Strategije in zgodbice

Nik Stopar

Terme Čatež
11. november 2022

Tipične zvrsti nalog:

Strategije in zgodbice

Tipične zvrsti nalog:

- igre za dva igralca

Strategije in zgodbice

Tipične zvrsti nalog:

- igre za dva igralca
- tabele in domine

Strategije in zgodbice

Tipične zvrsti nalog:

- igre za dva igralca
- tabele in domine
- mreže in barvanja

Tipične zvrsti nalog:

- igre za dva igralca
- tabele in domine
- mreže in barvanja
- kovanci in vžigalice

Tipične zvrsti nalog:

- igre za dva igralca
- tabele in domine
- mreže in barvanja
- kovanci in vžigalice
- kombinatorične naloge

Strategije in zgodbice

Tipične zvrsti nalog:

- igre za dva igralca
- tabele in domine
- mreže in barvanja
- kovanci in vžigalice
- kombinatorične naloge

Matematične veščine:

Strategije in zgodbice

Tipične zvrsti nalog:

- igre za dva igralca
- tabele in domine
- mreže in barvanja
- kovanci in vžigalice
- kombinatorične naloge

Matematične veščine:

- samostojno raziskovanje

Strategije in zgodbice

Tipične zvrsti nalog:

- igre za dva igralca
- tabele in domine
- mreže in barvanja
- kovanci in vžigalice
- kombinatorične naloge

Matematične veščine:

- samostojno raziskovanje
- analitično opazovanje

Strategije in zgodbice

Tipične zvrsti nalog:

- igre za dva igralca
- tabele in domine
- mreže in barvanja
- kovanci in vžigalice
- kombinatorične naloge

Matematične veščine:

- samostojno raziskovanje
- analitično opazovanje
- sporočanje in argumentiranje

Strategije in zgodbice

Tipične zvrsti nalog:

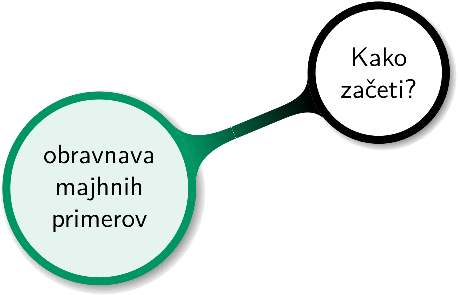
- igre za dva igralca
- tabele in domine
- mreže in barvanja
- kovanci in vžigalice
- kombinatorične naloge

Matematične veščine:

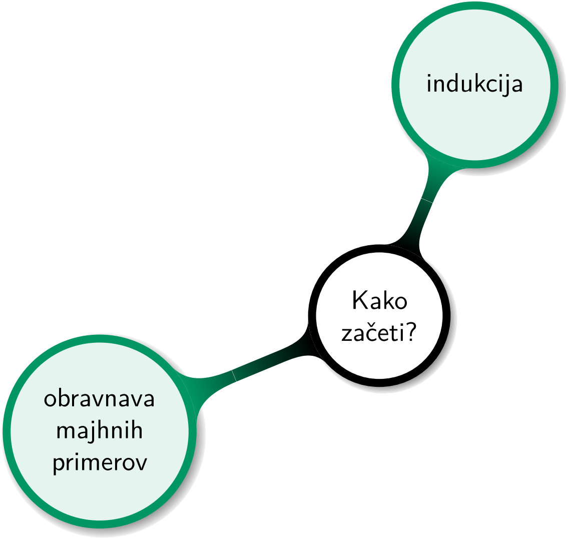
- samostojno raziskovanje
- analitično opazovanje
- sporočanje in argumentiranje
- vztrajnost in iznajdljivost

Kako začeti?

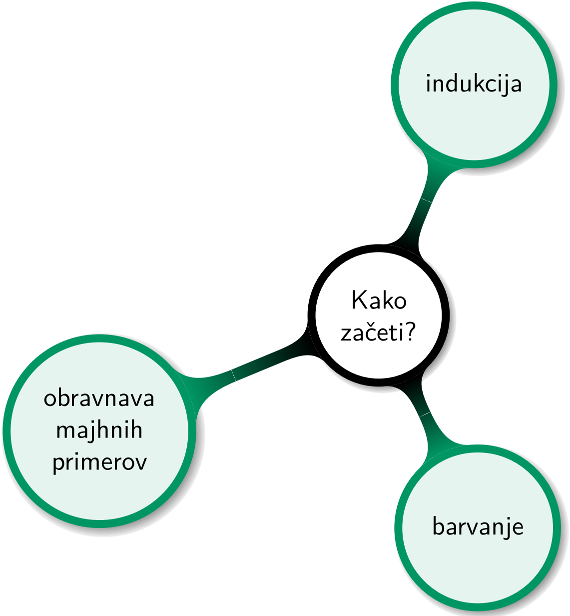
Strategije in zgodbice

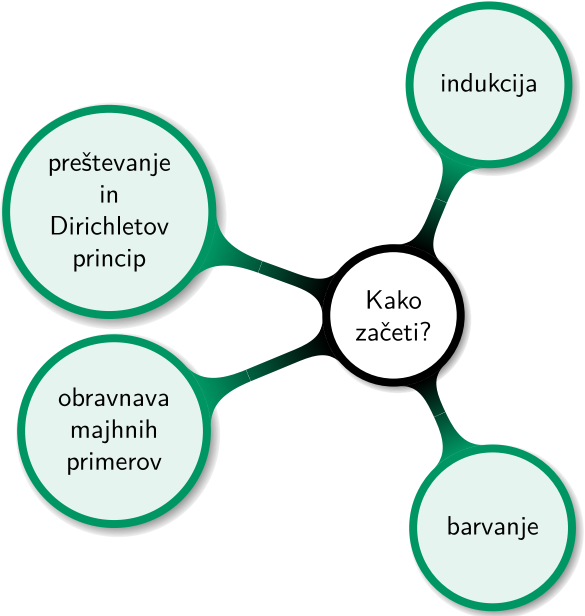


Strategije in zgodbice

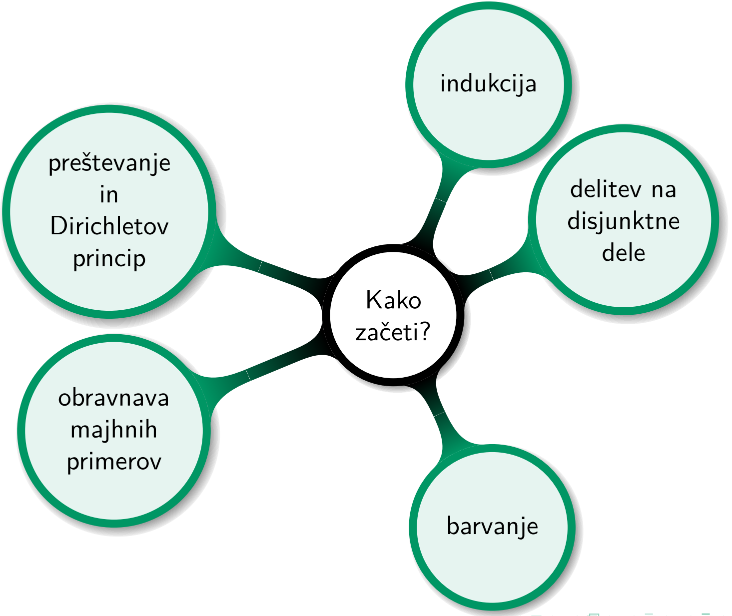


Strategije in zgodbice

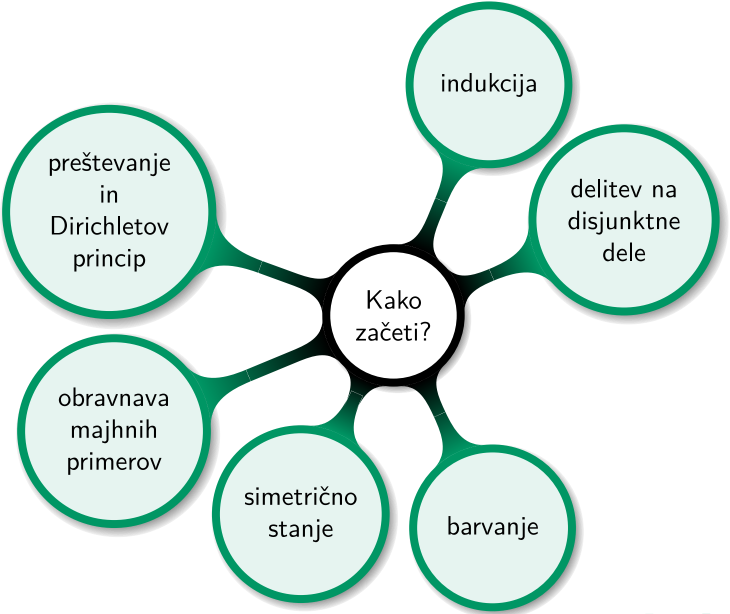



indukcija
preštevanje in Dirichletov princip
Kako začeti?
obravnava majhnih primerov
barvanje

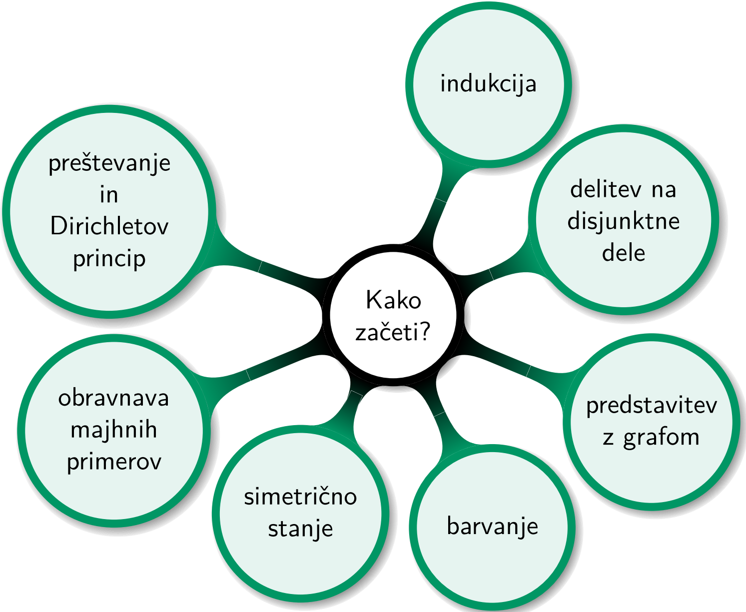
Strategije in zgodbice



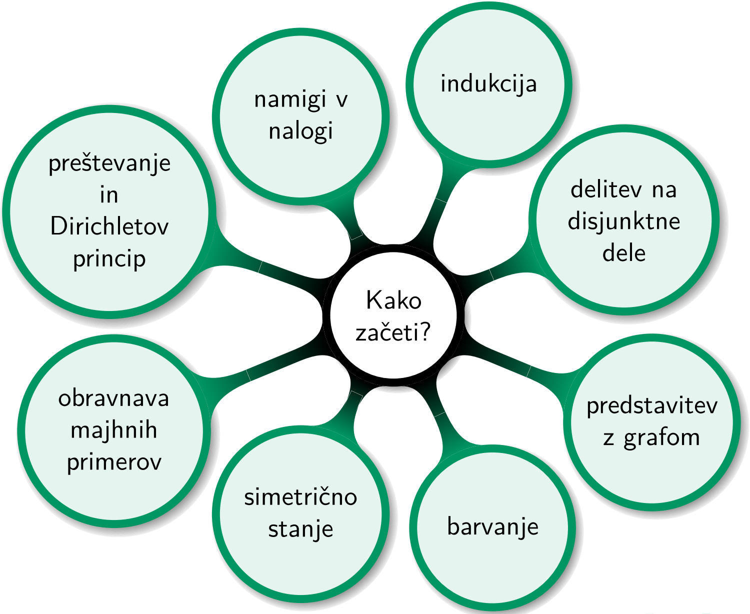
Strategije in zgodbice



Strategije in zgodbice



Strategije in zgodbice



Naloga 1 - Kupčki kovancev

Na mizi je nekaj kupčkov kovancev. Na vsakem koraku izberemo kupček z vsaj 3 kovanci, z mize odstranimo 1 kovanec iz tega kupčka in preostale kovance iz kupčka razdelimo na 2 nova kupčka (ne nujno enake velikosti), ki ju postavimo na mizo. Ali lahko po nekaj korakih na mizi stojijo le kupčki s 3 kovanci, če začnemo z enim samim kupčkom z 2000 kovanci?

Obravnava majhnih primerov

Naloga 1 - Kupčki kovancev

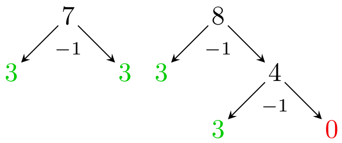
Na mizi je nekaj kupčkov kovancev. Na vsakem koraku izberemo kupček z vsaj 3 kovanci, z mize odstranimo 1 kovanec iz tega kupčka in preostale kovance iz kupčka razdelimo na 2 nova kupčka (ne nujno enake velikosti), ki ju postavimo na mizo. Ali lahko po nekaj korakih na mizi stojijo le kupčki s 3 kovanci, če začnemo z enim samim kupčkom z 2000 kovanci?

Ideja: Poglejmo, kaj se zgodi, če namesto z 2000 kovanci na enem kupčku začnemo z n kovanci na enem kupčku, kjer je $n = 7, 8, 9, \ldots$

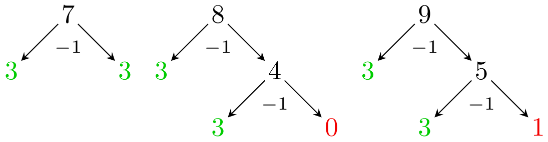
Obravnava majhnih primerov

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 7 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "-1"] & \\ 3 & & 3 \end{tikzcd}$$

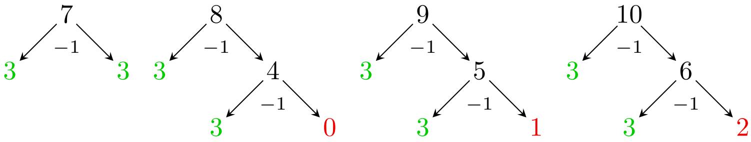
Obravnava majhnih primerov



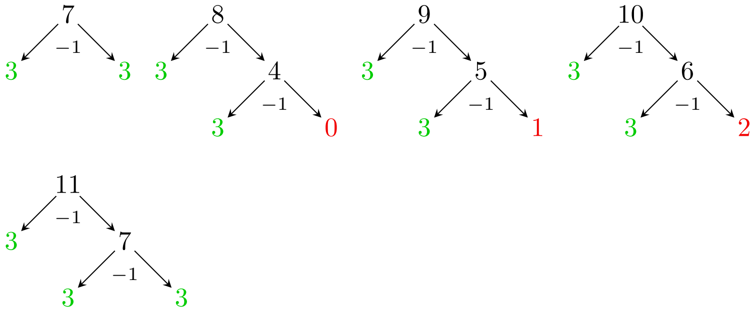
Obravnava majhnih primerov



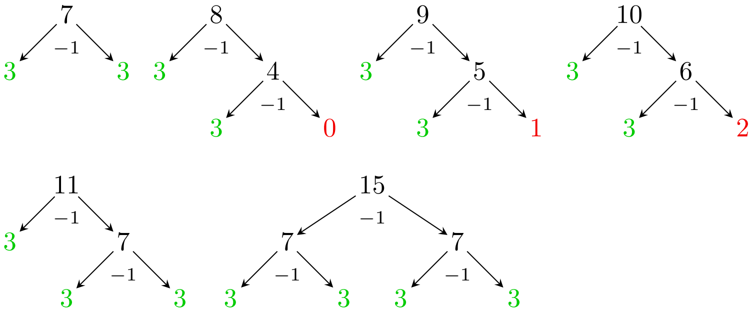
Obravnava majhnih primerov



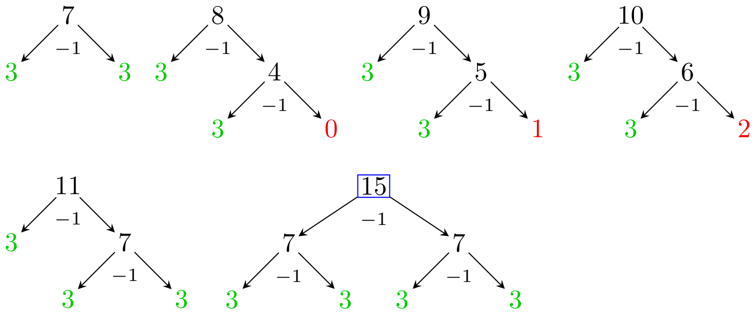
Obravnava majhnih primerov



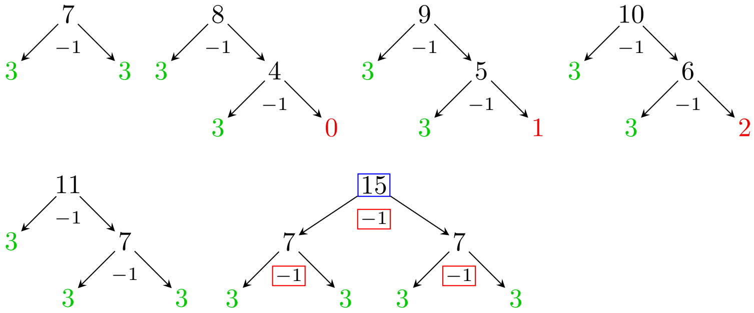
Obravnava majhnih primerov



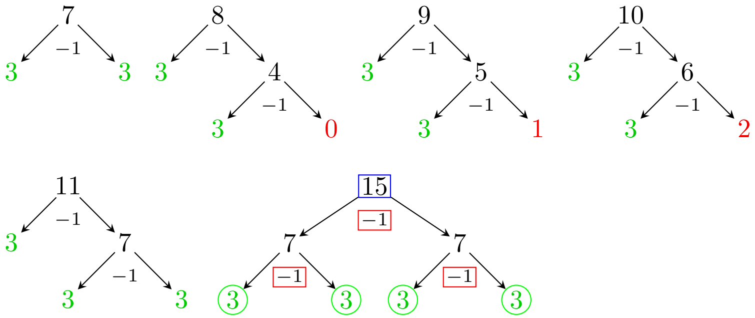
Obravnava majhnih primerov

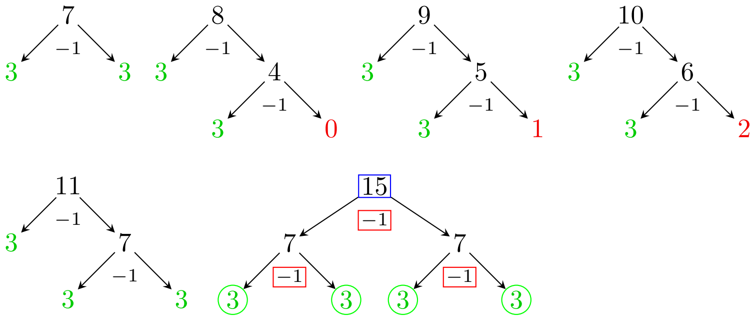


Obravnava majhnih primerov



Obravnava majhnih primerov

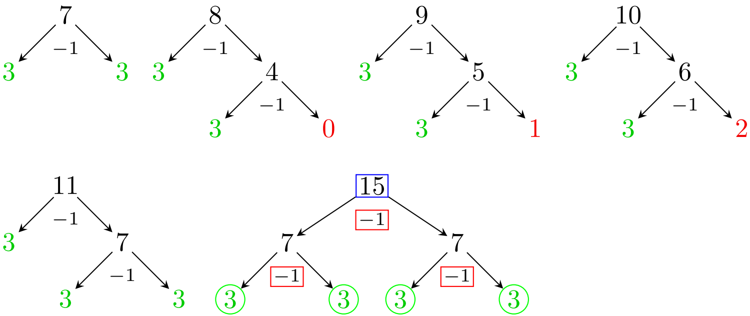




Opazimo:

$$15 = 3 + (3 + 1) \cdot 3$$

Obravnava majhnih primerov



Opazimo:

$$15 = 3 + (3 + 1) \cdot 3$$

$$11 = 2 + (2 + 1) \cdot 3$$

Obravnava majhnih primerov

Po izvedenih k potezah je na mizi $k+1$ kupčkov kovancev.

Obravnava majhnih primerov

Po izvedenih k potezah je na mizi $k+1$ kupčkov kovancev.

$$2000 = k + (k+1) \cdot 3,$$

Obravnava majhnih primerov

Po izvedenih k potezah je na mizi $k+1$ kupčkov kovancev.

$$2000 = k + (k+1) \cdot 3,$$
$$2000 = 4k + 3.$$

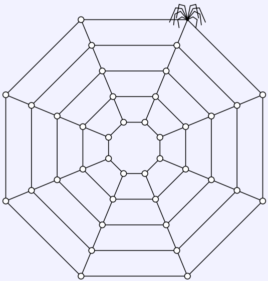
Po izvedenih k potezah je na mizi $k+1$ kupčkov kovancev.

$$2000 = k + (k+1)\cdot 3,$$
$$2000 = 4k + 3.$$

Enačba nima rešitev $k \in \mathbb{N}$, torej če začnemo s kupčkom z 2000 kovanci, na mizi nikoli ne bodo le kupčki s 3 kovanci.

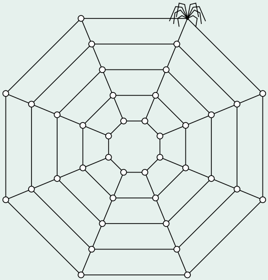
Naloga 2 - Pajek in muhe

Pajkova mreža je sestavljena iz vozlišč in daljic. Pajek stoji v enem od vozlišč na zunanjem robu mreže in čaka, da se v vozlišča mreže ulovijo muhe, v vsako vozlišče natanko ena muha. Nato se bo sprehodil po mreži na zelo poseben način: na svoji poti bo šel mimo 25 vozlišč mreže in pojedel muho na 26. vozlišču (če je še ni), nato bo zopet šel mimo 25 vozlišč mreže in pojedel muho na 26. vozlišču in tako naprej. Koliko je največje število muh, ki jih pajek lahko poje na tak način?



Obravnava majhnih primerov

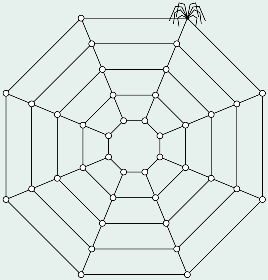
Zmanjšajmo dolžino pajkovega sprehoda, preden poje muho.



Obravnava majhnih primerov

Zmanjšajmo dolžino pajkovega sprehoda, preden poje muho.

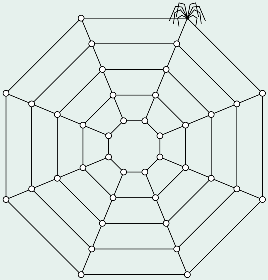
- Če pajek poje muho na vsakem 1. vozlišču sprehoda,



Obravnava majhnih primerov

Zmanjšajmo dolžino pajkovega sprehoda, preden poje muho.

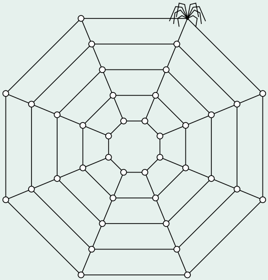
- Če pajek poje muho na vsakem 1. vozlišču sprehoda, potem lahko poje vse muhe.



Obravnava majhnih primerov

Zmanjšajmo dolžino pajkovega sprehoda, preden poje muho.

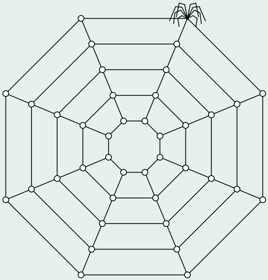
- Če pajek poje muho na vsakem 1. vozlišču sprehoda, potem lahko poje vse muhe.
- Če pajek poje muho na vsakem 2. vozlišču sprehoda,



Obravnava majhnih primerov

Zmanjšajmo dolžino pajkovega sprehoda, preden poje muho.

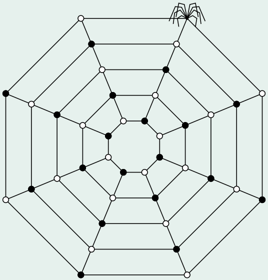
- Če pajek poje muho na vsakem 1. vozlišču sprehoda, potem lahko poje vse muhe.
- Če pajek poje muho na vsakem 2. vozlišču sprehoda, s poskušanjem poiščemo vse muhe, ki jih lahko poje.



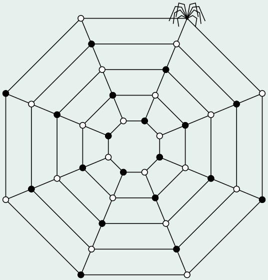
Obravnava majhnih primerov

Zmanjšajmo dolžino pajkovega sprehoda, preden poje muho.

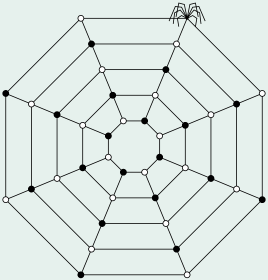
- Če pajek poje muho na vsakem 1. vozlišču sprehoda, potem lahko poje vse muhe.
- Če pajek poje muho na vsakem 2. vozlišču sprehoda, s poskušanjem poiščemo vse muhe, ki jih lahko poje.



Obravnava majhnih preimerov



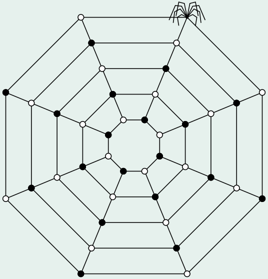
Rešitev naloge:



Rešitev naloge:

(1) Pajek ne more pojesti nobene muhe na belem vozlišču:

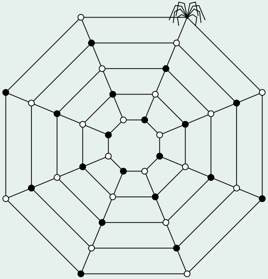
Obravnava majhnih preimerov



Rešitev naloge:

(1) Pajek ne more pojesti nobene muhe na belem vozlišču:
Po sodo mnogo korakih pristane na črnem vozlišču.

Obravnava majhnih preimerov

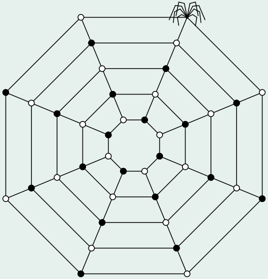


Rešitev naloge:

(1) Pajek ne more pojesti nobene muhe na belem vozlišču:
Po sodo mnogo korakih pristane na črnem vozlišču.

(2) Pajek lahko poje vse muhe na črnih vozliščih:

Obravnava majhnih preimerov

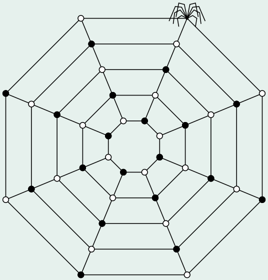


Rešitev naloge:

(1) Pajek ne more pojesti nobene muhe na belem vozlišču:
Po sodo mnogo korakih pristane na črnem vozlišču.

(2) Pajek lahko poje vse muhe na črnih vozliščih:
Po vsake 2 korakih (izmed prvih 24) se vrne na isto vozlišče, nato pa se v 25. in 26. koraku premakne na sosednje črno vozlišče.

Obravnava majhnih preimerov



Rešitev naloge:

(1) Pajek ne more pojesti nobene muhe na belem vozlišču:
Po sodo mnogo korakih pristane na črnem vozlišču.

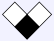
(2) Pajek lahko poje vse muhe na črnih vozliščih:
Po vsake 2 korakih (izmed prvih 24) se vrne na isto vozlišče, nato pa se v 25. in 26. koraku premakne na sosednje črno vozlišče.

Pajek lahko poje največ 19 muh.

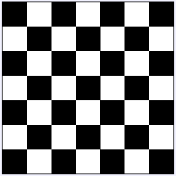
Barvanje

Naloga 3 - Koščki šahovnice

Selena ima list karirastega papirja s 7×7 kvadratki, na katerem so kvadratki pobarvani črno in belo v vzorcu šahovnice, pri čemer so vogalni kvadratki črni. Iz papirja želi izrezati nekaj enakih koščkov, pri čemer bo rezala le po stranicah kvadratkov.

(a) Največ koliko koščkov oblike  bi lahko Selena izrezala iz svojega lista papirja?

(b) Največ koliko koščkov oblike  bi lahko Selena izrezala iz svojega lista papirja?



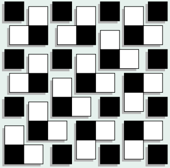
Barvanje

(a) Vsak košček ima 2 bela kvadratka, na listu papirja je 24 belih kvadratkov.

Barvanje

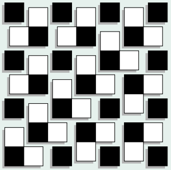
(a) Vsak košček ima 2 bela kvadratka, na listu papirja je 24 belih kvadratkov. Izreže lahko največ $24 : 2 = 12$ koščkov.

(a) Vsak koščSek ima 2 bela kvadratka, na listu papirja je 24 belih kvadratkov. Izreže lahko največ $24 : 2 = 12$ koščkov.

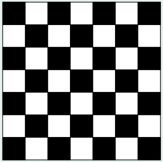


Barvanje

(a) Vsak košček ima 2 bela kvadratka, na listu papirja je 24 belih kvadratkov. Izreže lahko največ $24 : 2 = 12$ koščkov.

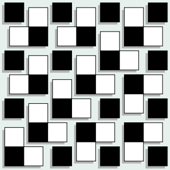


(b) Poiščimo razrez s čim več koščki.

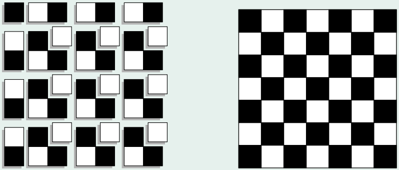


Barvanje

(a) Vsak koščček ima 2 bela kvadratka, na listu papirja je 24 belih kvadratkov. Izreže lahko največ $24 : 2 = 12$ koščkov.

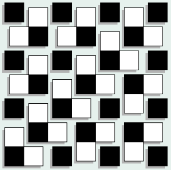


(b) Poiščimo razrez s čim več koščki.

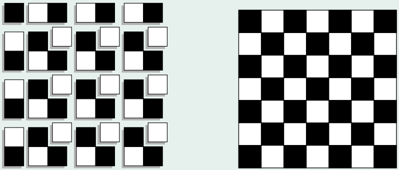


Barvanje

(a) Vsak koščček ima 2 bela kvadratka, na listu papirja je 24 belih kvadratkov. Izreže lahko največ $24 : 2 = 12$ koščkov.

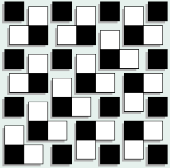


(b) Poiščimo razrez s čim več koščki. Izreže lahko vsaj 9 koščkov.

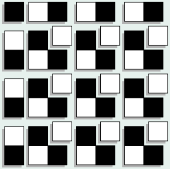


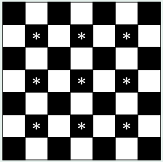
Barvanje

(a) Vsak koščček ima 2 bela kvadratka, na listu papirja je 24 belih kvadratkov. Izreže lahko največ $24 : 2 = 12$ koščkov.



(b) Poiščimo razrez s čim več koščki. Izreže lahko vsaj 9 koščkov.

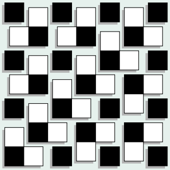




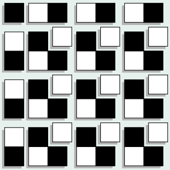
Označimo nekatere črne kvadratke.

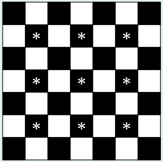
Barvanje

(a) Vsak košček ima 2 bela kvadratka, na listu papirja je 24 belih kvadratkov. Izreže lahko največ $24 : 2 = 12$ koščkov.



(b) Poiščimo razrez s čim več koščki. Izreže lahko vsaj 9 koščkov.

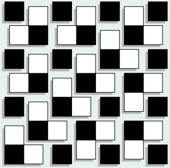




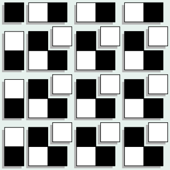
Označimo nekatere črne kvadratke. Vsak izrezan košček vsebuje natanko 1 označen kvadratek.

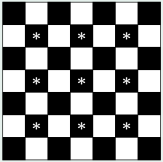
Barvanje

(a) Vsak koščEk ima 2 bela kvadratka, na listu papirja je 24 belih kvadratkov. Izreže lahko največ $24 : 2 = 12$ koščkov.



(b) Poiščimo razrez s čim več koščki. Izreže lahko vsaj 9 koščkov.

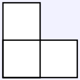




Označimo nekatere črne kvadratke. Vsak izrezan košček vsebuje natanko 1 označen kvadratek. Izreže lahko največ 9 koščkov.

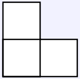
Naloga 4 - Domine L

Določi najmanjše število polj tabele velikosti 8×8, ki jih moramo pobarvati, da bo vsaka domina v obliki črke L, ki jo postavimo na tabelo, pokrila vsaj eno pobarvano polje.



Naloga 4 - Domine L

Določi najmanjše število polj tabele velikosti 8×8, ki jih moramo pobarvati, da bo vsaka domina v obliki črke L, ki jo postavimo na tabelo, pokrila vsaj eno pobarvano polje.

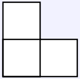


Ideja: Tabelo razdelimo na manjše disjunktne dele, v katerih znamo določiti, najmanjše število polj, ki jih moramo pobarvati.

Delitev na disjunktne dele

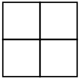
Naloga 4 - Domine L

Določi najmanjše število polj tabele velikosti 8×8, ki jih moramo pobarvati, da bo vsaka domina v obliki črke L, ki jo postavimo na tabelo, pokrila vsaj eno pobarvano polje.



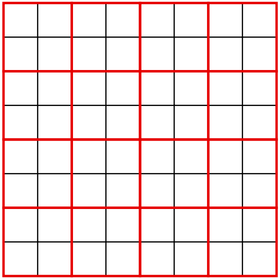
Ideja: Tabelo razdelimo na manjše disjunktne dele, v katerih znamo določiti, najmanjše število polj, ki jih moramo pobarvati.

Najmanj koliko polj moramo pobarvati v kvadratu velikosti 2×2?



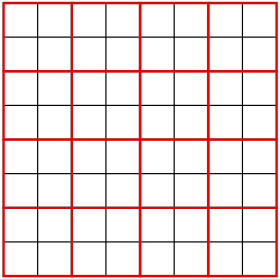
Delitev na disjunktne dele

Tabelo razdelimo na 16 disjunktnih kvadratov velikosti 2×2.



Delitev na disjunktne dele

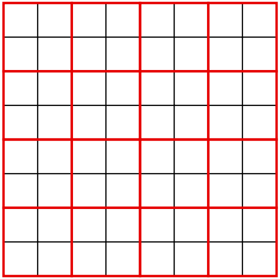
Tabelo razdelimo na 16 disjunktnih kvadratov velikosti 2×2.



V vsakem kvadratu velikosti 2×2 moramo pobarvati vsaj 2 polji.

Delitev na disjunktne dele

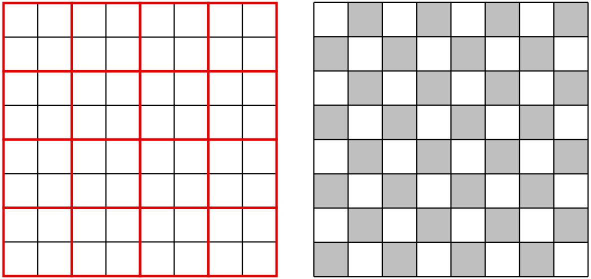
Tabelo razdelimo na 16 disjunktnih kvadratov velikosti 2×2.



V vsakem kvadratu velikosti 2×2 moramo pobarvati vsaj 2 polji. Skupaj moramo pobarvati vsaj $16 \cdot 2 = 32$ polj.

Delitev na disjunktne dele

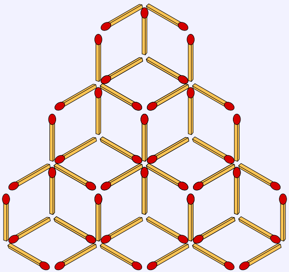
Tabelo razdelimo na 16 disjunktnih kvadratov velikosti 2×2.



V vsakem kvadratu velikosti 2×2 moramo pobarvati vsaj 2 polji. Skupaj moramo pobarvati vsaj $16 \cdot 2 = 32$ polj. Barvanje v obliki šahovnice pokaže, da zadostuje pobarvati 32 polj.

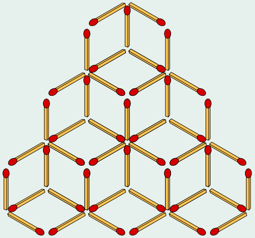
Naloga 5 - Vžigalice

Iz 45 vžigalic sestavimo mrežo, kot to prikazuje slika. Najmanj koliko vžigalic moramo odstraniti, da preostale vžigalice ne bodo tvorile nobenega pravilnega šestkotnika?



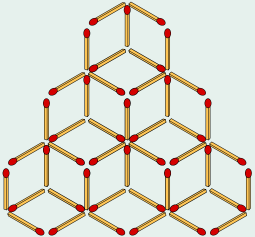
Delitev na disjunktne dele

Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike:



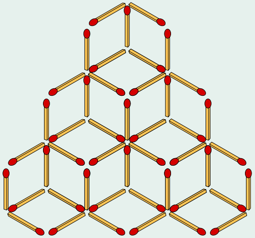
Delitev na disjunktne dele

Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6 + 3 + 1$



Delitev na disjunktne dele

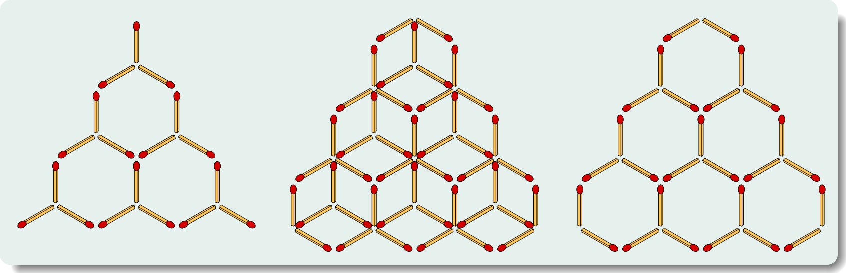
Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6 + 3 + 1$



Konfiguracijo vžigalic razdelimo na 2 disjunktna dela.

Delitev na disjunktne dele

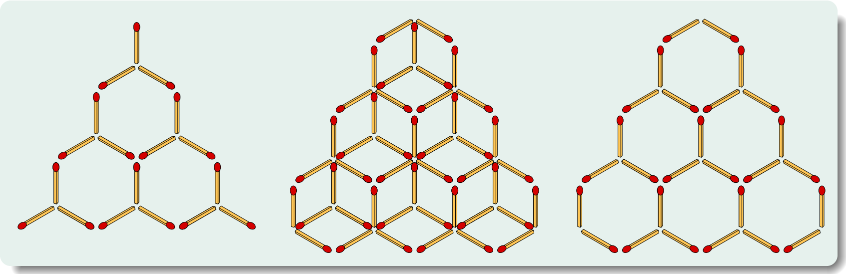
Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6 + 3 + 1$



Konfiguracijo vžigalic razdelimo na 2 disjunktna dela.

Delitev na disjunktne dele

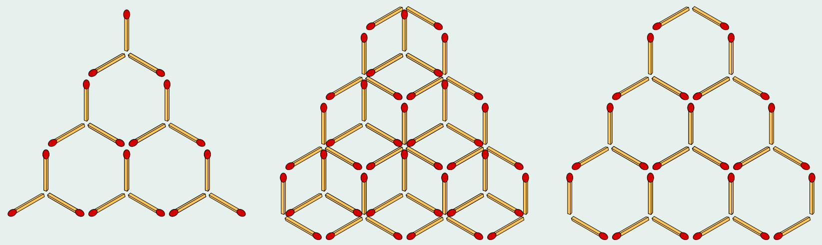
Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6 + 3 + 1$



Konfiguracijo vžigalic razdelimo na 2 disjunktna dela.
POZOR! Ne smemo pozabiti na velik šestkotnik.

Delitev na disjunktne dele

Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6 + 3 + 1$

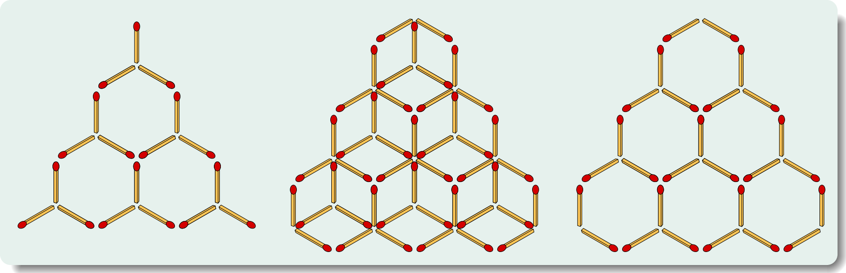


Konfiguracijo vžigalic razdelimo na 2 disjunktna dela.
POZOR! Ne smemo pozabiti na velik šestkotnik.

- Z levega dela moramo odstraniti vsaj 2 vžigalici.

Delitev na disjunktne dele

Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6 + 3 + 1$

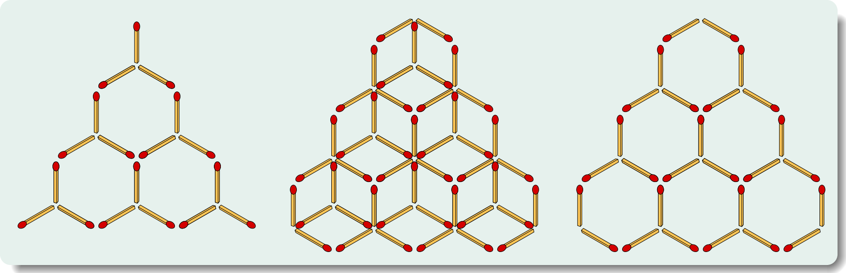


Konfiguracijo vžigalic razdelimo na 2 disjunktna dela.
POZOR! Ne smemo pozabiti na velik šestkotnik.

- Z levega dela moramo odstraniti vsaj 2 vžigalici.
- Z desnega dela moramo odstraniti vsaj 3 vžigalice.

Delitev na disjunktne dele

Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6 + 3 + 1$

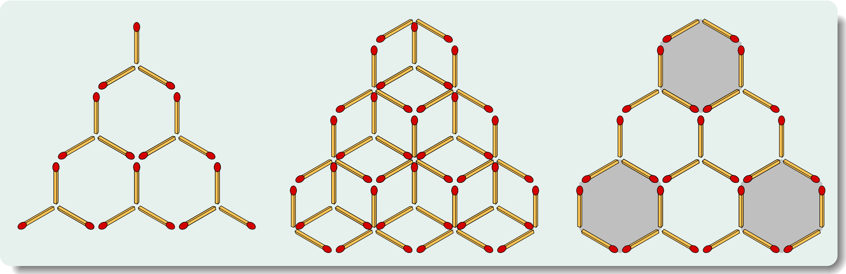


Konfiguracijo vžigalic razdelimo na 2 disjunktna dela.
POZOR! Ne smemo pozabiti na velik šestkotnik.

- Z levega dela moramo odstraniti vsaj 2 vžigalici.
- Z desnega dela moramo odstraniti vsaj 3 vžigalice. (delitev na disjunktne dele)

Delitev na disjunktne dele

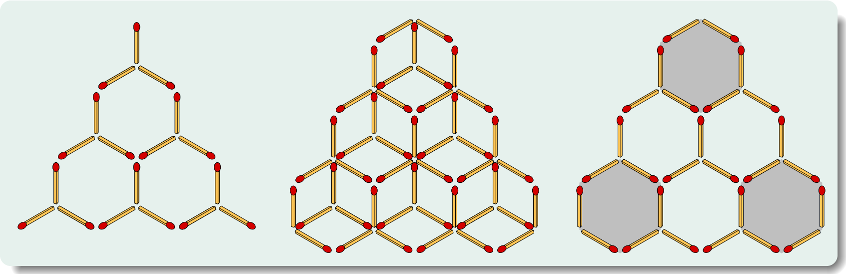
Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6+3+1$



Konfiguracijo vžigalic razdelimo na 2 disjunktna dela.
POZOR! Ne smemo pozabiti na velik šestkotnik.

- Z levega dela moramo odstraniti vsaj 2 vžigalici.
- Z desnega dela moramo odstraniti vsaj 3 vžigalice. (delitev na disjunktne dele)

Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6+3+1$



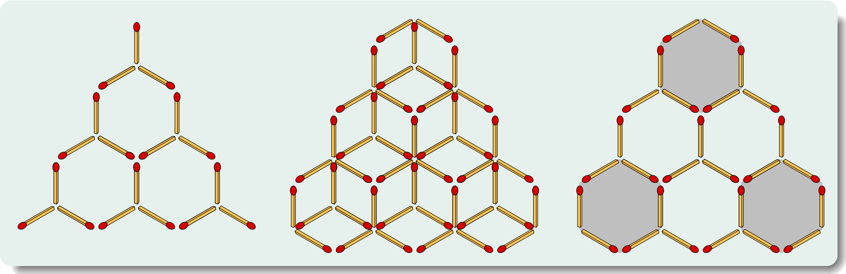
Konfiguracijo vžigalic razdelimo na 2 disjunktna dela.
POZOR! Ne smemo pozabiti na velik šestkotnik.

- Z levega dela moramo odstraniti vsaj 2 vžigalici.
- Z desnega dela moramo odstraniti vsaj 3 vžigalice. (delitev na disjunktne dele)

Odstraniti moramo vsaj 5 vžigalic.

Delitev na disjunktne dele

Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6 + 3 + 1$



Konfiguracijo vžigalic razdelimo na 2 disjunktna dela.
POZOR! Ne smemo pozabiti na velik šestkotnik.

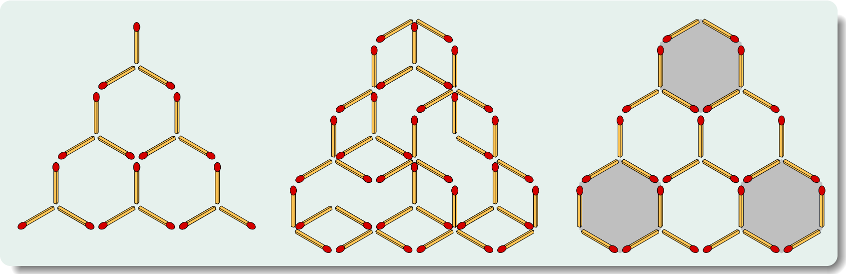
- Z levega dela moramo odstraniti vsaj 2 vžigalici.
- Z desnega dela moramo odstraniti vsaj 3 vžigalice. (delitev na disjunktne dele)

Odstraniti moramo vsaj 5 vžigalic.

Ali lahko to storimo tako, da uničimo tudi velik šestkotnik?

Delitev na disjunktne dele

Najprej poiščemo vse pravilne šestkotnike: $6 + 3 + 1$



Konfiguracijo vžigalic razdelimo na 2 disjunktna dela.
POZOR! Ne smemo pozabiti na velik šestkotnik.

- Z levega dela moramo odstraniti vsaj 2 vžigalici.
- Z desnega dela moramo odstraniti vsaj 3 vžigalice. (delitev na disjunktne dele)

Odstraniti moramo vsaj 5 vžigalic.

Ali lahko to storimo tako, da uničimo tudi velik šestkotnik? Da.

Simetrično stanje

Simetrično stanje

Denimo, da 2 igralca igrata igro, v kateri poteze izvajata izmenično.

Simetrično stanje

Denimo, da 2 igralca igrata igro, v kateri poteze izvajata izmenično.

Iščemo množici stanj S in $N \subseteq S^C$, za kateri velja naslednje:

Simetrično stanje

Denimo, da 2 igralca igrata igro, v kateri poteze izvajata izmenično.

Iščemo množici stanj S in $N \subseteq S^C$, za kateri velja naslednje:

- če je igra v stanju iz S, potem jo katerakoli dovoljena poteza postavi v stanje iz N,

Simetrično stanje

Denimo, da 2 igralca igrata igro, v kateri poteze izvajata izmenično.

Iščemo množici stanj S in $N \subseteq S^C$, za kateri velja naslednje:

- če je igra v stanju iz S, potem jo katerakoli dovoljena poteza postavi v stanje iz N,
- če je igra v stanju iz N, potem lahko z eno potezo igro postavimo nazaj v stanje iz S.

Simetrično stanje

Denimo, da 2 igralca igrata igro, v kateri poteze izvajata izmenično.

Iščemo množici stanj S in $N \subseteq S^C$, za kateri velja naslednje:

- če je igra v stanju iz S, potem jo katerakoli dovoljena poteza postavi v stanje iz N,
- če je igra v stanju iz N, potem lahko z eno potezo igro postavimo nazaj v stanje iz S.

Množica S je zelo pogosto množica simetričnih stanj.

Naloga 6 - Rezanje papirja

Kaja in Matej igrata igro s kosom karirastega papirja velikosti $m \times n$, v kateri izmenično izvajata poteze. V vsaki potezi igralec, ki drži kos papirja, ta kos prereže na dva dela po eni izmed črt, vodoravni ali navpični. Nato enega izmed dveh nastalih kosov papirja uniči, drugega pa preda soigralcu, da se igra nadaljuje. Kdor dobi v roke kos papirja velikosti 1×1, izgubi igro. V odvisnosti od m in n določi, kdo ima zmagovito strategijo, če na začetku igre papir v rokah drži Kaja.

Simetrično stanje

Naloga 6 - Rezanje papirja

Kaja in Matej igrata igro s kosom karirastega papirja velikosti $m \times n$, v kateri izmenično izvajata poteze. V vsaki potezi igralec, ki drži kos papirja, ta kos prereže na dva dela po eni izmed črt, vodoravni ali navpični. Nato enega izmed dveh nastalih kosov papirja uniči, drugega pa preda soigralcu, da se igra nadaljuje. Kdor dobi v roke kos papirja velikosti 1×1, izgubi igro. V odvisnosti od m in n določi, kdo ima zmagovito strategijo, če na začetku igre papir v rokah drži Kaja.

Ideja: Vprašamo se, ali v igri lahko opredelimo simetrična stanja.

Simetrično stanje

simetrično stanje = preostali kos papirja je kvadraten

Simetrično stanje

simetrično stanje = preostali kos papirja je kvadraten

- vsaka poteza kvadraten kos papirja spremeni v nekvadraten kos papirja,

Simetrično stanje

simetrično stanje = preostali kos papirja je kvadraten

- vsaka poteza kvadraten kos papirja spremeni v nekvadraten kos papirja,
- vsak nekvadraten kos papirja lahko z eno potezo spremenimo nazaj v kvadraten kos papirja

Simetrično stanje

simetrično stanje = preostali kos papirja je kvadraten

- vsaka poteza kvadraten kos papirja spremeni v nekvadraten kos papirja,
- vsak nekvadraten kos papirja lahko z eno potezo spremenimo nazaj v kvadraten kos papirja

Zmagovito stanje (1×1 list) je simetrično,

Simetrično stanje

simetrično stanje = preostali kos papirja je kvadraten

- vsaka poteza kvadraten kos papirja spremeni v nekvadraten kos papirja,
- vsak nekvadraten kos papirja lahko z eno potezo spremenimo nazaj v kvadraten kos papirja

Zmagovito stanje (1×1 list) je simetrično, zato ima zmagovito strategijo igralec, ki lahko igro vzdržuje v simetričnem stanju:

Simetrično stanje

simetrično stanje = preostali kos papirja je kvadraten

- vsaka poteza kvadraten kos papirja spremeni v nekvadraten kos papirja,
- vsak nekvadraten kos papirja lahko z eno potezo spremenimo nazaj v kvadraten kos papirja

Zmagovito stanje (1×1 list) je simetrično, zato ima zmagovito strategijo igralec, ki lahko igro vzdržuje v simetričnem stanju:

- če je $m = n$,

Simetrično stanje

simetrično stanje = preostali kos papirja je kvadraten

- vsaka poteza kvadraten kos papirja spremeni v nekvadraten kos papirja,
- vsak nekvadraten kos papirja lahko z eno potezo spremenimo nazaj v kvadraten kos papirja

Zmagovito stanje (1×1 list) je simetrično, zato ima zmagovito strategijo igralec, ki lahko igro vzdržuje v simetričnem stanju:

- če je $m = n$, ima zmagovito strategijo drugi igralec (Matej),

Simetrično stanje

simetrično stanje = preostali kos papirja je kvadraten

- vsaka poteza kvadraten kos papirja spremeni v nekvadraten kos papirja,
- vsak nekvadraten kos papirja lahko z eno potezo spremenimo nazaj v kvadraten kos papirja

Zmagovito stanje (1×1 list) je simetrično, zato ima zmagovito strategijo igralec, ki lahko igro vzdržuje v simetričnem stanju:

- če je $m = n$, ima zmagovito strategijo drugi igralec (Matej),
- če pa je $m \neq n$,

Simetrično stanje

simetrično stanje $=$ preostali kos papirja je kvadraten

- vsaka poteza kvadraten kos papirja spremeni v nekvadraten kos papirja,
- vsak nekvadraten kos papirja lahko z eno potezo spremenimo nazaj v kvadraten kos papirja

Zmagovito stanje (1×1 list) je simetrično, zato ima zmagovito strategijo igralec, ki lahko igro vzdržuje v simetričnem stanju:

- če je $m = n$, ima zmagovito strategijo drugi igralec (Matej),
- če pa je $m \neq n$, ima zmagovito strategijo prvi igralec (Kaja).

Naloga 7 - Igra s kamni

Dva igralca igrata igro s kamni. Na začetku je dan kup kamnov z vsaj 2 kamnoma. Igralec na potezi izbere enega od kupov kamnov in ga razdeli na 2 ali 3 nove kupe, od katerih ima vsak kup vsaj 1 kamen. Igralec, ki ne more razdeliti kupa, izgubi igro. Kateri igralec bo zmagal, če oba igrata pametno?

Naloga 7 - Igra s kamni

Dva igralca igrata igro s kamni. Na začetku je dan kup kamnov z vsaj 2 kamnoma. Igralec na potezi izbere enega od kupov kamnov in ga razdeli na 2 ali 3 nove kupe, od katerih ima vsak kup vsaj 1 kamen. Igralec, ki ne more razdeliti kupa, izgubi igro. Kateri igralec bo zmagal, če oba igrata pametno?

Namig 1: kupi, na katerih je 1 kamen, niso pomembni (lahko jih odstranimo iz igre)

Simetrično stanje

Naloga 7 - Igra s kamni

Dva igralca igrata igro s kamni. Na začetku je dan kup kamnov z vsaj 2 kamnoma. Igralec na potezi izbere enega od kupov kamnov in ga razdeli na 2 ali 3 nove kupe, od katerih ima vsak kup vsaj 1 kamen. Igralec, ki ne more razdeliti kupa, izgubi igro. Kateri igralec bo zmagal, če oba igrata pametno?

Namig 1: kupi, na katerih je 1 kamen, niso pomembni (lahko jih odstranimo iz igre)
Namig 2: sodost/lihost

Simetrično stanje

Naloga 7 - Igra s kamni

Dva igralca igrata igro s kamni. Na začetku je dan kup kamnov z vsaj 2 kamnoma. Igralec na potezi izbere enega od kupov kamnov in ga razdeli na 2 ali 3 nove kupe, od katerih ima vsak kup vsaj 1 kamen. Igralec, ki ne more razdeliti kupa, izgubi igro. Kateri igralec bo zmagal, če oba igrata pametno?

Namig 1: kupi, na katerih je 1 kamen, niso pomembni (lahko jih odstranimo iz igre)
Namig 2: sodost/lihost

simetrično stanje = kupi z več kot 1 kamnom nastopajo v parih z enakim številom kamnov

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov.

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov. Prvi igralec lahko v prvi potezi igro spravi v simetrično stanje:

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov. Prvi igralec lahko v prvi potezi igro spravi v simetrično stanje:

- če je n sod,

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov. Prvi igralec lahko v prvi potezi igro spravi v simetrično stanje:

- če je n sod, razdeli kup na 2 kupa z $\frac{n}{2}$ in $\frac{n}{2}$ kamni,

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov. Prvi igralec lahko v prvi potezi igro spravi v simetrično stanje:

- če je n sod, razdeli kup na 2 kupa z $\frac{n}{2}$ in $\frac{n}{2}$ kamni,
- če je n lih,

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov. Prvi igralec lahko v prvi potezi igro spravi v simetrično stanje:

- če je n sod, razdeli kup na 2 kupa z $\frac{n}{2}$ in $\frac{n}{2}$ kamni,
- če je n lih, razdeli kup na 3 kupe z 1, $\frac{n-1}{2}$ in $\frac{n-1}{2}$ kamni.

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov. Prvi igralec lahko v prvi potezi igro spravi v simetrično stanje:

- če je n sod, razdeli kup na 2 kupa z $\frac{n}{2}$ in $\frac{n}{2}$ kamni,
- če je n lih, razdeli kup na 3 kupe z 1, $\frac{n-1}{2}$ in $\frac{n-1}{2}$ kamni.

Če drugi igralec v svoji potezi razdeli kup A,

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov. Prvi igralec lahko v prvi potezi igro spravi v simetrično stanje:

- če je n sod, razdeli kup na 2 kupa z $\frac{n}{2}$ in $\frac{n}{2}$ kamni,
- če je n lih, razdeli kup na 3 kupe z 1, $\frac{n-1}{2}$ in $\frac{n-1}{2}$ kamni.

Če drugi igralec v svoji potezi razdeli kup A, potem prvi igralec v naslednji potezi na enak način razdeli kup B, ki je v paru s kupom A.

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov. Prvi igralec lahko v prvi potezi igro spravi v simetrično stanje:

- če je n sod, razdeli kup na 2 kupa z $\frac{n}{2}$ in $\frac{n}{2}$ kamni,
- če je n lih, razdeli kup na 3 kupe z 1, $\frac{n-1}{2}$ in $\frac{n-1}{2}$ kamni.

Če drugi igralec v svoji potezi razdeli kup A, potem prvi igralec v naslednji potezi na enak način razdeli kup B, ki je v paru s kupom A.

Po vsaki potezi prvega igralca je igra v simetričnem stanju, po potezi drugega pa v nesimetričnem stanju.

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov. Prvi igralec lahko v prvi potezi igro spravi v simetrično stanje:

- če je n sod, razdeli kup na 2 kupa z $\frac{n}{2}$ in $\frac{n}{2}$ kamni,
- če je n lih, razdeli kup na 3 kupe z 1, $\frac{n-1}{2}$ in $\frac{n-1}{2}$ kamni.

Če drugi igralec v svoji potezi razdeli kup A, potem prvi igralec v naslednji potezi na enak način razdeli kup B, ki je v paru s kupom A.

Po vsaki potezi prvega igralca je igra v simetričnem stanju, po potezi drugega pa v nesimetričnem stanju.

Po zmagoviti potezi je stanje simetrično (le kupi z 1 kamnom),

Simetrično stanje

Naj bo v začetnem kupu $n \geq 2$ kamnov. Prvi igralec lahko v prvi potezi igro spravi v simetrično stanje:

- če je n sod, razdeli kup na 2 kupa z $\frac{n}{2}$ in $\frac{n}{2}$ kamni,
- če je n lih, razdeli kup na 3 kupe z 1, $\frac{n-1}{2}$ in $\frac{n-1}{2}$ kamni.

Če drugi igralec v svoji potezi razdeli kup A, potem prvi igralec v naslednji potezi na enak način razdeli kup B, ki je v paru s kupom A.

Po vsaki potezi prvega igralca je igra v simetričnem stanju, po potezi drugega pa v nesimetričnem stanju.

Po zmagoviti potezi je stanje simetrično (le kupi z 1 kamnom), zato je to potezo izvedel prvi igralec.

Predstavitev z grafom

Graf je matematičen objekt, sestavljen iz množice vozlišč V in množice povezav E med njimi. Povezave so lahko usmerjene ali ne.

Predstavitev z grafom

Graf je matematičen objekt, sestavljen iz množice vozlišč V in množice povezav E med njimi. Povezave so lahko usmerjene ali ne.

Grafe tipično uporabljamo pri nalogah s poznanstvi, rokovanji, klici, predori, cestami,. . .

Predstavitev z grafom

Graf je matematičen objekt, sestavljen iz množice vozlišč V in množice povezav E med njimi. Povezave so lahko usmerjene ali ne.

Grafe tipično uporabljamo pri nalogah s poznanstvi, rokovanji, klici, predori, cestami,...

Kaj nam grafi omogočajo?

Predstavitev z grafom

Graf je matematičen objekt, sestavljen iz množice vozlišč V in množice povezav E med njimi. Povezave so lahko usmerjene ali ne.

Grafe tipično uporabljamo pri nalogah s poznanstvi, rokovanji, klici, predori, cestami,...

Kaj nam grafi omogočajo?

- vizualizacijo naloge,

Predstavitev z grafom

Graf je matematičen objekt, sestavljen iz množice vozlišč V in množice povezav E med njimi. Povezave so lahko usmerjene ali ne.

Grafe tipično uporabljamo pri nalogah s poznanstvi, rokovanji, klici, predori, cestami,. . .

Kaj nam grafi omogočajo?

- vizualizacijo naloge,
- enostavnejše iskanje primerov in protiprimerov,

Predstavitev z grafom

Graf je matematičen objekt, sestavljen iz množice vozlišč V in množice povezav E med njimi. Povezave so lahko usmerjene ali ne.

Grafe tipično uporabljamo pri nalogah s poznanstvi, rokovanji, klici, predori, cestami,. . .

Kaj nam grafi omogočajo?

- vizualizacijo naloge,
- enostavnejše iskanje primerov in protiprimerov,
- uporabo standardnih konceptov: pot, cikel, stopnja točke,. . .

Predstavitev z grafom

Graf je matematičen objekt, sestavljen iz množice vozlišč V in množice povezav E med njimi. Povezave so lahko usmerjene ali ne.

Grafe tipično uporabljamo pri nalogah s poznanstvi, rokovanji, klici, predori, cestami,. . .

Kaj nam grafi omogočajo?

- vizualizacijo naloge,
- enostavnejše iskanje primerov in protiprimerov,
- uporabo standardnih konceptov: pot, cikel, stopnja točke,. . .
- enostavnejše argumentiranje.

Naloga 8 - Klepetulje

Vaške klepetulje si po telefonu izmenjujejo vaške govorice, tako da vsaki dve klepetulji vsak dan med sabo govorita natanko enkrat. Nekega dne je vsaka klepetulja poklicala vsaj eno drugo klepetuljo. Dokaži, da obstajajo tri klepetulje, od katerih je prva klepetulja poklicala drugo, druga tretjo in tretja prvo.

Naloga 8 - Klepetulje

Vaške klepetulje si po telefonu izmenjujejo vaške govorice, tako da vsaki dve klepetulji vsak dan med sabo govorita natanko enkrat. Nekega dne je vsaka klepetulja poklicala vsaj eno drugo klepetuljo. Dokaži, da obstajajo tri klepetulje, od katerih je prva klepetulja poklicala drugo, druga tretjo in tretja prvo.

Ideja: Klepetulje predstavimo s točkami, klice pa s povezavami.

Predstavitev z grafom

Podatki:

- vsaki 2 točki sta povezani z natanko 1 povezavo,
- povezave so usmerjene,
- iz vsake točke gre vsaj ena povezava.

Predstavitev z grafom

Podatki:

- vsaki 2 točki sta povezani z natanko 1 povezavo,
- povezave so usmerjene,
- iz vsake točke gre vsaj ena povezava.

Iščemo usmerjen cikel dolžine 3.

Predstavitev z grafom

Podatki:

- vsaki 2 točki sta povezani z natanko 1 povezavo,
- povezave so usmerjene,
- iz vsake točke gre vsaj ena povezava.

Iščemo usmerjen cikel dolžine 3.

Poskusimo narisati protiprimer.

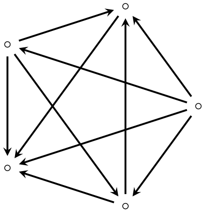
Predstavitev z grafom

Podatki:

- vsaki 2 točki sta povezani z natanko 1 povezavo,
- povezave so usmerjene,
- iz vsake točke gre vsaj ena povezava.

Iščemo usmerjen cikel dolžine 3.

Poskusimo narisati protiprimer.



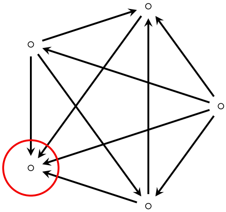
Predstavitev z grafom

Podatki:

- vsaki 2 točki sta povezani z natanko 1 povezavo,
- povezave so usmerjene,
- iz vsake točke gre vsaj ena povezava.

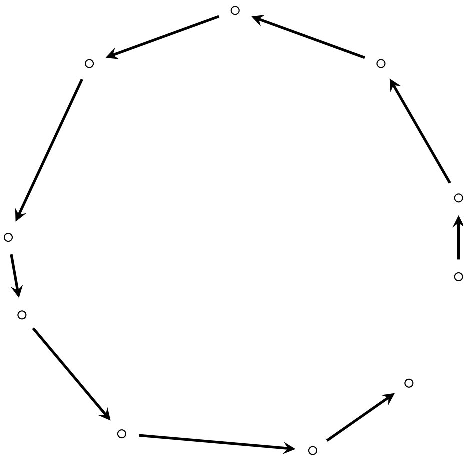
Iščemo usmerjen cikel dolžine 3.

Poskusimo narisati protiprimer.

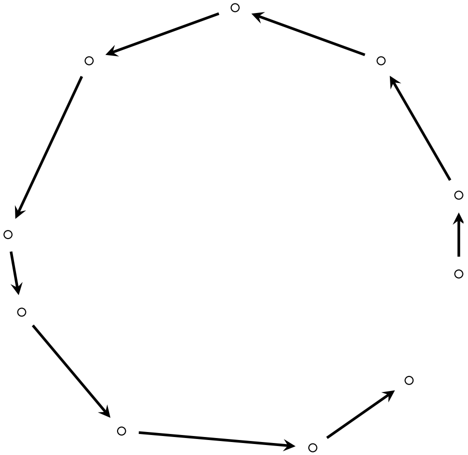


Predstavitev z grafom

Predstavitev z grafom

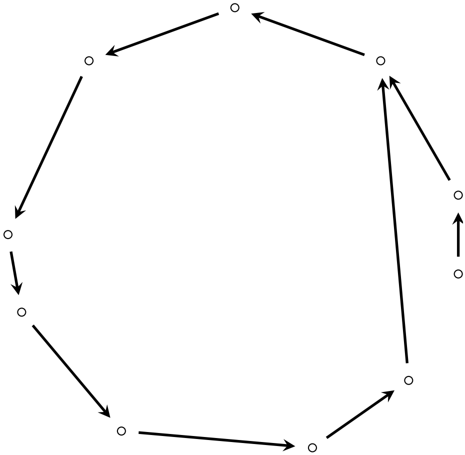


Predstavitev z grafom



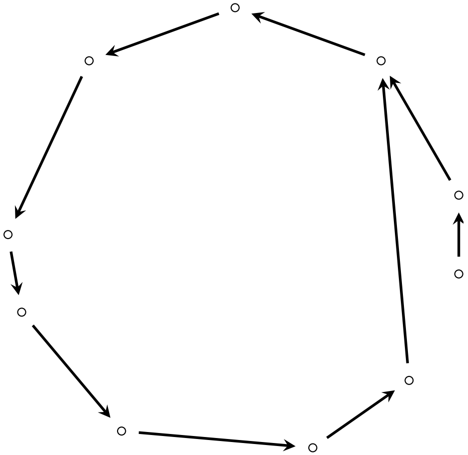
Obstaja usmerjena pot poljubne dolžine.

Predstavitev z grafom



Obstaja usmerjena pot poljubne dolžine.

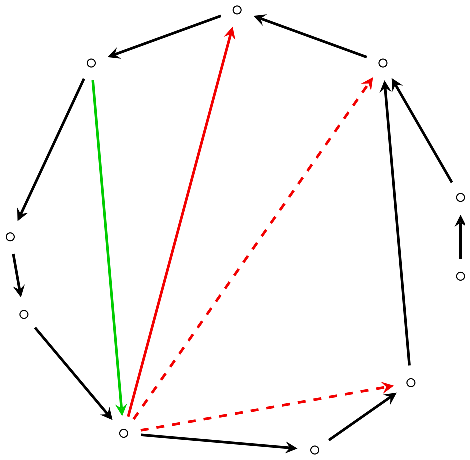
Predstavitev z grafom



Obstaja usmerjena pot poljubne dolžine.

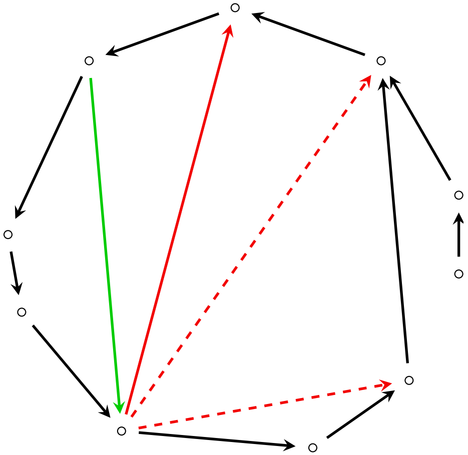
Obstaja usmerjen cikel dolžine vsaj 3.

Predstavitev z grafom



Obstaja usmerjena pot poljubne dolžine.

Obstaja usmerjen cikel dolžine vsaj 3.



Obstaja usmerjena pot poljubne dolžine.

Obstaja usmerjen cikel dolžine vsaj 3.

Obstaja usmerjen cikel dolžine 3.

Preštevanje in Dirichletov princip

Zakaj preštevamo?

Zakaj preštevamo?

- da omejimo število možnosti,

Preštevanje in Dirichletov princip

Zakaj preštevamo?

- da omejimo število možnosti,
- da najdemo vsaj en element posebne oblike (Dirichletov princip),

Preštevanje in Dirichletov princip

Zakaj preštevamo?

- da omejimo število možnosti,
- da najdemo vsaj en element posebne oblike (Dirichletov princip),
- da dokažemo, da neka situacija ni mogoča.

Zakaj preštevamo?

- da omejimo število možnosti,
- da najdemo vsaj en element posebne oblike (Dirichletov princip),
- da dokažemo, da neka situacija ni mogoča.

Preštevanje pogosto kombiniramo z barvanjem ali z deljenjem na disjunktne dele.

Preštevanje in Dirichletov princip

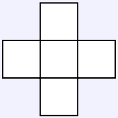
Zakaj preštevamo?

- da omejimo število možnosti,
- da najdemo vsaj en element posebne oblike (Dirichletov princip),
- da dokažemo, da neka situacija ni mogoča.

Preštevanje pogosto kombiniramo z barvanjem ali z deljenjem na disjunktne dele.

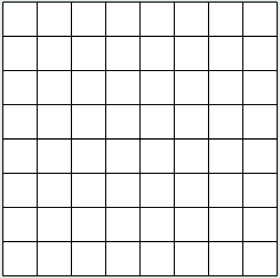
Naloga 9 - Domine +

Dana je tabela velikosti 8×8, na katero želimo postaviti domine v obliki znaka $+$, tako da se nobeni dve domini ne bosta prekrivali in nobena domina ne bo segala čez rob tabele. Največ koliko domin lahko postavimo na tabelo?

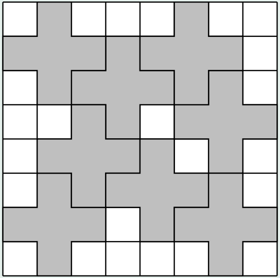


Preštevanje in Dirichletov princip

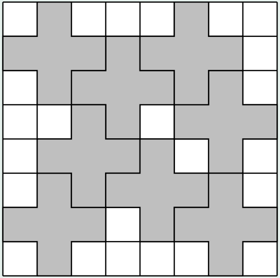
Koliko domin znamo postaviti na tabelo?



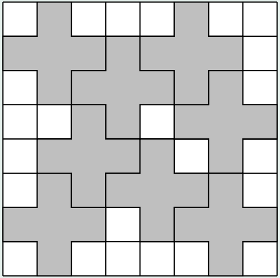
Koliko domin znamo postaviti na tabelo?



Koliko domin znamo postaviti na tabelo? Vsaj 8.

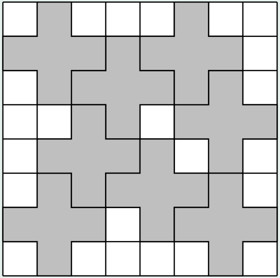


Koliko domin znamo postaviti na tabelo? Vsaj 8.



Ideja: Štejmo!

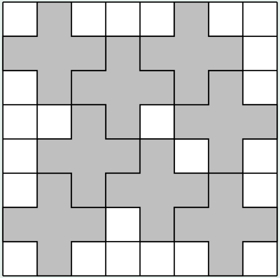
Koliko domin znamo postaviti na tabelo? Vsaj 8.



Ideja: Štejmo!

- 64 polj, ena domina jih pokrije 5

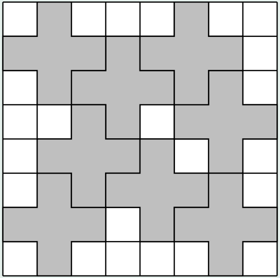
Koliko domin znamo postaviti na tabelo? Vsaj 8.



Ideja: Štejmo!

- 64 polj, ena domina jih pokrije 5 $\Longrightarrow$ največ $64 : 5 = 12$ domin

Koliko domin znamo postaviti na tabelo? Vsaj 8.

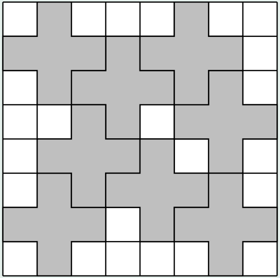


Ideja: Štejmo!

- 64 polj, ena domina jih pokrije 5 $\Longrightarrow$ največ $64 : 5 = 12$ domin
- 28 robnih polj, pokrijemo jih največ 8

Preštevanje in Dirichletov princip

Koliko domin znamo postaviti na tabelo? Vsaj 8.

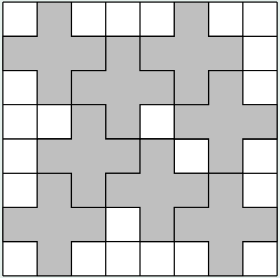


Ideja: Štejmo!

- 64 polj, ena domina jih pokrije 5 $\Longrightarrow$ največ $64 : 5 = 12$ domin
- 28 robnih polj, pokrijemo jih največ 8 $\Longrightarrow$ vsaj 20 nepokritih polj

Preštevanje in Dirichletov princip

Koliko domin znamo postaviti na tabelo? Vsaj 8.

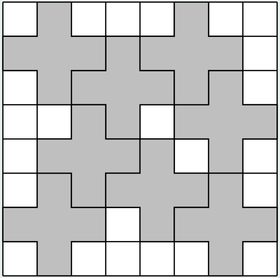


Ideja: Štejmo!

- 64 polj, ena domina jih pokrije 5 $\Longrightarrow$ največ $64 : 5 = 12$ domin
- 28 robnih polj, pokrijemo jih največ 8 $\Longrightarrow$ vsaj 20 nepokritih polj
- največ $64 - 20 = 44$ pokritih polj

Preštevanje in Dirichletov princip

Koliko domin znamo postaviti na tabelo? Vsaj 8.



Ideja: Štejmo!

- 64 polj, ena domina jih pokrije 5 $\Longrightarrow$ največ $64 : 5 = 12$ domin
- 28 robnih polj, pokrijemo jih največ 8 $\Longrightarrow$ vsaj 20 nepokritih polj
- največ $64 - 20 = 44$ pokritih polj $\Longrightarrow$ največ $44 : 5 = 8$ domin

Naloga 10 - Škrati in zaklad

V grajski zakladnici je 7 škratov skrilo svoj zaklad. Zaklad je za 10 vrati in vsaka vrata so zaklenjena s 3 ključavnicami. Vsaki dve ključavnici sta različni. Vsak škrat ima ključe za nekatere ključavnice. Vsaki 4 škrati lahko skupaj odklenejo vseh 10 vrat zakladnice. Dokaži, da obstajajo 3 škrati, ki lahko skupaj odklenejo vseh 10 vrat zakladnice.

Naloga 10 - Škrati in zaklad

V grajski zakladnici je 7 škratov skrilo svoj zaklad. Zaklad je za 10 vrati in vsaka vrata so zaklenjena s 3 ključavnicami. Vsaki dve ključavnici sta različni. Vsak škrat ima ključe za nekatere ključavnice. Vsaki 4 škrati lahko skupaj odklenejo vseh 10 vrat zakladnice. Dokaži, da obstajajo 3 škrati, ki lahko skupaj odklenejo vseh 10 vrat zakladnice.

Dirichletov princip

Če m elementov razdelimo v n množic, kjer je $m > kn$, bo vsaj ena množica imela vsaj $k + 1$ elementov.

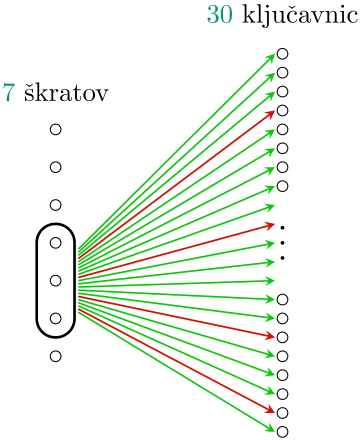
7 škratov

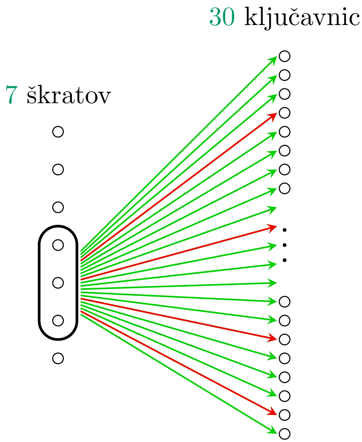
- ○
- ○
- ○
- ○
- ○
- ○
- ○

30 ključavnic

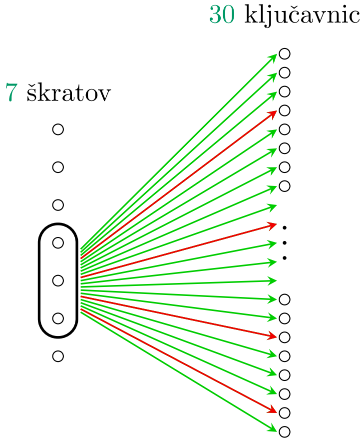
7 škratov

Preštevanje in Dirichletov princip



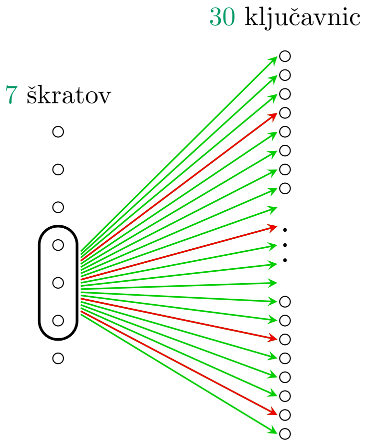


Denimo, da nobeni 3 škrati ne morejo do zaklada.



Denimo, da nobeni 3 škrati ne morejo do zaklada.

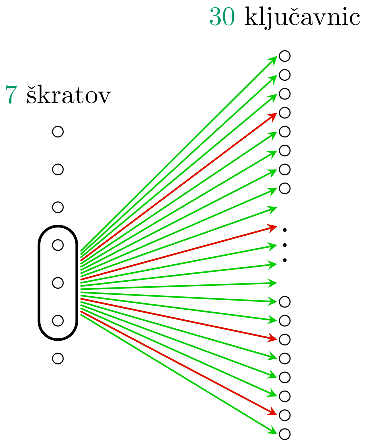
Iz vsake trojice gre vsaj 1 rdeča puščica.



Denimo, da nobeni 3 škrati ne morejo do zaklada.

Iz vsake trojice gre vsaj 1 rdeča puščica.

Imamo vsaj $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ rdečih puščic.

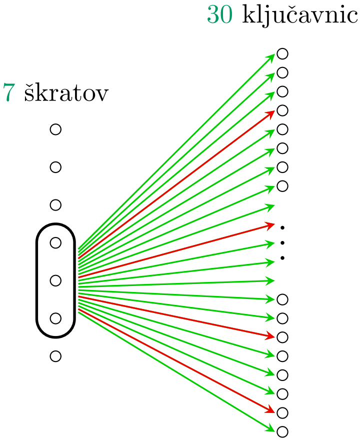


Denimo, da nobeni 3 škrati ne morejo do zaklada.

Iz vsake trojice gre vsaj 1 rdeča puščica.

Imamo vsaj $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ rdečih puščic.

Obstaja vsaj ena ključavnica K, na katero kažeta vsaj 2 rdeči puščici, denimo iz trojic A in B.



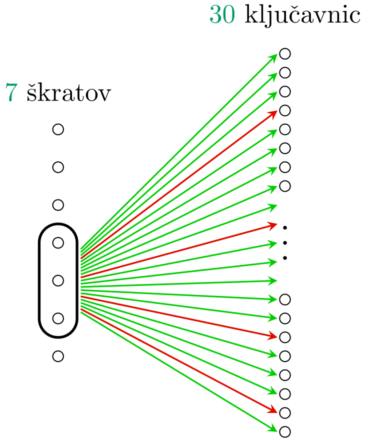
Denimo, da nobeni 3 škrati ne morejo do zaklada.

Iz vsake trojice gre vsaj 1 rdeča puščica.

Imamo vsaj $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ rdečih puščic.

Obstaja vsaj ena ključavnica K, na katero kažeta vsaj 2 rdeči puščici, denimo iz trojic A in B.

$A \cup B$ vsebuje vsaj 4 škrate, ki pa ne morejo odkleniti ključavnice K.



Denimo, da nobeni 3 škrati ne morejo do zaklada.

Iz vsake trojice gre vsaj 1 rdeča puščica.

Imamo vsaj $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ rdečih puščic.

Obstaja vsaj ena ključavnica K, na katero kažeta vsaj 2 rdeči puščici, denimo iz trojic A in B.

$A \cup B$ vsebuje vsaj 4 škrate, ki pa ne morejo odkleniti ključavnice K.

Protislovje!

Naloga 11 - Podmnožice množice X

Množica X ima 6 elementov. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_6$ neke njene podmnožice s 3 elementi. Dokaži, da lahko elemente množice X pobarvamo z 2 barvama, tako da nobena od podmnožic $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ne bo imela vseh elementov enake barve.

Namigi v nalogi

Naloga 11 - Podmnožice množice X

Množica X ima 6 elementov. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_6$ neke njene podmnožice s 3 elementi. Dokaži, da lahko elemente množice X pobarvamo z 2 barvama, tako da nobena od podmnožic $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ne bo imela vseh elementov enake barve.

Ideja: Če ne vemo, kako začeti, pogledamo, ali med podatki v nalogi obstaja kakšna povezava - sumljivo naključje.

Namigi v nalogi

Naloga 11 - Podmnožice množice X

Množica X ima 6 elementov. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_6$ neke njene podmnožice s 3 elementi. Dokaži, da lahko elemente množice X pobarvamo z 2 barvama, tako da nobena od podmnožic $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ne bo imela vseh elementov enake barve.

Ideja: Če ne vemo, kako začeti, pogledamo, ali med podatki v nalogi obstaja kakšna povezava - sumljivo naključje.

$$6 = 2 \cdot 3$$

6 elementov $= 2 \cdot (3$ elementi$)$

Namigi v nalogi

6 elementov $= 2 \cdot (3$ elementi$) \longrightarrow$ komplementi množic

Namigi v nalogi

6 elementov $= 2 \cdot (3$ elementi$) \longrightarrow$ komplementi množic

barvanje z 2 barvama $\equiv$

Namigi v nalogi

6 elementov $= 2 \cdot (3$ elementi$) \longrightarrow$ komplementi množic

barvanje z 2 barvama $\equiv$ barvanje podmnožice in njenega komplementa

Namigi v nalogi

6 elementov $= 2 \cdot (3$ elementi$) \longrightarrow$ komplementi množic

barvanje z 2 barvama $\equiv$ barvanje podmnožice in njenega komplementa

Kaj če bi barvali kar 3-elementne podmnožice?

Namigi v nalogi

6 elementov $= 2 \cdot (3$ elementi$) \longrightarrow$ komplementi množic

barvanje z 2 barvama $\equiv$ barvanje podmnožice in njenega komplementa

Kaj če bi barvali kar 3-elementne podmnožice?

Vseh 3-elementnih podmnožic množice X je $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

Namigi v nalogi

6 elementov $= 2 \cdot (3$ elementi$) \longrightarrow$ komplementi množic

barvanje z 2 barvama $\equiv$ barvanje podmnožice in njenega komplementa

Kaj če bi barvali kar 3-elementne podmnožice?

Vseh 3-elementnih podmnožic množice X je $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

Množic A_i in njihovih komplementov A_i^C je skupaj največ 12 (lahko jih je tudi manj).

Namigi v nalogi

6 elementov $= 2 \cdot (3$ elementi$) \longrightarrow$ komplementi množic

barvanje z 2 barvama $\equiv$ barvanje podmnožice in njenega komplementa

Kaj če bi barvali kar 3-elementne podmnožice?

Vseh 3-elementnih podmnožic množice X je $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

Množic A_i in njihovih komplementov A_i^C je skupaj največ 12 (lahko jih je tudi manj).

Izberemo 3-elementno podmnožico B različno od vseh A_i in A_i^C. Tudi B^C je različna od vseh A_i in A_i^C.

Namigi v nalogi

6 elementov $= 2 \cdot (3$ elementi$) \longrightarrow$ komplementi množic

barvanje z 2 barvama $\equiv$ barvanje podmnožice in njenega komplementa

Kaj če bi barvali kar 3-elementne podmnožice?

Vseh 3-elementnih podmnožic množice X je $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$.

Množic A_i in njihovih komplementov A_i^C je skupaj največ 12 (lahko jih je tudi manj).

Izberemo 3-elementno podmnožico B različno od vseh A_i in A_i^C. Tudi B^C je različna od vseh A_i in A_i^C.

Pobarvamo B z eno barvo in B^C z drugo barvo.

Namigi v nalogi

Naloga 12 - Luči

V vrsti stoji $n \geq 3$ luči. Na začetku je vsaka liha luč v vrsti prižgana, vsaka soda luč pa ugasnjena. V vsaki potezi lahko hkrati zamenjamo stanje treh zaporednih luči v vrsti (ugasnjene prižgemo, prižgane pa ugasnemo).

(a) Dokaži, da vrstni red izvajanja potez za končno stanje luči ni pomemben.

(b) Za katere $n \geq 3$ lahko v končno mnogo potezah pridemo do stanja, v katerem bo vsaka liha luč v vrsti ugasnjena, vsaka soda luč pa prižgana?

 $\dots$

Namigi v nalogi

Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

Namigi v nalogi

Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.

Namigi v nalogi

Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

Namigi v nalogi

Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \ldots$

Namigi v nalogi

Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \ldots$

Par enakih potez se "pokrajša".

Namigi v nalogi

Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \dots$

Par enakih potez se "pokrajša".
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$

Namigi v nalogi

Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \dots$

Par enakih potez se "pokrajša".
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$

Vsako potezo izvedemo 1-krat ali 0-krat.

Namigi v nalogi

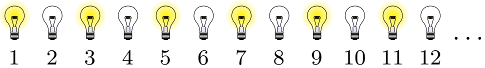
Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \ldots$

Par enakih potez se "pokrajša".
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$

Vsako potezo izvedemo 1-krat ali 0-krat.



Namigi v nalogi

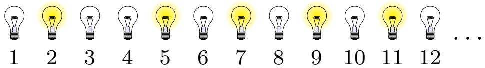
Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \ldots$

Par enakih potez se "pokrajša".
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$

Vsako potezo izvedemo 1-krat ali 0-krat.



Namigi v nalogi

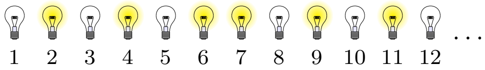
Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \dots$

Par enakih potez se "pokrajša".
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$

Vsako potezo izvedemo 1-krat ali 0-krat.



Namigi v nalogi

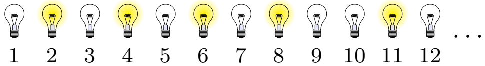
Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \dots$

Par enakih potez se "pokrajša".
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$

Vsako potezo izvedemo 1-krat ali 0-krat.



Namigi v nalogi

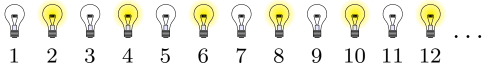
Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \dots$

Par enakih potez se "pokrajša".
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots$

Vsako potezo izvedemo 1-krat ali 0-krat.



Namigi v nalogi

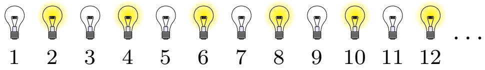
Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \ldots$

Par enakih potez se "pokrajša".
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$

Vsako potezo izvedemo 1-krat ali 0-krat.



Le zaporedje $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, \ldots, P_{3k+1}$ spremeni stanje vseh luči.

Namigi v nalogi

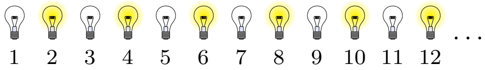
Naj bo P_i poteza, ki spremeni stanje luči i, $i+1$ in $i+2$.

(a) Vsaka poteza bodisi spremeni stanje luči i ali pa ne.
Končno stanje luči je odvisno le od števila izvedenih potez, ki spremenijo njeno stanje.

(b) Poteze lahko uredimo po vrsti.
$P_1, P_1, P_1, P_2, P_2, P_3, P_3, P_3, P_4, P_5, P_5, P_6 \ldots$

Par enakih potez se "pokrajša".
$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$

Vsako potezo izvedemo 1-krat ali 0-krat.



Le zaporedje $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, \ldots, P_{3k+1}$ spremeni stanje vseh luči.

Število luči $n = 3k+3$ mora biti deljivo s 3.

Naloga 13 - Točke na krožnici

Na krožnici leži $n \geq 4$ točk označenih s števili od 1 do n. Par nesosednjih točk, označenih z a in b, imenujemo *pravilen par* točk, če so na vsaj enem od krožnih lokov med a in b vse točke označene s števili manjšimi od a in b. Dokaži, da je pravilnih parov točk natanko $n - 3$.

Naloga 13 - Točke na krožnici

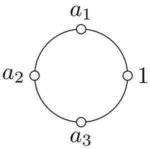
Na krožnici leži $n \geq 4$ točk označenih s števili od 1 do n. Par nesosednjih točk, označenih z a in b, imenujemo *pravilen par* točk, če so na vsaj enem od krožnih lokov med a in b vse točke označene s števili manjšimi od a in b. Dokaži, da je pravilnih parov točk natanko $n - 3$.

Ideja: Prepoznamo, da je naloga primerna, da lahko poskusimo z indukcijo.

Indukcija

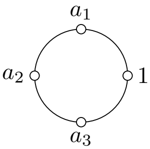
Baza indukcije: $n = 4$

Baza indukcije: $n = 4$



Indukcija

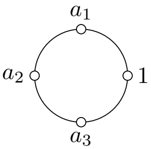
Baza indukcije: $n = 4$



par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,

Indukcija

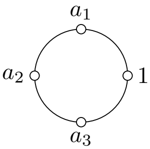
Baza indukcije: $n = 4$



par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

Indukcija

Baza indukcije: $n = 4$

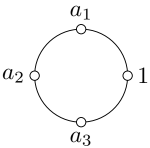


par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

Indukcijska predpostavka: Trditev velja za nek $n \geq 4$.

Indukcija

Baza indukcije: $n = 4$



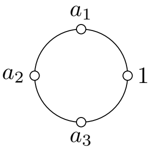
par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

Indukcijska predpostavka: Trditev velja za nek $n \geq 4$.

Indukcijski korak: $n \to n+1$

Indukcija

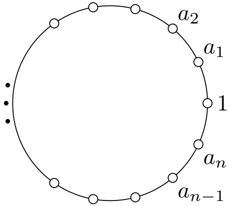
Baza indukcije: $n = 4$



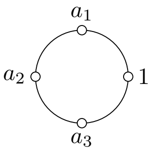
par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

Indukcijska predpostavka: Trditev velja za nek $n \geq 4$.

Indukcijski korak: $n \to n + 1$



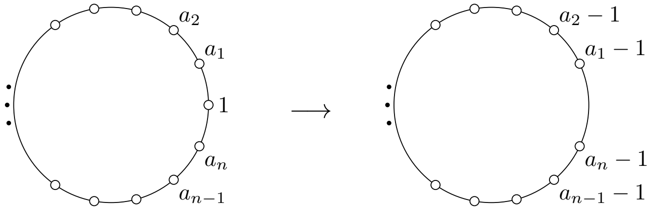
Baza indukcije: $n = 4$



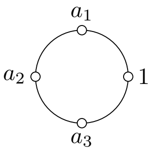
par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

Indukcijska predpostavka: Trditev velja za nek $n \geq 4$.

Indukcijski korak: $n \to n + 1$



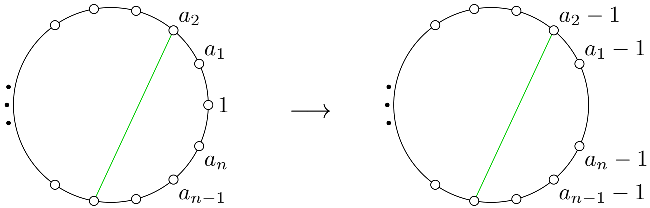
Baza indukcije: $n = 4$



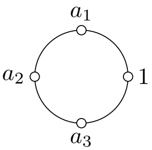
par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

Indukcijska predpostavka: Trditev velja za nek $n \geq 4$.

Indukcijski korak: $n \to n + 1$



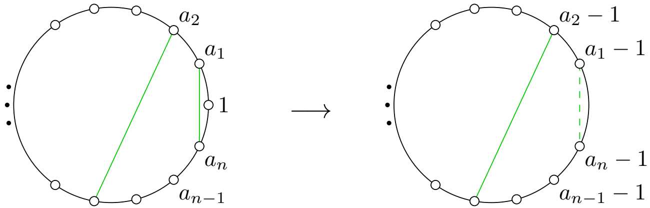
Baza indukcije: $n = 4$



par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

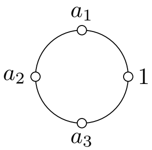
Indukcijska predpostavka: Trditev velja za nek $n \geq 4$.

Indukcijski korak: $n \to n + 1$



Indukcija

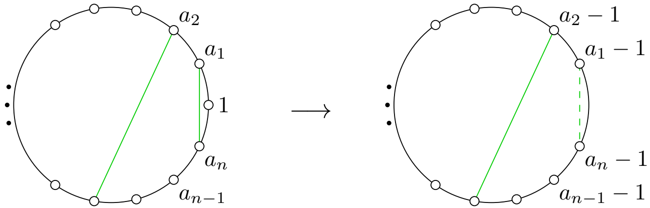
Baza indukcije: $n = 4$



par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

Indukcijska predpostavka: Trditev velja za nek $n \geq 4$.

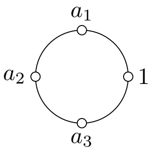
Indukcijski korak: $n \to n+1$



par $\{a_1, a_n\}$ je pravilen

Indukcija

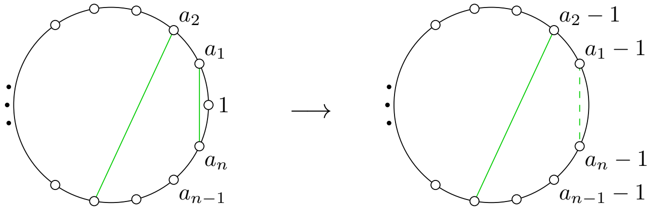
Baza indukcije: $n = 4$



par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

Indukcijska predpostavka: Trditev velja za nek $n \geq 4$.

Indukcijski korak: $n \to n+1$

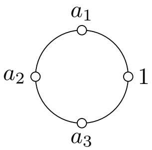


par $\{a_1, a_n\}$ je pravilen

par $\{a_1 - 1, a_n - 1\}$ ni soseden

Indukcija

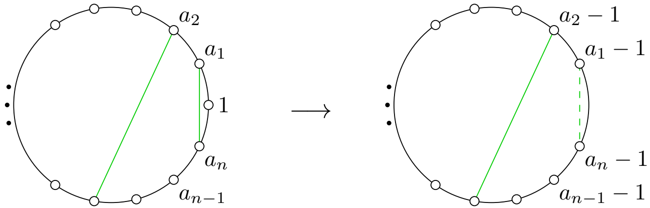
Baza indukcije: $n = 4$



par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

Indukcijska predpostavka: Trditev velja za nek $n \geq 4$.

Indukcijski korak: $n \to n + 1$



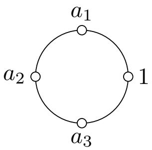
par $\{a_1, a_n\}$ je pravilen

par $\{a_1 - 1, a_n - 1\}$ ni soseden

$n - 3$ pravilnih parov

Indukcija

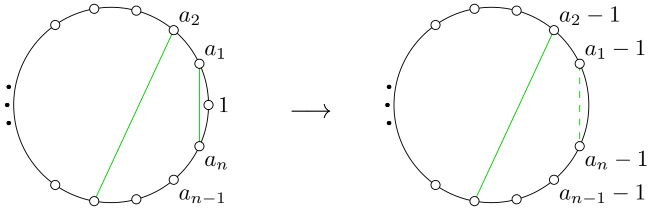
Baza indukcije: $n = 4$



par $\{1, a_2\}$ ni pravilen,
par $\{a_1, a_3\}$ je pravilen.

Indukcijska predpostavka: Trditev velja za nek $n \geq 4$.

Indukcijski korak: $n \to n + 1$



par $\{a_1, a_n\}$ je pravilen

$n - 2$ pravilnih parov

par $\{a_1 - 1, a_n - 1\}$ ni soseden

$n - 3$ pravilnih parov