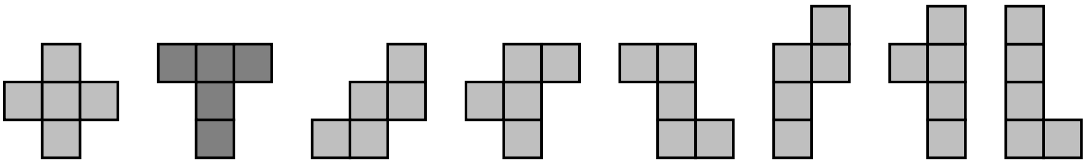
(c) Kvadrat 5×5 sestavlja 25 enotskih kvadratov. Tetromine T in Z so sestavljene iz po 4 enotskih kvadratov, število 25 pa ni deljivo s 4.

3. Obstaja 12 različnih pentomin:

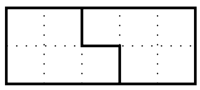


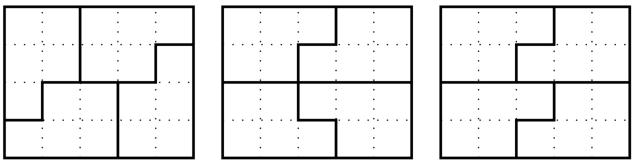
Imenovane so po črkah angleške abecede, na katere spominjajo, če jih (po potrebi) malo zasučemo.

4. V škatle brez pokrova lahko preoblikujemo pentomine X, T, W, F, Z, N, Y in L:



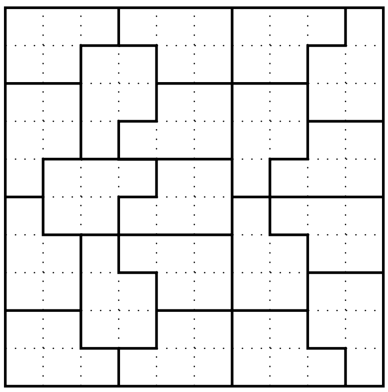
5. (a) Za sestavljanje pravokotnika 5×2 porabimo 2 P-pentomini:



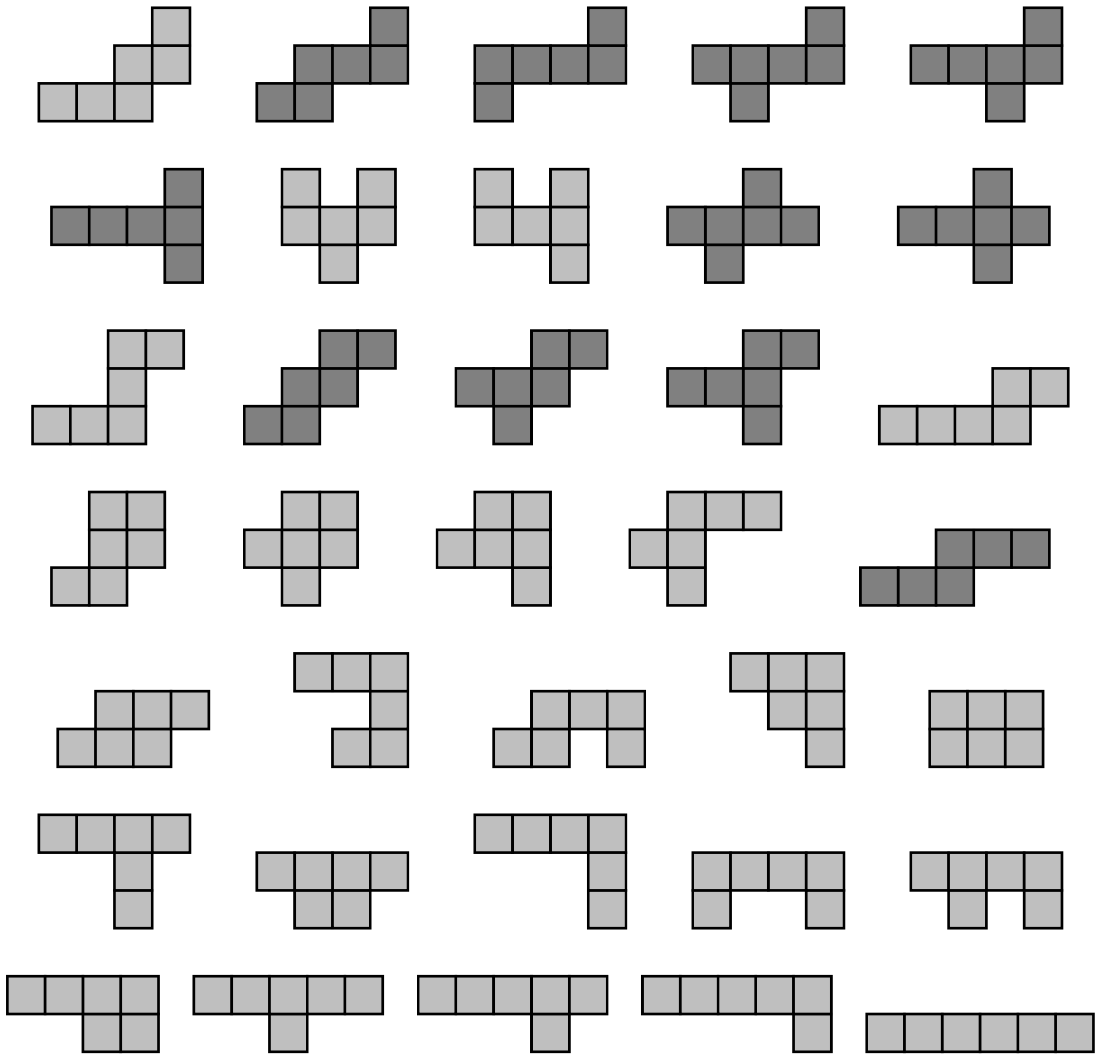
(b) 

(c) Ni mogoče. Vsaka P-pentomina vsebuje kvadrat 2×2. Vendar po dolžini in po širini lahko položimo le po dve P-pentomini, skupaj torej 4 in pete P-pentomine ni mogoče položiti.

(d) Vsaka P-pentomina je sestavljena iz 5 enotskih kvadratov. Zato mora biti kvadrat takih razsežnosti, da bo njegova ploščina večkratnik števila 5. Kvadrata 5×5, kot sledi iz točke (c), ni mogoče sestaviti, naslednji možni kvadrat pa je 10×10. Kot kaže slika na desni, tega lahko sestavimo.



6. Vse heksomine so:



Temnejše predstavljajo mreže kocke.

Nelinearne diofantske enačbe

1. Na levi strani enačbe $2x - xy = 7$ izpostavimo x: $x(2-y) = 7$. Ker je $7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = (-1) \cdot (-7) = (-7) \cdot (-1)$, imamo štiri možnosti:

$$x = 1,\ 2 - y = 7 \Rightarrow y = -5, \qquad x = 7,\ 2 - y = 1 \Rightarrow y = 1,$$
$$x = -1,\ 2 - y = -7 \Rightarrow y = 9, \qquad x = -7,\ 2 - y = -1 \Rightarrow y = 3.$$

Rešitve so $(x, y) \in \{(1, -5),\ (7, 1),\ (-1, 9),\ (-7, 3)\}$.

2. Označimo naravni števili z a in b. Tedaj je $a \cdot b = 3(a + b)$. Enačbo preoblikujmo v $a(b-3) - 3b = 0$ in na obeh straneh prištejmo 9, da lahko zapišemo $a(b-3) - 3(b-3) = 9$ oziroma $(a-3)(b-3) = 9$. Ker iščemo naravni števili, je $a - 3 \geq -2$ in $b - 3 \geq -2$. Torej je dovolj, če razcepimo $9 = 1 \cdot 9 = 9 \cdot 1 = 3 \cdot 3$, pri čemer lahko $9 \cdot 1$ izpustimo, če privzamemo $a \leq b$. Tako imamo:

$$a - 3 = 1,\ b - 3 = 9 \Rightarrow a = 4,\ b = 12, \qquad a - 3 = 3,\ b - 3 = 3 \Rightarrow a = 6,\ b = 6.$$

Dva para naravnih števil sta taka, da je njun zmnožek trikrat večji od njune vsote, to sta para 4 in 12 ter 6 in 6.

3. Podobno kot pri prejšnji nalogi pridemo do enačbe $a \cdot b = 10(a + b)$, ki jo preoblikujemo in uredimo v $(a-10)(b-10) = 100$. Ker iščemo naravni števili, je $a - 10 \geq -9$ in $b - 10 \geq -9$. Privzamemo lahko, da je $a \leq b$, zato je dovolj, če pišemo $100 = 1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10$ in obdelamo vse možnosti:

$$\begin{aligned}
&a - 10 = 1,\ b - 10 = 100 \Rightarrow a = 11,\ b = 110,\\
&a - 10 = 2,\ b - 10 = 50 \Rightarrow a = 12,\ b = 60,\\
&a - 10 = 4,\ b - 10 = 25 \Rightarrow a = 14,\ b = 35,\\
&a - 10 = 5,\ b - 10 = 20 \Rightarrow a = 15,\ b = 30,\\
&a - 10 = 10,\ b - 10 = 10 \Rightarrow a = 20,\ b = 20.
\end{aligned}$$

Poleg para števil $(12, 60)$, za kateri velja, da je njun zmnožek desetkrat večji od njune vsote, imamo še štiri pare s to lastnostjo: $(11, 110)$, $(14, 35)$, $(15, 30)$ in $(20, 20)$.

4. Če levo stran enačbe $x^2 - y^2 = 2002$ razstavimo, dobimo $(x-y)(x+y) = 2002$. Števili $x - y$ in $x + y$ sta enake parnosti, saj je njuna razlika sodo število. Ker je njun zmnožek sodo število, bi morali biti obe števili sodi. To pa ne gre, saj je v razcepu števila 2002 le ena dvojka: $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Kakorkoli zapišemo število 2002 kot zmnožek dveh celih števil, je vedno eno sodo in eno liho. Enačba torej nima celoštevilskih rešitev.

5. Najprej pišemo $x^2y^2 - 3y^2 - x^2 = 0$, od koder sklepamo, da bi se dala leva stran zapisati v obliki zmnožka $(x^2-3)(y^2-1)$, če bi ji prišteli število 3. Tako imamo $(x^2-3)(y^2-1) = 3$. Ker je $3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$, imamo štiri možnosti:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 3 = 1,\ y^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4,\ y^2 = 4;\\
&x^2 - 3 = 3,\ y^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 6,\ y^2 = 2, \text{ kar v celih številih ni možno;}\\
&x^2 - 3 = -1,\ y^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = 2,\ y^2 = -2, \text{ kar v celih številih ni možno;}\\
&x^2 - 3 = -3,\ y^2 - 1 = -1 \Rightarrow x^2 = 0,\ y^2 = 0.
\end{aligned}$$

Prva možnost nam da pare rešitev $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$ in $(-2, -2)$, zadnja pa še par $(0, 0)$.

6. Levo stran enačbe preoblikujmo: $x^2-xy-2y^2 = x^2+xy-2xy-2y^2 = x(x+y)-2y(x+y)$, tako da lahko zapišemo $(x+y)(x-2y) = 18$. Za vsak celoštevilski razcep $18 = a \cdot b$ bomo reševali sistem dveh enačb

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ x-2y &= b. \end{aligned}$$

Z odštevanjem po stolpcih bomo dobili $3y = a-b$, zato bomo izmed vseh razcepov števila 18 izbrali le tiste, pri katerih je razlika faktorjev deljiva s 3. To so $3 \cdot 6$, $6 \cdot 3$, $(-3)\cdot(-6)$ in $(-6)\cdot(-3)$. Imamo torej

$$\begin{array}{r@{\qquad}r@{\qquad}r@{\qquad}r} x+y=3 & x+y=6 & x+y=-3 & x+y=-6 \\ \underline{x-2y=6} & \underline{x-2y=3} & \underline{x-2y=-6} & \underline{x-2y=-3} \\ 3y=-3 & 3y=3 & 3y=3 & 3y=-3 \\ y=-1 & y=1 & y=1 & y=-1 \\ x=4 & x=5 & x=-4 & x=-5 \end{array}$$

Enačbo rešijo štirje pari celih števil, in sicer $(x,y) \in \{(4,-1),\ (5,1),\ (-4,1),\ (-5,-1)\}$.

7. Naj ima pravokoten trikotnik hipotenzo c ter kateti a in b in naj bo kateta a dolga 55. Tedaj je $c^2-b^2 = 55^2$ oziroma $(c-b)(c+b) = 55^2$. Podobno kot pri prejšnji nalogi bomo reševali sistem enačb

$$\begin{aligned} c-b &= m \\ c+b &= n. \end{aligned}$$

kjer sta m in n faktorja v razcepu $55^2 = m \cdot n$. Če enačbi po stolpcih seštejemo, dobimo $2c = m+n$. Iščemo trikotnik z najkrajšo hipotenuzo, zato bomo izbrali tisti razcep, pri katerem je vsota faktorjev najmanjša. Iz $55^2 = 5\cdot5\cdot11\cdot11$ vidimo, da bo vsota najmanjša, ko bomo izbrali $55^2 = 25\cdot121$ (zaradi $c-b<c+b$ ne moremo izbrati enakih faktorjev). Tedaj je $2c = 146$ oziroma $c = 73$ in $b = 48$. Iskani pravokotni trikotnik ima kateti z dolžinama 55 in 48 ter hipotenuzo dolžine 73.

8. Ker x in y ne moreta biti 0, bomo dano enačbo pomnožili s $3xy$. Tako pridemo do $3x+3y = xy$, od koder izrazimo $y = \frac{3x}{x-3} = 3 + \frac{9}{x-3}$. Z deljenjem z $x-3$ nismo izgubili nobene rešitve, saj $x-3$ ne more biti enak nič. Če bi bilo $x-3=0$, to je $x=3$, bi namreč imeli $9+3y = 3y$, kar ni mogoče. Sedaj se osredotočimo na ulomek $\frac{9}{x-3}$. Njegova vrednost je celo število, če je $x-3$ enak 1, 3, 9, -1, -3 ali -9. Po vrsti pridemo do parov rešitev $(x,y) \in \{(4,12),\ (6,6),\ (12,4),\ (2,-6),\ (-6,2)\}$ ($x-3$ ne more biti enak -3, saj bi v tem primeru imeli $x=0$, kar pa smo izvzeli že na začetku).
Opomba. Enačbo $3x+3y = xy$ lahko rešimo tudi tako, da jo zapišemo v obliki $(x-3)(y-3) = 9$.

9. Besedilo naloge spremenimo v enačbo: če sta števki iskanega števila a in b, imamo $10a+b = 2ab$. Odtod izrazimo $b = \frac{10a}{2a-1} = 5 + \frac{5}{2a-1}$ (tu smo brez skrbi delili z $2a-1$, saj $2a-1 \neq 0$; bralec naj sam premisli, zakaj). Do rešitve pridemo, če izberemo $2a-1 = 1$ ali $2a-1 = 5$, saj je a od 0 različna števka v dvomestnem številu. Prva možnost ne prinese rešitve: če je $a = 1$, je $b = 10$, ki ni števka. Druga možnost nam da edino rešitev, to je dvomestno število 36.
Opomba. Enačbo $10a+b = 2ab$ lahko rešimo tudi tako, da jo zapišemo v obliki $(2a-1)(b-5) = 5$.

10. Naj bosta x in y starosti Majinih bratov. Potem velja $xy + x + y = 34$. Odtod izrazimo $y = \frac{34-x}{x+1} = \frac{35}{x+1} - 1$ (pri deljenju z $x+1$ nismo izgubili nobene rešitve, saj je x starost in ne more biti negativno število). Da bi dobili celoštevilsko vrednost ulomka, mora $x+1$ imeti vrednost 1, 5, 7 ali 35. Toda ne 1 ne 35 ne prideta v upoštev, ker bi dobili po eno starost enako 0. Dovolj je izbrati $x + 1 = 5$, ko dobimo starosti 4 in 6. Če vzamemo $x + 1 = 7$, pridemo do istih starosti. Majina brata sta stara 4 in 6 let.
    Opomba. Enačbo $xy + x + y = 34$ lahko rešimo tudi tako, da jo zapišemo v obliki $(x+1)(y+1) = 35$.

11. Najprej zapišemo, kar pove besedilo naloge: $n = 5k+4$ in $n^2 = 25l+21$. Kvadrirajmo prvo enakost: $n^2 = 25k^2 + 40k + 16$. Če izenačimo izraza za n^2 in dobljeno enačbo preuredimo, pridemo do $5k^2 + 8k - 1 = 5l$ oziroma $l = k^2 + \frac{8k-1}{5}$. Ker iščemo najmanjše naravno število n, izberemo najmanjši k, da bo imel ulomek $\frac{8k-1}{5}$ celo vrednost, to je $k = 2$. Najmanjše naravno število z dano lastnostjo je 14.

12. Naj bosta števki, ki nastopata v štirimestnem številu, enaki a in b. Tedaj je $1000a + 100a + 10b + b = n^2$, kjer je n naravno število. Enačbo preuredimo v $1100a + 11b = n^2$, od tod pa sklepamo, da je n^2 in zato tudi n deljiv z 11. Pišemo torej $n = 11m$ in dobimo $1100a + 11b = 121m^2$ oziroma $100a + b = 11m^2$, odtod pa $m^2 = 9a + \frac{a+b}{11}$. Ker števka a ne more biti enaka 0, vsota $a+b$ pa je lahko največ 18, je edina možna celoštevilska vrednost ulomka $\frac{a+b}{11}$ enaka 1. Zato izbiramo vrednosti števk a in b tako, da bo njuna vsota 11. Seveda mora biti $9a + 1 = m^2$ res popolni kvadrat, zato je a lahko le 7. Tedaj je $b = 4$ in edina rešitev je 7744 ($= 88^2$).

13. Enačbo preoblikujemo v $x^2 + (y-4)^2 = 1$. Vsota kvadratov celih števil je enaka 1 le, če je en seštevanec enak 1 in drugi 0. Če je $x^2 = 1$ (torej $x = 1$ ali $x = -1$), je $(y-4)^2 = 0$ (torej $y = 4$). Če pa je $x^2 = 0$ (torej $x = 0$), je $(y-4)^2 = 1$ (torej $y - 4 = 1$ ali $y - 4 = -1$, od tod pa $y = 5$ ali $y = 3$). Vsi pari celih števil, ki rešijo dano enačbo, so $(x, y) \in \{(1,4),\ (-1,4),\ (0,5),\ (0,3)\}$.

14. Enačbo zapišimo drugače: $(a+2)^2 + (b-3)^2 = 2$. Vsota kvadratov celih števil je enaka 2 le, če sta oba seštevanca enaka 1 (primer $0+2$ odpade, saj 2 ni kvadrat celega števila). Tako je $a+2 = 1$ ali $a+2 = -1$ (od tod $a = -1$ ali $a = -3$) in $b-3 = 1$ ali $b-3 = -1$ (od tod $b = 4$ ali $b = 2$). Dano enačbo rešijo pari $(a,b) \in \{(-1,4),\ (-1,2),\ (-3,4),\ (-3,2)\}$.

15. Pokazali bomo, da enačba nima celoštevilskih rešitev. Dovolj je, če se omejimo na nenegativna cela števila x, y in z, brez škode pa lahko predpostavimo tudi $x \leq y \leq z$. Zapišimo: $7 = 0+0+7 = 0+1+6 = 0+2+5 = 0+3+4 = 1+1+5 = 1+2+4 = 1+3+3 = 2+2+3$. Vidimo, da je v vsaki vsoti vsaj eno število, ki ni popolni kvadrat celega števila, torej enačba res nima celoštevilskih rešitev.

16. Kot smo premislili v rešitvah zgledov 13 in 14, se kvadrat naravnega števila lahko konča le z eno izmed števk 0, 1, 4, 5, 6 in 9, četrta potenca pa z eno izmed števk 0, 1, 5 in 6. Vsota dveh četrtih potenc se torej lahko konča s števkami 0, 1, 2, 5, 6 ali 7. Dana enacba nima celoštevilskih rešitev.

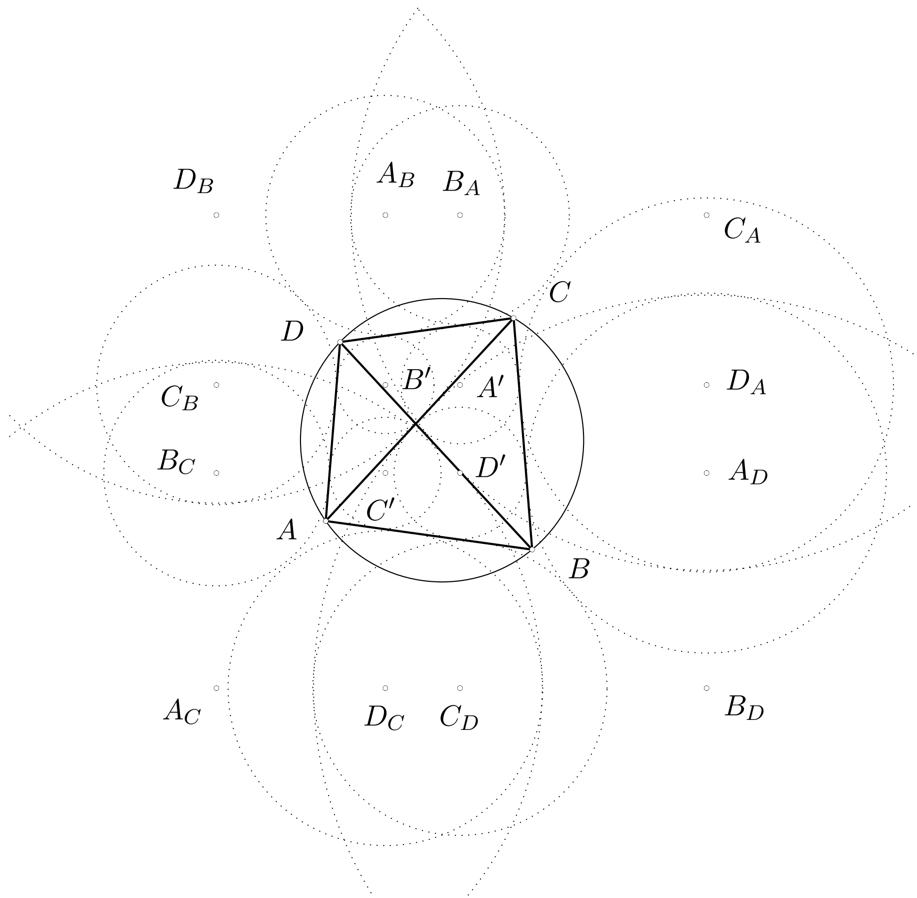
17. Očitno moramo rešitev iskati med nenegativnimi celimi števili, pri čemer mora biti vsaj eno izmed x ali y pozitivno. Prvi seštevanec se konča s števko 1 (če je $x = 0$) ali 5, drugi pa s števko 1 (če je $y = 0$) ali 6. Njuna vsota se nikoli ne konča s števko 2, razen ko sta x in y hkrati 0 (tedaj je $5^0 + 6^0 = 2$). Dana enačba torej nima celoštevilske rešitve.

18. Podobno kot pri prejšnji nalogi moramo rešitev iskati med nenegativnimi celimi števili, pri čemer mora biti vsaj eno izmed x ali y pozitivno. Prvi seštevanec se konča s števko 1, 3,

7 ali 9, drugi pa s števko 1 (če je $y = 0$), 4 ali 6. Njuna vsota se lahko konča s števko 1; vzeti moramo x oblike $4k + 3$ (tedaj se 3^x konča s števko 7), y pa oblike $2l + 1$ (tedaj se 4^y konča s števko 4). Če z žepnim računalom izračunamo nekaj potenc števil 3 in 4, ugotovimo, da dana enačba nima celoštevilske rešitve. (Resnici na ljubo se nam je pri tej nalogi izmuznila nerodnost – naloga je precej lepša, če namesto števila 4003002001 postavimo število 9008007006.)

Trikotnik in krožnica

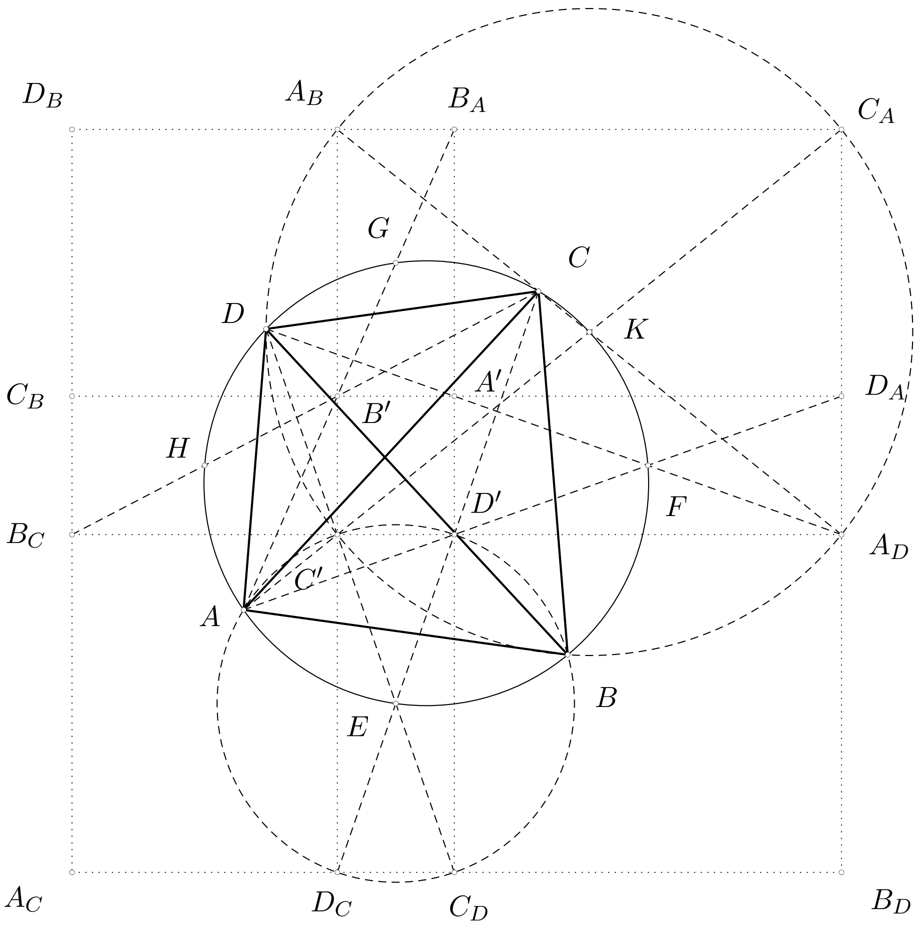
1. Najprej skrbno narišemo dovolj veliko skico. Ker bo na skici kar 17 krožnic, ne bo odveč uporaba različnih barv. Seveda pa je treba tudi oznake izbrati čimbolj simetrično. Tako za trikotnik XYZ, $\{X, Y, X, W\} = \{A, B, C, D\}$, označimo z W' središče središče njemu včrtane krožnice, W_X pa središče njemu pričrtane krožnice nad stranico YZ. Na skici tako vidimo, kaj je sploh potrebno dokazati. Zaradi obilice točk moramo biti zelo previdni pri izrekanju domnev o kolinearnosti posameznih točk, saj so lahko točke le navidez "kolinearne", v splošnem pa niso.



Sedaj pa na tej skici pobrišemo vse krožnice razen tiste, ki je očrtana štirikotniku $ABCD$. Označimo razpolovišča lokov $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ in $\widehat{DA}$ te krožnice po vrsti z E, F, G in H.

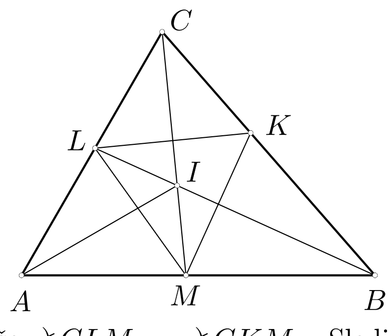
Spomnimo se, da je npr. točka E središče krožnice, na kateri ležijo točke A, B, D_C, C_D, C' in D'. Točke D, C', E in C_D ter C, D', E in D_C so kolinearne. Torej je po Talesovem izreku $D_C C_D D' C'$ pravokotnik, katerega središče je točka E. Podobno sklepamo, da so tudi $A_D D_A A' D'$, $B_A A_B B' A'$ in $C_B B_C C' B'$ pravokotniki.

Označimo s K razpolovišče loka $\widehat{BD}$ (nasproti točke A). Ker točka K leži na simetrali kota $\sphericalangle BAD$, so točke A, C', K in C_A kolinearne.



Sedaj pa se spomnimo, da je točka K središče krožnice s premerom A_BA_D in da na tej krožnici ležita tudi točki B in D. Po enakem razmisleku kot zgoraj pa je K tudi središče krožnice, ki vsebuje točke D, C', B in C_A. Po Talesovem izreku lahko tako sklepamo, da je tudi $C'A_DC_AA_B$ pravokotnik.

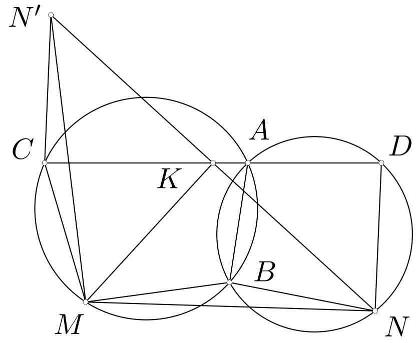
Ker pa je $A'B'C'D'$ pravokotnik, trditev od tod sledi.



2. Recimo, da taka točka K obstaja. Ker leži točka L na simetrali kota $\sphericalangle ABC$, imata trikotnika BML in BKL dve enako dolgi stranici (skupno stranico BL ter $|ML| = |KL|$) in en kot ($\sphericalangle LBM = \sphericalangle KBL$), ki pa ne leži nujno nasproti **najdaljše stranice**. Ali sta trikotnika BML in BKL skladna? **Ne nujno**, pač pa lahko zagotovo trdimo le, da je bodisi $\sphericalangle BML = \sphericalangle BKL$ ali pa $\sphericalangle BML = \pi - \sphericalangle BKL$. V drugem primeru je štirikotnik $BKLM$ tetiven, kar nam da $\sphericalangle ABC = \frac{2}{3}\pi$, kar po predpostavki naloge ni možno. Torej je $\sphericalangle BML = \sphericalangle BKL$ in podobno še $\sphericalangle CLM = \sphericalangle CKM$. Sledi $\sphericalangle A = \pi - (\pi - \sphericalangle CLM) - (\pi - \sphericalangle BML) = \sphericalangle CLM + \sphericalangle BML - \pi = \sphericalangle CKM + \sphericalangle BKL - \pi = \frac{\pi}{3}$. (Iz dokaza vidimo, da sta $BKLM$ in $CLMK$ deltoida.)

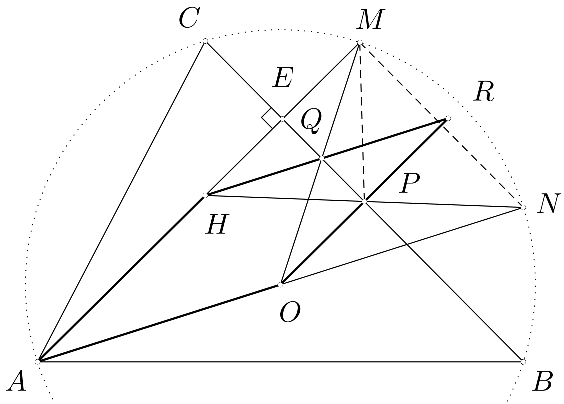
   Za dokaz v drugo smer pa privzemimo, da je $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{3}$. Izberimo tako točko $K \in BC$, da je $MK \perp BL$. Torej je $|LM| = |LK|$. Označimo z I presečišče premic BL in CM. Štirikotnik $AMIL$ je tetiven in zato $\sphericalangle MLI = \frac{\pi}{6}$. Zaradi $MK \perp BL$ je $\sphericalangle KML = \frac{\pi}{3}$, kar pomeni, da je KLM res enakostranični trikotnik.

3. Prezrcalimo N čez K v N' in dokažimo, da sta trikotnika MBN in MCN' skladna.



Velja $\sphericalangle MBN = 2\pi - \sphericalangle ABM - \sphericalangle NBA = (\pi - \sphericalangle ABM) + (\pi - \sphericalangle NBA) = \sphericalangle KDN + \sphericalangle MCK = \sphericalangle KCN' + \sphericalangle MCK = \sphericalangle MCN'$, jasno pa je $|MC| = |MB|$ in $|BN| = |DN| = |CN'|$. Torej je K nožišče višine iz vrha M enakokrakega trikotnika MNN'.

4. Označimo z E presečišče premic AM in BC. Ker je točka E razpolovišče daljice HM, sta EQM in EQH skladna pravokotna trikotnika. Torej je $\sphericalangle EMQ = \sphericalangle EHQ$. Zaradi $|AO| = |OM|$ pa velja še $\sphericalangle AMO = \sphericalangle OAM$. Torej je $\sphericalangle QHE = \sphericalangle OAM$ in zato je $AO \parallel HQ$.



Daljica AN je premer trikotniku ABC očrtane krožnice, zato je $\sphericalangle AMN = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle HEQ$; torej je $EQ \parallel MN$. Ker je točka E razpolovišče daljice HM, je točka P razpolovišče daljice HN. Torej je točka P središče (pravokotnemu) trikotniku HNM očrtane krožnice. Točka P tako leži na simetrali osnovnice NM enakokrakega trikotnika PNM. Na tej simetrali seveda leži tudi vrh O enakokrakega trikotnika ONM, zato je $OP \perp NM$ oziroma $OP \parallel AM$.

http://www.dmfa.si/Brihtnez/BrihtnezIndex.html

Brihtnež, Letnik 0, številka 2
November 2002